Ma.
o.
73 m

Lehrbuch

der

Potenzen und Wurzeln

nebst einer

Sammlung von 3296 gelösten & ungelösten Beispielen

zum

Gebrauch an niederen und höheren Schulen, sowie
zum rationellen Selbststudium

bearbeitet von

Dr. A. Kleyer

Ingenieur und Lehrer, vereideter Königl. preuss. Feldmesser, vereideter Grossh. hess.
Geometer I. Kl. in Frankfurt a. M.

Stuttgart.

Verlag von Julius Maier.

1884.

STAATLICHE BIBLIOTHEK BAMBERG

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

Vorwort.

Die Lehren von den Potenzen und Wurzeln bilden das Fundament der ganzen weiteren mathematischen Untersuchungen. — Ohne eine gründliche Kenntnis und ohne gehörige Uebung in der Anwendung derjenigen Lehrsätze, in welchen die Gesetze und Regeln ausgesprochen sind, nach denen mit Potenzen und Wurzeln gearbeitet werden muss, ist ein erfolgreiches und gediegenes Studium der mathematischen Wissenschaften bedingungslos ausgeschlossen.

Da nun, wie jeder Lehrer, jeder sich selbst prüfende Studierende mir beipflichten muss, die in mathematischen Arbeiten vorkommenden Fehler grösstenteils auf die Unkenntnis jener Lehren, bezw. auf eine zu geringe Fertigkeit in der Anwendung derselben zurückzuführen sind, so gieng ich an die Bearbeitung des vorliegenden Buches mit der Absicht ein Lehrbuch zu schaffen, welches sowohl für den Schulunterricht als auch für das Selbststudium ein Lehrbuch in des Wortes voller Bedeutung sein soll. Infolge dieses mir gesteckten Ziels nahm ich unter anderem auch keine Rücksicht auf den Umfang, welchen ein solches Lehrbuch annehmen könnte und wenn dadurch das vorliegende Lehrbuch einen Umfang von 384 Seiten erreichte, einen Umfang, wie ihn kein anderes Lehrbuch über Potenzen und Wurzeln hat, so bitte ich mir deshalb ja nicht den Vorwurf der Weitschweifigkeit machen zu wollen, denn dieser Umfang wurde bedingt durch die vielen gelösten Beispiele, in welchen die Anwendung der Lehrsätze und Regeln gezeigt wird. Diese gelösten Uebungsbeispiele haben nicht allein den Zweck, dass die aufgestellten Lehrsätze und Regeln besser verstanden werden, sondern sie dienen auch dazu, die Anwendungen der Lehrsätze und Theorien zu erlernen, was bekanntlich der Hauptzweck aller mathematischen Studien sein muss.

Was das Studium des vorliegenden Buches anbelangt, so verweise ich im allgemeinen auf das Vorwort in meinem Lehrbuch der Logarithmen, will hier jedoch nochmals bemerken, dass die Lehrsätze, Regeln etc. nicht auswendig gelernt, wohl aber an der Hand der gelösten Uebungsbeispiele verstehen gelernt und an diesen und den ungelösten Beispielen eingeübt werden sollen, denn die ganzen mathematischen Studien bestehen nicht im Auswendiglernen, sondern nur im Verstehen und richtigen Anwenden der Lehrsätze, Formeln, Regeln etc.

Den Anfängern und denjenigen Studierenden, welche sich nur zum Zwecke der Ablegung der einjährig-freiwilligen, oder einer anderen dieser gleichstehenden Prüfung, gewissen mathematischen Studien widmen, ebenso den niederen Schulen

und den unteren Klassen der höheren Schulen, empfehle ich: den Anhang im 1ten Teil, die Abschnitte 15)., D., E. und den Anhang des 2ten Teils zu übergehen, ferner bei den zu lösenden Beispielen die komplizierteren ausser Acht zu lassen, indem das hiernach Restierende den gedachten Zwecken vollständig genügt.

Jeder Studierende, einerlei, ob er in einer Schule oder für sich seine Studien macht, kann sich durch das Studium dieses Buches — bei der geringsten Mühe und dem kleinsten Zeitaufwand — eine gründliche Kenntnis und eine gediegene Anwendung der Lehren von den Potenzen und Wurzeln aneignen und wählt damit zugleich **den billigsten Weg**, denn — abgesehen von Zeit- und Müheersparnis — wird bei dem Gebrauche dieses Buches jeder kostspielige Nachhilfunterricht, wie ihn heutzutage der grösste Teil der studierenden Jugend gerade in der Mathematik nötig hat, vermieden. Dies ist ja einer der Hauptzwecke meines Werkes.

Die geehrten Herren Fachgenossen bitte ich keineswegs um eine nachsichtige, sondern um eine recht strenge Beurteilung, damit ich bei einem Neudruck auf etwaige Verbesserungen Rücksicht nehmen kann. Druckfehler, Berichtigungen, besondere Wünsche etc. bitte ich direkt an mich gelangen zu lassen.

Frankfurt a. M., im November 1883.

Dr. A. Kleyer.

Inhaltsverzeichnis

des 1ten Teils.

I. Die Potenzen.

Seite

A. **Ueber die Potenzen im allgemeinen** 1
(Erläuternde Fragen mit Antworten).

B. **Ueber das Potenzieren mit ganzen positiven Exponenten.**

1). Definition des Potenzierens und Folgerungen, welche sich hieraus ergeben in Fragen und Antworten 5
2). Ueber das Potenzieren der Zahl Eins, Null und der negativen Zahlen . 7
3). Ueber das Potenzieren eines Produktes 9
4). Ueber das Potenzieren eines Bruches 10
5). Ueber die Addition und Subtraktion von Potenzen 12
6). Ueber die Multiplikation von Potenzen 15
7). Ueber die Division von Potenzen 22
8). Ueber die Potenzen von Potenzen 41
(Wiederholte Potenzierung).
9). Ueber die Potenzierung algebraischer Summen 46
10). Ueber die Differenz zweier Quadrate 70
11). Ueber die Zerlegung algebraischer Summen (deren Glieder Potenzen sind) in Faktoren . 73
12). Ueber das Aufsuchen des grössten gemeinschaftlichen Teilers zweier oder mehrerer algebraischen Summen 102
13). Ueber Reduktionen mittelst dem Heben von Brüchen (Quotienten), deren Zähler und Nenner aus algebraischen Summen bestehen 108
14). Ueber das Aufsuchen des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen zweier oder mehrerer algebraischen Summen 119
15). Ueber Reduktionen mittelst der Vereinigung (Addition) von Brüchen . 122

C. **Ueber das Potenzieren mit dem Exponenten Null** 129

D. **Ueber das Potenzieren mit ganzen negativen Exponenten** 132

II. Anhang.

1). Ueber das Wachsen und Abnehmen der Potenzen 152
2). Ueber den unbestimmten Ausdruck: $\frac{0}{0}$ 157
3). Ueber das Zeichen: ∞ und über die unbestimmten Ausdrücke: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\infty : \infty$ 160
4). Ueber besondere Fälle der Potenzierung 162
5). Verwandlung von Quotienten in unendliche Reihen 164
6). Berechnung der Summen gewisser unendlicher Reihen 168
7). Verwandlung unendlicher Reihen in unendliche Produkte 170

Berichtigungen
im 1ten Teil.

1). Im Lehrsatz 27, Seite 162, soll es statt: endliche positive Zahl, heissen: endliche **ganze** Zahl.

2). In der 5ten Relation des Lehrsatzes 27, Seite 162, soll es heissen:

5). $1^{\infty} = \frac{0}{0}$ nämlich unbestimmt

oder $= 1$

Inhaltsverzeichnis

des 2^{ten} Teils.

I. Die Wurzeln.

Seite

A. **Ueber die Wurzeln im allgemeinen** 173
(Erläuternde Fragen mit Antworten).

B. **Ueber das Radizieren mit ganzen positiven Exponenten.**

1). Ueber die Definition des Radizierens etc. und über die absoluten Wurzeln, in Fragen mit Antworten 180
2). Ueber die rationalen und irrationalen Zahlen und Wurzeln 183
3). Ueber die allgemeinen Wurzeln. — Aufstellung der Lehrsätze, welche sich in Betreff des Wertes einer allgemeinen Wurzel ergeben . . 186
4). Sätze über die Rechnung mit allgemeinen Wurzeln 191
5). Ueber die Radizierung eines Produktes 199
6). Ueber die Radizierung eines Bruches 202
7). Ueber die Radizierung einer Potenz 206
8). Ueber die Radizierung einer Wurzel 210
9). Ueber die Potenzierung einer Wurzel 214
10). Ueber das Unverändertbleiben einer Wurzel 215
11). Ueber die Addition und Subtraktion von Wurzeln 220
12). Ueber die Multiplikation von Wurzeln 224
13). Ueber die Division von Wurzeln 239
(Ueber das Rationalmachen der Divisoren).
14). Ueber die Radizierung algebraischer Summen und dekadischer Zahlen 257

a). **Quadratwurzelausziehung algebraischer Summen** 257
α). Ausziehung rationaler Quadratwurzeln, deren Radikanden algebraische Summen sind 258
β). Ausziehung irrationaler Quadratwurzeln, deren Radikanden algebraische Summen sind 264

b). **Quadratwurzelausziehung dekadischer Zahlen** 266
α). Ausziehung rationaler Quadratwurzeln, deren Radikanden ganze Zahlen sind 267
β). Ausziehung rationaler Quadratwurzeln, deren Radikanden Dezimalbrüche sind 277
ββ). Ausziehung irrationaler Quadratwurzeln, deren Radikanden ganze Zahlen oder Dezimalbrüche sind 281
γ). Ausziehung der Quadratwurzel aus gewöhnlichen Brüchen 288

c). **Kubikwurzelausziehung algebraischer Summen** 291
α). Ausziehung rationaler Kubikwurzeln, deren Radikanden algebraische Summen sind 292
β). Ausziehung irrationaler Kubikwurzeln, deren Radikanden algebraische Summen sind 297

d). **Kubikwurzelausziehung dekadischer Zahlen** 299
α). Ausziehung rationaler Kubikwurzeln, deren Radikanden ganze Zahlen sind 299

Seite

β). Ausziehung rationaler Kubikwurzeln, deren Radikanden Dezimalbrüche sind 308

ββ). Ausziehung irrationaler Quadratwurzeln, deren Radikanden ganze Zahlen oder Dezimalbrüche sind 312

γ). Ausziehung der Kubikwurzel aus gewöhnlichen Brüchen 317

e). Ueber die Ausziehung höherer Wurzeln aus algebraischen Summen 321

f). Ueber die Ausziehung höherer Wurzeln aus dekadischen Zahlen . 322

15). Ueber die Rechnung mit imaginären Grössen 326

B. **Ueber das Potenzieren mit gebrochenen Exponenten** 338

C. **Ueber das Radizieren mit negativen und gebrochenen Exponenten** 349

D. **Ueber die Radizierung surdischer Binome** 355

E. **Ueber die Radizierung komplexer Zahlen** 361

II. Anhang.

1). Ueber besondere Fälle der Radizierung 365

2). Gemischte Uebungsbeispiele 367

Berichtigungen

im 2ten Teil.

1). In dem Lehrsatz 15, Seite 220, muss es statt: Zusatz 3, Seite 200, heissen:
Zusatz 4, Seite 201.

2). In dem Lehrsatz 16, Seite 224 muss es ebenfalls statt: Zusatz 3, Seite 200, heissen:
Zusatz 4, Seite 201.

3). In der Behaupt. 1)., Seite 352, muss es statt: $\left(\sqrt[\frac{m}{n}]{a}\right)^{\frac{m}{n}} = r$, heissen:

$$\left(\sqrt[\frac{m}{n}]{a}\right)^{\frac{m}{n}} = a.$$

Erster Teil.

Die Potenzen.

I. Die Potenzen.

A. Ueber die Potenzen im allgemeinen.

Frage 1. Was versteht man in der Arithmetik unter einer **Potenz?**

Antwort. Unter **Potenz** versteht man in der Arithmetik (siehe Erklärung 1) **ein Produkt gleicher Faktoren**; dementsprechend wird z. B. jedes der Produkte:

$$a \,.\, a \,.\, a \,.\, a$$
$$-5 \cdot -5 \cdot -5$$
$$ab \,.\, ab \,.\, ab$$
$$(a-b) \,.\, (a-b) \,.\, (a-b)$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \text{ u. s. f.}$$

eine **Potenz** genannt.

Erkl. 1. Das Wort **Potenz** ist auch in der **Geometrie** und in der **Mechanik** gebräuchlich. In der Geometrie versteht man unter Potenz **das Produkt zweier Strecken**, bezw. **den Inhalt des Rechtecks**, welches man aus diesen Strecken konstruieren kann. In der Mechanik versteht man unter Potenzen **die einfachen Maschinen** (Hebel, schiefe Ebene etc.) aus welchen alle übrigen Maschinen zusammengesetzt gedacht werden können.

Anmerkung 1. Ueber den Ursprung des Wortes **Potenz** in der Arithmetik siehe man die Erkl. 14, Seite 5.

Im nachstehenden ist unter Potenz stets eine solche zu verstehen, wie sie in der Antwort der vorstehenden Frage 1 definiert wurde.

Frage 2. Worin besteht die übliche **Schreibweise** einer Potenz?

Antwort. Die übliche **Schreibweise** einer Potenz, bezw. eines Produktes gleicher Faktoren besteht darin, dass man **einem** dieser Faktoren die Zahl **rechts oben klein** hinzuschreibt, welche angibt, **wie oft** jener Faktor in dem in Rede stehenden Produkte vorkommt, so schreibt man z. B.:

$$\left.\begin{array}{lll} a^4 & \text{statt} & a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \\ (-5)^6 & ,, & -5 \cdot -5 \cdot -5 \cdot -5 \cdot -5 \cdot -5 \\ (cd)^4 & ,, & cd \,.\, cd \,.\, cd \,.\, cd \\ \left(\frac{m}{n}\right)^3 & ,, & \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} \\ (a-b)^3 & ,, & (a-b) \,.\, (a-b) \,.\, (a-b) \\ (m^3)^2 & ,, & m^3 \,.\, m^3 \text{ u. s. f.} \end{array}\right\} \text{man vergl. die Erkl. 2}$$

analog müsste man

$$\begin{array}{lll} a^1 & \text{statt} & a \\ (-m)^1 & ,, & -m \\ (a+b)^1 & ,, & (a+b) \text{ u. s. f.} \end{array}$$

schreiben, was jedoch sehr selten geschieht, indem meistens die Zahl **Eins** weggelassen wird.

Erkl. 2. Die **Basis** einer Potenz (siehe Antwort der Frage 3 und Erkl. 3) muss in **Parenthese** (Klammer) gesetzt werden, wenn dieselbe:

a). eine **negative** Zahl,
b). ein **Produkt,**
c). ein **Quotient,**
d). eine **zusammengesetzte Grösse** (eine algebraische Summe, Aggregat) oder
e). wenn sie selbst eine **Potenz** ist.

Frage 3. Welche besondere **Namen** führen die einzelnen Glieder einer Potenz?

Antwort. Der in einer Potenz mehrmals auftretende Faktor, heisst: **Grundfaktor, Grundzahl, Dignand** (Dignandus), **Basis** oder auch **Wurzel** (siehe Erkl. 3) und die Zahl, welche angibt, wie oft dieser Faktor vorhanden ist, heisst **Exponent der Potenz** oder **Potenzexponent**, z. B. in der Potenz:

a^4,	heisst a die Basis,	^{4}	der Potenzexponent,
$(-5)^6$,	„ -5 „ „	^{6}	„ „
$(cd)^4$,	„ cd „ „	^{4}	„ „
$\left(\frac{m}{n}\right)^3$,	„ $\frac{m}{n}$ „ „	^{3}	„ „
$(a-b)^3$,	„ $a-b$ „ „	^{3}	„ „
$(m^3)^2$,	„ m^3 „ „	^{2}	„ „

u. s. f.

Erkl. 3. Die Bezeichnung **Dignand** (siehe die Erkl. 14, Seite 5) ist veraltet. Die Bezeichnung **Wurzel** bezieht sich auf den **Begriff der Wurzeln** (siehe dieselben). — Der Studierende bedient sich am vorteilhafte ten der kurzen und besten Bezeichnung **Basis**.

Frage 4. Wie wird eine Potenz **gelesen** und welche Abweichungen von der allgemeinen Leseweise finden statt?

Antwort. Eine Potenz, wie z. B. a^5 wird gelesen:

„a **hoch** 5"
oder: „a **in der fünften**" (Potenz)
„ „**die fünfte Potenz von** a"

In den Fällen in welchen der Exponent 1, 2, 3 und 4 ist, finden folgende Abweichungen von der allgemeinen Leseweise statt:

1). für a^1 ($= a$) liest man einfach „a";

2). für a^2 liest man: „a **im Quadrat**"
oder: „a **Quadrat**"
„ „**das Quadrat von** a"
(vergl. die Erkl. 4)

3). für a^3 liest man: „a **im Kubus**"
oder: „a **Kubus**"
„ „**der Kubus von** a"
(vergl. die Erkl. 5)

4). für a^4 liest man — jedoch nur noch sehr selten: „a **im Biquadrat**"
(vergl. die Erkl. 6).

Erkl. 4. Der Inhalt eines Quadrats, dessen Seite $= a$ irgend welchen Längeneinheiten misst, ist $= a \cdot a = a^2$ der betreff. Flächeneinheiten. Da hiernach die **zweite** Potenz einer Zahl a den Inhalt eines Quadrats darstellt, dessen Seite die Masszahl a enthält, so nennt man aus diesem geometrischen Grunde die 2te Potenz einer Zahl (wie a^2) **das Quadrat der Zahl** a und liest in den meisten Fällen für a^2 **nicht** „a in der zweiten", sondern „a **Quadrat**".

Erkl. 5. Der Kubikinhalt eines Würfels (Kubus), dessen Kante $= a$ Längeneinheiten misst, ist $= a \cdot a \cdot a = a^3$ Kubikeinheiten. Da hiernach die **dritte** Potenz einer Zahl a den Kubikinhalt eines Würfels (Kubus) darstellt, dessen Kante die Masszahl a enthält, so nennt man aus diesem stereometrischen Grunde die 3te Potenz einer Zahl (wie a^3) **den Kubus der Zahl** a und liest in den meisten Fällen für a^3 **nicht** „a in der dritten", sondern „a **Kubus**".

Erkl. 6. Die Bezeichnung einer 4ten Potenz, wie a^4, durch „a **im Biquadrat**" ist veraltet und geschieht nur noch sehr selten (so z. B. bei den sogenannten Biquadratischen Gleichungen, auch in der analytischen Geometrie kommen derartige Bezeichnungen noch vor). Das Wort **Biquadrat** stammt aus dem lateinischen und bezeichnet: **das Quadrat des Quadrats**, weil man, wie später gezeigt wird, für a^4 setzen kann: $(a^2)^2$.

Aufgabe 1. Man schreibe die **übliche Form** nachstehender Potenzen u. spreche dieselben aus:

1). $5 \,.\, 5 \,.\, 5 = ?$
2). $-4 \cdot -4 \cdot -4 \cdot -4 = ?$
3). $2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 = ?$
4). $3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, -6 \,.\, -6 \,.\, -6 = ?$
5). $(m+3) \,.\, (m+3) \,.\, (m+3) \,.\, (m+3) = ?$
6). $(1-a) \,.\, (1-a) \,.\, (1-a) = ?$
7). $\frac{3a}{b} \cdot \frac{3a}{b} \cdot \frac{3a}{b} = ?$
8). $abc \,.\, abc \,.\, abc \,.\, abc = ?$
9). $m^3 .\, m^3 .\, m^3 = ?$
10). $(a-b) \,.\, (a-b) = ?$
11). $(a+b)(a+b)(a+b) = ?$
12). $x = ?$
13). $\frac{a+x}{a-x} \cdot \frac{a+x}{a-x} = ?$
14). $a^4 b \,.\, a^4 b \,.\, a^4 b \,.\, a^4 b = ?$
15). $x^{n+1} .\, x^{n+1} .\, x^{n+1} = ?$
16). $a^2 b^3 c^4 = ?$

Frage 5. Wann heisst eine Potenz vom **1ten, 2ten, 3ten . . . nten Grade**; wann heisst eine Potenz eine **gerade** oder **ungerade?**

Erkl. 7. In Folge der Einteilung der Potenzen **in Grade** werden auch die Gleichungen (siehe dieselben), je nachdem die höchste Potenz der Unbekannten 1, 2, 3 . . . n ist, eingeteilt, in: **Gleichungen vom 1ten, 2ten, 3ten . . . nten Grade.**

Erkl. 8. Ist n irgend eine **beliebige** ganze Zahl, nämlich eine gerade oder eine ungerade, so ist in allen Fällen $2n$ eine **gerade** Zahl.

Das allgemeine Zeichen für eine **gerade** Zahl, ist somit: $2n$.

Erkl. 9. Da nach der Erkl. 8 das allgemeine Zeichen für eine gerade Zahl $= 2n$ ist, so kann man eine **ungerade** Zahl allgemein bezeichnen durch $(2n+1)$ oder durch $(2n-1)$.

Das allgemeine Zeichen für eine **ungerade** Zahl, ist somit: $2n \pm 1$.

Antwort. Eine Potenz heisst vom **1ten, 2ten, 3ten . . . nten Grade**, wenn der Exponent derselben bezw. $= 1, 2, 3 \ldots n$ ist, z. B.:

a heisst eine Potenz vom 1ten Grade,
m^2 „ „ „ „ 2ten „
$(ab)^3$ „ „ „ „ 3ten „
allgemein:
$(a+b)^n$ „ „ „ „ nten „
(vergl. die Erkl. 7).

Eine Potenz heisst ferner eine **gerade** oder **ungerade** Potenz, je nachdem der Exponent derselben eine gerade oder ungerade Zahl ist, so sind z. B. die Potenzen:

$$a^4,\ m^6,\ (ab)^8,\ (a+b)^{2n}$$ (siehe Erkl. 8)

gerade, während:

$$(-a)^5,\ m^7,\ (ab)^3,\ (a+b)^{2n\pm 1}$$ (siehe Erkl. 9)

ungerade Potenzen sind.

Frage 6. Was versteht man unter dem **Koeffizienten** einer Potenz?

Erkl. 10. In der Mathematik versteht man unter **Koeffizient** (Coëfficient, v. lat. coëfficiens, mitwirkend) jede Grösse, welche in einem Ausdruck als **Faktor** einer andern Grösse erscheint, die als die sogenannte Hauptgrösse betrachtet werden muss. — In den Ausdrücken: $4a$,

Antwort. Unter dem **Koeffizienten** (siehe Erkl. 10) **einer Potenz** versteht man jeden Faktor, der unabhängig von der Basis jener Potenz ist, z. B.:

in $3a^4$ ist der Koeffizient der Potenz $= 3$;
„ a^5 „ „ „ „ „ $= 1$
(siehe Erkl. 11)

$5a^6$. . . sind die Grössen a und a^6 die Hauptgrössen, mithin die Faktoren 4 und 5 Koeffizienten derselben.

Erkl. 11. Hat ein Ausdruck (Potenz), wie: a^m, $(a+b)^7$, $(abc)^3$, $-m^7$ u. s. f. scheinbar keinen Faktor, welcher von der Hauptgrösse unabhängig ist, so kann man sich stets den von der Hauptgrösse unabhängigen Faktor Eins (und zwar $+1$ oder -1) denken, denn für die angeführten Beispiele hat man:

$$a^m = 1 \,.\, a^m$$
$$(a+b)^7 = 1 \,.\, (a+b)^7$$
$$(abc)^3 = 1 \,.\, (abc)^3$$
$$-m^7 = -1 \,.\, m^7 \quad \text{u. s. f.}$$

Hiernach hat jeder Ausdruck (jede Potenz) **einen Koeffizienten.**

in $-m^6$ ist der Koeffizient der Potenz $= -1$
„ $(3a)^4$ „ „ „ „ „ nicht $= 3$, sondern $= 1$ (da $(3a)^4 = 1 \,.\, (3a)^4$ gelesen werden kann, und die Zahl 3 abhängig von der Basis ist, bezw. zur Basis selbst gehört).

Aufgabe 2.

a). Welche der nebenstehenden Potenzen sind vom 1., 2., 3. etc. Grade?

b). Welche derselben sind gerade, welches sind ungerade Potenzen?

c). Wie heissen die Koeffizienten dieser Potenzen?

1). $3a^7$
2). c^8
3). $-5m^2$
4). $20(ab)^{2n}$
5). $-(pq)^{2n+1}$
6). $5(a-3b)^4$
7). $-4(m+n)^{2n-1}$
8). $-(e-f)^2$
9). $3\left(\frac{m}{n}\right)^6$
10). $-4\left(\frac{3a}{2b}\right)^5$
11). $5(a^2)^3$
12). $-3((a+b)^2)^m$
13). $-(m+3n)^{2n}$
14). $4a^2b^3$
15). $-6m^7q^9$
16). m^3n^4
17). $2a^3 \,.\, 4b^5$
18). $5x^3 \,.\, -x^4$
19). $\left(\frac{3}{4}a\right)^4$
20). $-a^{n-1}$
21). $(4b)^6$
22). $4a^m+3b^n$
23). $-(a-b) \,.\, -(a-b)$
24). $-3 \cdot \frac{m}{n} \cdot - \frac{m}{n} \cdot - \frac{m}{n}$

Frage 7. Wann sind Potenzen gleich; wann heissen Potenzen gleichbasig, wann gleichnamig?

Erkl. 12. Bei der Untersuchung der Potenzen: a^4, $3a^4$, $-a^4$, $\frac{3}{4}a^4$ u.s.f., ob dieselben gleich sind, bleiben die Koeffizienten: 1, 3, -1, $\frac{3}{4}$ u. s. f. unberücksichtigt, da diese Koeffizienten von der Hauptgrösse, welches hier die Potenz a^4 ist, unabhängig sind (vergl. Erkl. 10 und 11).

Erkl. 13. Koeffizienten einer Potenz, wie z. B. der Koeffizient 3 der Potenz $3a^6$ oder der Koeffizient -1 in der Potenz: $-a^7$ dürfen niemals als zur Basis gehörig betrachtet werden, denn sonst müssten jene Potenzen in der Form $(3a)^6$, bezw. $(-a)^7$ u. s. f. geschrieben werden.

Antwort. Potenzen sind gleich, wenn sowohl ihre Basen, als auch ihre Exponenten je unter sich gleich sind, z. B. die Potenzen:

$$a^4,\; 3a^4,\; -a^4,\; \frac{3}{4}a^4 \text{ u. s. f.}$$

sind gleich (siehe Erkl. 12).

Potenzen heissen ferner gleichbasig, wenn sie gleiche Basen haben, z. B. wie die Potenzen:

$$a^5,\; 3a^6,\; -a^7 \text{ u. s. f. (s. Erkl. 13).}$$

Potenzen heissen schliesslich gleichnamig, wenn sie gleiche Exponenten haben, z. B. wie die Potenzen:

$$a^3,\; 3b^3,\; (m+n)^3 \text{ u. s. f.}$$

Gleiche Potenzen sind hiernach sowohl gleichbasig, als auch gleichnamig.

Aufgabe 3. Welche der nebenstehenden Potenzen, sind:

a). **gleich,**

b). **gleichbasig** und

c). **gleichnamig?**

1). $10a^4$
2). $-a^4$
3). $-12a^4$
4). $5a^3$
5). a^7
6). $-9a^5$
7). a^{12}
8). $-3m^7$
9). $4n^7$
10). p^7
11). $-q^7$
12). $(ab)^4$
13). $3(ab)^4$
14). $4(a-2b)^3$
15). $(a-2b)^7$
16). $-(a-2b)^{10}$
17). $\left(\frac{3a}{b}\right)^8$
18). $5m^8$
19). $3(a^2)^8$
20). $(-a^5)^8$
21). $4(a^6)^2$
22). $-(a^6)^2$
23). $\left(\frac{3a+2b}{m}\right)^7$
24). a^{2n+1}

Erkl. 14. In der Arithmetik soll der Name **Potenz** (v. lat. potentia, Vermögen, Macht) dadurch eingeführt worden sein, dass *Diophantus* (geb. im 4. Jahrh. n. Chr.) und seine Nachfolger das Quadrat der Unbekannten, nämlich: $x \, . \, x$ oder x^2, δυναμις was im lateinischen potentia (potestas) heisst, nannten. — Im 16. Jahrhundert wurde der Name dignitas (Dignität, Würde) für den mehrmals auftretenden Faktor und der Name potestas eingeführt; im 17. Jahrhundert endlich bürgerte sich die jetzt übliche Bezeichnung und Benennung der Potenzen ein, welche besonders durch *Herigogne* und *Cartesius* verbreitet wurden. — Potenzen mit **negativen** Exponenten (siehe dieselben) wurden zuerst von dem deutschen Mathematiker *Stiefel* angewandt. — Potenzen mit **gebrochenen** Exponenten und mit ihnen der **erweiterte Begriff der Potenzen** (siehe die Wurzeln) kamen durch *Newton* (geb. 25. Dez. 1642 zu Lincolnshire) in Gebrauch.

B. Das Potenzieren mit ganzen positiven Exponenten.

1). Definition des Potenzierens und Folgerungen, welche sich hieraus ergeben.

Frage 8. Was heisst eine Zahl a mit einer Zahl b **potenzieren?**

Antwort. Eine Zahl a mit einer Zahl b potenzieren — sie in die b^{te} Potenz erheben — heisst: Die Zahl a so oft als Faktor setzen als die Zahl b Einheiten enthält und die somit angedeutete Multiplikation (siehe Erkl. 15) ausführen; dementsprechend gibt z. B. die Zahl 3 mit 4 potenziert $=$ $3 \, . \, 3 \, . \, 3 \, . \, 3$ $(= 3^4)$ oder $= 81$.

Erkl. 15. Die **Potenzierung** ist somit nur eine besondere Art der Multiplikation und gehört zu den sieben einfachen arithmetischen Operationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzierung, Radicierung und Logarithmierung.

Frage 9. Wieviele Grössen kommen bei dem Potenzieren in Betracht und welche weitere Operationen ergeben sich aus dem Begriff des Potenzierens?

Antwort. Bei dem Potenzieren kommen **drei** Grössen in Betracht, nämlich die Basis, der Exponent und die Potenz selbst (d. i. das Resultat der angedeuteten Multiplikation) — siehe vorige Antwort und Antw. der Frage 3.

In Bezug auf diese drei Grössen sind **drei** Operationen möglich, denn ist z. B. die Basis = 2, der Exponent = 3, so kann man sich **erstens** die Frage stellen:

Welche Zahl x (siehe die Erkl. 16) **erhält man, wenn** 2 **in die dritte Potenz erhoben wird**, in Zeichen:

$$2^3 = x$$

mit dem Aufsuchen dieser Grösse $x = 8$ (siehe Erkl. 17) beschäftigt sich nach Antw. d. Frage 8, **die Potenzierung**;

zweitens kann man sich die Frage stellen:

Welche Zahl y **muss in die dritte Potenz erhoben werden, damit man die Zahl** 8 **erhält**, in Zeichen:

$$y^3 = 8$$

das Aufsuchen dieser Grösse y bildet eine weitere Operation, welche unter dem Namen: **Die Radicierung** (Wurzelausziehung) in diesem Bande später vorgeführt wird;

schliesslich kann man sich **drittens** die Frage stellen:

Mit welcher Zahl z **muss die Zahl** 2 **potenziert werden, damit man die Zahl** 8 **erhält**, in Zeichen:

$$2^z = 8$$

das Aufsuchen dieser Grösse z bildet eine dritte Operation, welche unter dem Namen **die Logarithmierung** in dem Kapitel: **Die Logarithmen** behandelt ist.

Aus der Potenzierung ergeben sich somit zwei weitere, derselben umgekehrte Operationen, nämlich die

Radicierung (Wurzelausziehung) und die **Logarithmierung.**

Erkl. 16. Die **unbekannten** oder **gesuchten** Grössen werden in der Arithmetik meistens mit den letzten Buchstaben: x, y, z . . . des Alphabets bezeichnet.

Erkl. 17. Nach der Antwort der Frage 8, ist: $2^3 = 2 . 2 . 2$ oder $= 8$.

Frage 10. Welche Folgerungen ergeben sich aus dem Begriff der Potenzierung, und zwar:

1). in Bezug auf den Exponenten und
2). in Bezug auf die Stellung der Basis zu den Exponenten?

Erkl. 18. Später wird gezeigt, dass einer Potenz auch dann einen Sinn beiwohnt, wenn der Exponent eine **negative** oder **gebrochene** Zahl ist, da z. B.:

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a}$$

$$a^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^3} \text{ u. s. f. ist,}$$

was in späteren Teilen bewiesen ist und was der Anfänger zunächst unberücksichtigt lassen muss.

Erkl. 19. In einigen **Ausnahmefällen** kann die Basis und der Exponent einer Potenz vertauscht werden, so z. B. in der Potenz 2^4;

denn: 2^4 ist $= 2 . 2 . 2 . 2 = 16$ und
4^2 „ $= 4 . 4$, nämlich auch $= 16$
(siehe Erkl. 20).

Erkl. 20. Dem Anfänger ist zu empfehlen, **niemals**, nämlich auch da nicht, wo es, wie in dem Beispiele der Erkl. 19, auf das Resultat **ohne Einfluss** ist, Exponent und Basis zu vertauschen.

Antwort. Nach der in Antwort der Frage 8 gegebenen Definition der Potenzierung ergibt sich:

1). in Bezug auf den Exponenten, die Folgerung:

Der Exponent kann nur eine positive und ganze Zahl sein,

denn hätte man z. B. a^{-3} oder $a^{\frac{4}{5}}$, so würde dies heissen:

„a soll (-3) mal, bezw. $\left(\frac{4}{5}\right)$ mal mit sich selbst multipliziert werden“,

welchem **zunächst** (siehe die Erkl. 18) **keinen Sinn** zugesprochen werden kann, und

2). in Bezug auf die Stellung der Basis zu dem Exponenten, die Folgerung:

Die Basis und der Exponent dürfen niemals (siehe Erkl. 19 und 20) **vertauscht werden,**

denn: Hat man z. B. die Potenz 2^3, so heisst dies:

2 soll dreimal mit sich selbst multipliziert werden, in Zeichen: $2^3 = 2 . 2 . 2 = 8$;

wollte man nun Basis und Exponent vertauschen, also schreiben: 3^2, so würde dies heissen:

3 soll zweimal mit sich selbst multipliziert werden, in Zeichen: $3^2 = 3 . 3 = 9$.

Aus den Resultaten (8 u. 9) beider Schreibweisen ist ersichtlich, dass 2^3 nicht $= 3^2$ gesetzt werden kann.

2). Ueber das Potenzieren der Zahl Eins, Null und der negativen Zahlen.

Lehrsatz 1. Eins in jede Potenz erhoben gibt Eins.

Behaupt. $1^5 = 1$, oder allgemein:

$$1^n = 1.$$

Beweis. Nach Antw. der Frage 8, ist: $1^5 = 1 . 1 . 1 . 1 . 1$ u. dies Produkt ist $= 1$; analog erhält man allgemein:

$$1^n = 1.$$

Lehrsatz 2. Null in jede Potenz erhoben gibt Null.

Behaupt. $0^4 = 0$, oder allgemein:

$$0^n = 0.$$

Beweis. Nach Antw. der Frage 8, ist: $0^4 = 0 . 0 . 0 . 0$ und dies Produkt ist $= 0$; analog erhält man allgemein:

$$0^n = 0.$$

Lehrsatz 3. **Um eine negative Zahl zu potenzieren, potenziere man die absolute Zahl** (nämlich ohne Rücksicht auf das Vorzeichen derselben) **und nehme das Resultat positiv oder negativ, je nachdem der Potenzexponent gerad oder ungerad ist.**

Behaupt. I. $(-3)^4 = +3^4$ oder **allgemein:**

$$(-a)^{2n} = +a^{2n}$$

Behaupt. II. $(-3)^5 = -3^5$ oder **allgemein:**

$$(-3)^{2n\pm 1} = -3^{2n\pm 1}$$

Beweis I. Nach Antw. der Frage 8, ist: $(-3)^4 = -3 \cdot -3 \cdot -3 \cdot -3$ und dies gibt nach den Regeln der Multiplikation entgegengesetzter Grössen (s. Erkl. 21)

$$= +(3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3) = +3^4$$

allgemein hat man hiernach:

$$(-a)^{2n} = +a^{2n} \quad \text{(s Erkl. 8).}$$

Beweis II. Nach Antw. der Frage 8, ist: $(-3)^5 = -3 \,.\, -3 \,.\, -3 \,.\, -3 \,.\, -3$ und dies gibt nach den Regeln der Multiplikation entgegengesetzter Grössen (siehe Erkl. 21)

$$= -(3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3) = -3^5$$

allgemein hat man hiernach:

$$(-a)^{2n\pm 1} = -a^{2n\pm 1} \quad \text{(s. Erkl. 9).}$$

Erkl. 21. Werden zwei Grössen miteinander multipliziert, so erhält man ein **positives** Resultat, wenn die Vorzeichen gleich (nämlich beide = + oder beide = —) sind; man erhält ein **negatives** Resultat, wenn die Vorzeichen ungleich (nämlich das eine = +, das andere = — ist) sind. — Hieraus kann man die Regel ableiten:

Wird eine Anzahl negativer Grössen miteinander multipliziert, so ist das Resultat dieser Multiplikation ein positives oder negatives, je nachdem die Anzahl jener negativen Grössen gerad oder ungerad ist.

Man vergl. das Kapitel der Buchstabenrechnung: die vier Species mit allgemeinen Zahlzeichen.

Aufgabe 4. Die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Potenzierungen, sollen — soweit es die bis jetzt aufgestellten Lehrsätze zulassen — ausgeführt werden

1). $1^3 = ?$
2). $1^a = ?$
3). $1^{a+b} = ?$
4). $0^2 = ?$
5). $0^5 = ?$
6). $0^m = ?$
7). $0^{m+n} = ?$
8). $(-4)^3 = ?$
9). $(-5)^4 = ?$
10). $(-a)^5 = ?$
11). $(-m)^2 = ?$
12). $(-ab)^3 = -(ab)^3$
13). $(-a)^{2n} = ?$
14). $(-c)^{2n+1} = ?$
15). $(-1)^4 = ?$
16). $(-1)^5 = ?$
17). $(-1)^{2n} = ?$
18). $(-1)^{2n+1} = ?$
19). $(-1)^{2n-1} = ?$
20). $\left(-\frac{a+3b}{n}\right)^2 = +\left(\frac{a+3b}{n}\right)^2$
21). $\left(-\frac{m}{n}\right)^3 = ?$
22). $(-(a)^2)^2 = +(a^2)^2$
23). $(-(mn)^3)^3 = ?$
24). $\left(-\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}\right)^2 = ?$

In Betreff der Beispiele 13, 14, 17, 18 u. 19 beachte man die Erklärungen 8 und 9.

3). Ueber das Potenzieren eines Produktes.

Lehrsatz 4. **Ein Produkt wird mit einer Zahl potenziert, indem man jeden einzelnen Faktor mit derselben potenziert und das Produkt der so erhaltenen Potenzen bildet.**

Erkl. 22. Das Multiplikationszeichen (.) wird in der Buchstabenrechnung meistens weggelassen. Der Ausdruck abc bedeutet so viel als $a.b.c$, ebenso ist:

$$a^n b^n c^n = a^n . b^n . c^n \text{ u. s. f.}$$

Analog ist auch: $5a = 5.a$.

Erkl. 23. Bei einem Produkt von Zahlen (Ausdrücken), welche zum Teil Exponenten haben, bezieht sich der Exponent stets nur auf diejenige Zahl, welche zunächst vor ihm steht (man vergl. auch die Erkl. 2). — Hat man z. B. 2.4^3, so ist dies $= 2.4.4.4 = 128$ und **nicht** $= (2.4)^3$, denn dies würde geben: 8^3 oder $= 8.8.8 = 512$.

Behaupt. $(abc)^4 = a^4 b^4 c^4$

oder allgemein:

$$(abcd\ldots)^n = a^n b^n c^n d^n\ldots$$

(siehe Erkl. 22)

Beweis. Nach Antw. der Frage 8, ist:

$$(abc)^4 = abc\,abc\,abc\,abc$$

Da nun in einem Produkte die Reihenfolge der einzelnen Faktoren von dem Resultate der hierdurch angedeuteten Multiplikation unabhängig ist, so kann man auch schreiben:

$$(abc)^4 = aaaa\,bbbb\,cccc$$

und hieraus erhält man nach Antwort der Frage 2:

$$(abc)^4 = a^4 b^4 c^4$$

oder allgemein:

$$(abcd\ldots)^n = a^n b^n c^n d^n\ldots$$

Zusatz 1. Da jeder **Koeffizient** ein **Faktor** ist (s. Erkl. 10), so muss nach vorstehendem Lehrsatze der Koeffizient **der Basis** einer Potenz ebenfalls potenziert werden. Hat man z. B. $(5a)^3$, so gibt dies nach Lehrsatz 4 =

$$5^3 . a^3 = 125a^3$$

Zusatz 2. Durch Umkehrung des Lehrsatzes 4 erhält man den für die **Multiplikation von Potenzen** (s. dieselben) wichtigen Satz:

„**Gleichnamige Potenzen** (d. s. solche, welche gleiche Exponenten haben) **werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert und das so erhaltene Produkt mit dem gemeinschaftlichen Exponenten jener Potenzen potenziert**“,

in Zeichen: . . . $a^n b^n c^n = (abc)^n$

Aufgabe 5. Die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Potenzierungen, sollen — soweit es die bis jetzt aufgestellten Lehrsätze zulassen — ausgeführt werden.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $(2ab)^5 = 2^5a^5b^5$	$= 32a^5b^5$. .	man vergl. Lehrsatz 4 und dessen Zusatz 1.
2). $(7np)^2 =$	?	
3). $(1 . 2 . 3 . 4)^2 =$	?	
4). $(ax)^4 =$	?	
5). $(xyz)^3 =$	?	
6). $(2mnpq)^4 =$	?	
7). $(3a)^2 + (4b)^3 = 3^2a^2 + 4^3b^3$	$= 9a^2 + 64b^3$.	man potenziere jeden einzelnen Summanden.
8). $(4c)^m - (5d)^m =$	?	
9). $(2ab)^3 + (3cd)^2 - (4fg)^4 =$. .	?	
10). $((a+b)(c+d))^3 =$. . .	$(a+b)^3(c+d)^3$.	man beachte Erkl. 2, da die einzelnen Faktoren Summen sind.
11). $(3a(m+n)(f+g))^4 =$	?	
12). $10a^4 + (10a)^4 = 10a^4 + 10^4a^4$	$= 10a^4 + 10000a^4$.	man beachte die Erkl. 23.
13). $3a^2 - (2m)^3 + (fg)^4 =$. . .	?	
14). $(ax)^{2m} =$	?	
15). $((2a+b)(m+n))^4 + 3(m+n)^4$.	?	
16). $(-4a)^2 = +(4a)^2 = 4^2a^2$	$= 16a^2$. .	man beachte den Lehrsatz 3.
17). $(-4abc)^2 =$	?	
18). $(-3mn)^3 =$	?	
19). $-(2ab)^2 = -2^2a^2b^2$	$= -4a^2b^2$	
20). $-(4mn)^3 =$	?	
21). $(-2ab)^2 =$	?	
22). $(-3(a+b)(c+d))^3 =$. . .	?	
23). $-((a+2b)(c+d))^2 =$. . .	?	
24). $(-3ab . 4mn)^3 = -(3ab\,4mn)^3 =$	?	
25). $3a^2 + (-2m)^3 =$	?	
26). $(-7(a+b)(c+d))^2 =$. . .	?	
27). $(-a . -b)^4 =$	? . . .	man beachte die Erkl. 21.
28). $(-a . b)^5 =$	?	
29). $-2a . 4b(-mn)^2 = -2a . 4b . +m^2n^2$	$= -8abm^2n^2$	
30). $-4m . 3n(-3pq)^3 =$. . .	?	
31). $3m . 4n(-5(a+b))^4 =$. . .	?	
32). $-4(a+b)(-5(a+b))^4$. . .	?	
33). $\frac{m}{n}(-3abc)^3 = \frac{m}{n} \cdot -3^3a^3b^3c^3$	$= -\frac{27a^3b^3c^3m}{n}$	
34). $\frac{3a}{b}\left(-2(m+n)p\right)^4 =$. . .	?	

4). Ueber das Potenzieren eines Bruches.

Lehrsatz 5. Ein Bruch wird mit einer Zahl potenziert, indem man Zähler und Nenner mit derselben potenziert.

Behaupt. $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}$ oder allgemein:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Beweis. Nach Antw. der Frage 8, ist:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$$

Erkl. 24. **Gemischte** Brüche müssen vor der Potenzierung eingerichtet werden. Hat man z. B. $\left(2\frac{3}{4}\right)^3$, so muss man zunächst schreiben: $\left(\frac{11}{4}\right)^3$ und hierfür erhält man:

$$\frac{11^3}{4^3} = \frac{1331}{64} = 20\frac{51}{64}$$

Da nun Brüche mit einander multipliziert werden, indem man die Zähler und auch die Nenner mit einander multipliziert, so kann man auch schreiben:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b \cdot b}$$ oder nach Antw. der Frage 2:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}$$ oder allgemein:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$ (siehe auch die Erkl. 24).

Zusatz 1. Durch Umkehrung des Lehrsatzes 5 erhält man den für die **Division von Potenzen** (siehe dieselben) wichtigen Satz:

„**Gleichnamige Potenzen** (d. s. solche, welche gleiche Exponenten haben) **werden dividiert, indem man die Basen dividiert und den so erhaltenen Quotienten** (Bruch) **mit dem gemeinschaftlichen Exponenten jener Potenzen potenziert**“,

in Zeichen: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Aufgabe 6. Die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Potenzierungen, sollen — soweit es die bis jetzt aufgestellten Lehrsätze zulassen — ausgeführt werden.

Uebungsbeispiele:	**Resultate:**	**Andeutungen:**
1). $\left(\frac{3a}{2b}\right)^3 = \frac{(3a)^3}{(2b)^3} = \frac{3^3a^3}{2^3b^3} =$	$\frac{27a^3}{8b^3}$	. . . man beachte die Lehrsätze 5 und 4.
2). $\left(\frac{2}{5}\right)^2 =$	?	
3). $\left(\frac{2a}{7bc}\right)^2 =$	?	
4). $\left(\frac{4}{5}\right)^3 =$	?	
5). $\left(\frac{3a}{m}\right)^4 =$	?	
6). $\left(\frac{2abc}{10mnp}\right)^5 =$	?	
7). $\left(\frac{2a}{4b}\right)^2 + \left(\frac{3m}{n}\right)^3 =$	?	. . . man potenziere die einzelnen Summanden.
8). $\left(\frac{m}{n}\right)^3 - \left(\frac{r}{2s}\right)^4 =$	?	

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
9). $\left(\frac{3a+b}{m+n}\right)^4 = \ldots\ldots$	$\frac{(3a+b)^4}{(m+n)^4}$	. . man beachte die Erkl. 2.
10). $\left(\frac{m+n}{a-b}\right)^2 - \left(\frac{p+q}{c-d}\right)^3 + \left(\frac{3a}{2b}\right)^4 =$	?	
11). $\left(\frac{3(a+2b)(f+g)}{4(m+n)}\right)^3 = \ldots$	?	
12). $3\left(\frac{a}{b}\right)^m = \ldots\ldots$	?	
13). $\frac{2a^3}{4b^3} + \left(\frac{2a}{4b}\right)^3 = \ldots\ldots$	?	
14). $\left(\frac{-2a}{5}\right)^2 = \frac{(-2a)^2}{5^2} = \frac{+(2a)^2}{5^2} =$	$\frac{4a^2}{25}$	. . man beachte auch den Lehrsatz 3.
15). $\left(\frac{3m}{-4n}\right)^4 = \ldots\ldots$	?	
16). $-\left(\frac{2a}{5}\right)^2 = -\frac{(2a)^2}{5^2} = -\frac{2^2a^2}{5^2} =$	$-\frac{4a^2}{25}$	
17). $\left(\frac{3(a+b)}{4m}\right)^2 - \left(\frac{3n}{2c}\right)^4 = \ldots$	?	
18). $\left(-\frac{4a}{3m}\right)^3 - \left(\frac{2n}{4b}\right)^3 = \ldots$	?	
19). $\left(\frac{-3a \cdot 4b}{5m}\right)^3 = \ldots\ldots$	?	
20). $\left(\frac{3mn}{2p}(a+3b)\right)^2 = \ldots$	?	
21). $\left(\frac{1}{m}\right)^4 = \frac{1^4}{m^4} = \ldots\ldots$	$\frac{1}{m^4}$	. . . man beachte die Lehrsätze 5 und 1.
22). $\left(\frac{1}{3a}\right)^3 = \ldots\ldots$	?	
23). $\left(\frac{-1}{2(m+n)}\right)^4 = \ldots\ldots$	?	. . . man beachte die Lehrsätze 5, 3 und 4.
24). $\left(-\frac{1}{3abc}\right)^3 = \ldots\ldots$	?	

5). Ueber die Addition und Subtraktion von Potenzen.

Die Lehrsätze, bezw. Regeln, welche für die Addition und Subtraktion **entgegengesetzter** Grössen in dem ersten Kapitel der Buchstabenrechnung: **Die vier Species mit allgemeinen Zahlzeichen** aufgestellt sind, gelten auch für die Addition und Subtraktion sowohl gleicher als ungleicher Potenzen, da man sich für jede der zu addierenden oder zu subtrahierenden Potenzen einen Buchstaben gesetzt denken kann und diese gleich oder ungleich sind, wenn jene gleich oder ungleich sind, hat man z. B.: . . $3a^3 - 7a^3 + 3b^5 - 4a^3 - 2b^5$ u. s. f.

und man **denkt** sich $a^3 = m$ und $b^5 = n$ gesetzt, so geht vorstehender Ausdruck über, in:

$$3m - 7m + 3n - 4m - 2n$$

die weitere Berechnung eines solchen gedachten Ausdrucks gehört in das 1ste Kapitel der Buchstabenrechnung: **Die vier Species mit allgemeinen Zahlzeichen.**

Anmerkung 2. In nachstehenden Erklärungen sind die Hauptregeln und Sätze aus dem Kapitel der Buchstabenrechnung: **Die 4 Species mit allgemeinen Zahlzeichen**, welche sich auf die Addition und Subtraktion allgemeiner Zahlzeichen beziehen, kurz angedeutet.

Die sich hieran anschliessenden Uebungsbeispiele sollen zur Einübung der Addition und Subtraktion von Potenzen, bezw. zur Rekapitulation der Addition und Subtraktion allgemeiner Zahlzeichen dienen.

Erkl. 25. a). Das Vorzeichen (+ oder —), welches **direkt** vor einer Grösse steht, ist **kein** Operationszeichen, sondern das Vorzeichen der Grösse selbst.

b). Steht vor einer Grösse **kein** Vorzeichen, so hat man sich immer **das Vorzeichen** + als derselben zugehörig zu denken, d. h. man hat diese Grösse als **positiv** zu betrachten.

z. B.: a^5 bedeutet soviel als: $+a^5$ (im Gegensatz zu: $-a^5$)

Erkl. 26. Das **Additionszeichen** + (Operationszeichen) wird in den meisten Fällen **nicht** geschrieben — man vergleiche nebenstehende Beispiele.

z. B. Nach den Erklärungen 25 u. 26 hat man die Ausdrücke:

$$4a^3 + 7a^3$$
$$5m^2n^3 + 6m^2n^3$$
$$10a^4 - 3a^4$$
$$-10a^4 - 14a^4$$

u. s. f. der Reihe nach zu lesen:

$$(+4a^3) + (+7a^3)$$
$$(+5m^2n^3) + (+6m^2n^3)$$
$$(+10a^4) + (-3a^4)$$
$$(-10a^4) + (-14a^4) \text{ u. s. f.}$$

Erkl. 27. Buchstabengrössen kann man nur addieren, wenn sie **gleich** sind (siehe Erkl. 29) und werden addiert, indem man ihre Koeffizienten addiert (oder subtrahiert — s. Erkl. 28) und die so erhaltene Summe (oder Differenz) einer dieser gleichen Buchstabengrössen als Koeffizient voranschreibt.

z. B.: $4a^3 + 7a^3 + 10a^3$

welcher Ausdruck nach den Erklärungen 25 und 26 gelesen werden muss:

$$(+4a^3) + (+7a^3) + (+10a^3)$$

gibt: $(4+7+10)a^3 = 21a^3$

Erkl. 28. Haben **gleiche** Buchstabengrössen **entgegengesetzte** Vorzeichen, so werden sie addiert, indem man die kleinere von der grösseren subtrahiert und dem Reste (der Differenz) das Vorzeichen der grösseren gibt.

z. B.: $10a^4 - 3a^4$

welcher Ausdruck nach den Erkl. 25 und 26 gelesen werden muss:

$$(+10a^4) + (-3a^4)$$

gibt: $+7a^4$ oder kurzweg: $7a^4$

Analog erhält man für:

$$-10a^4 + 3a^4 = -7a^4$$

Erkl. 29. Ungleiche Buchstabengrössen (siehe Erkl. 27) kann man nur in Additionsform nebeneinander schreiben.

z. B.: $3a^5 - 5b^6$ ist $= 3a^5 - 5b^6$

Erkl. 30. Buchstabengrössen (Zahlen) werden subtrahiert, indem man dem Subtrahenden das (die) Vorzeichen wechselt, alsdann nach vorstehenden Erklärungen addiert.

z. B.:

1). $4a^3 - (-7a^3) = (+4a^3) + (+7a^3) = 4a^3 + 7a^3 = 11a^3$

2). $-10b^5 - (+7b^5) = -10b^5 + (-7b^5) = -10b^5 - 7b^5 = -17b^5$

Erkl. 31. a). Steht vor einer Klammer ein Pluszeichen (beachte dabei die Erkl. 25b.), so lasse man die Klammer mit dem Pluszeichen einfach weg.

b). Steht vor einer Klammer ein Minuszeichen, so wechsele man die Vorzeichen der in der Klammer stehenden Summanden und lasse alsdann die Klammer mit dem Minuszeichen weg.

z. B.:

1). $(a + 3b - 2c) + (2m + p) = a + 3b - 2c + 2m + p$

2). $(a + 3b - 2c) - (-3m + p) = a + 3b - 2c + 3m - p$ u. s. f.

Aufgabe 7. Die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Additionen und Subtraktionen von Potenzen, sollen — soweit es die bis jetzt aufgestellten Lehrsätze zulassen — ausgeführt werden.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $4a^3 + 7a^3 =$	?	
2). $10a^4 - 3a^4 =$	?	man beachte die Erkl. 28.
3). $-10a^4 - 3a^3 =$	?	
4). $5m^2n^3 + 6m^2n^3 =$	?	
5). $7a^m - 3a^m + 6a^m - 11a^m =$	?	
6). $3a^2 + 4b^3 =$	?	man beachte die Erkl. 29.
7). $3a^2 - 4b^3 + 7a^2 - 10b^3 =$	?	
8). $2 \cdot 3^4 - 5 \cdot 3^4 + 9 \cdot 3^4 - 12 \cdot 3^4 =$	?	
9). $2^3 + 2^4 - 2^6 =$	?	wo keine Addition der Potenzen möglich, da führe man zunächst die angedeuteten Potenzierungen aus.
10). $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 =$	?	
11). $6^2 - 7^2 + 8^2 - 9^2 + 10^2 =$	?	
12). $-1^3 + 3^3 - 5^3 + 7^3 - 9^3 =$	?	
13). $-2^3 + 4^3 - 6^3 + 8^3 - 10^3 =$	?	
14). $8^3 - 3^8 =$	?	
15). $4^2 - 2^4 =$	?	
16). $(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 =$	?	
17). $(-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2 =$	?	
18). $(-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 =$	?	
19). $(+3)^3 + (-3)^3 =$	?	
20). $3^3 - 3^3 =$	?	
21). $7 \cdot 2^4 - 6 \cdot 4^2 =$	?	
22). $-3 \cdot 2^8 + 6 \cdot 8^2 =$	?	
23). $(-2)^4 - (-2)^3 =$	?	
24). $(+3)^3 - (-2)^5 =$	?	
25). $2(ab)^4 - 5(ab)^4 + 3(ab)^4 =$	?	
26). $\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 5\left(\frac{a}{b}\right)^3 =$	?	

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
27). $8m^3 + 7x^3 - 2x^3 + 3m^3 - 10m^3 =$	?	
28). $(3a^3 - 5b^2 + 2c^4) - (c^4 + 3b^2 - 5a^3) =$	?	man beachte die Erkl. 31.
29). $[(6a^5 - 7b^6 + 8c^3) + (2a^5 - 8b^6 - 10c^3)] - [(3a^5 - 4b^6 - 7c^3) + (2a^5 - b^6 - 5c^3)] =$	?	man wende zuerst für die äusseren, dann für die inneren Klammern die in der Erkl. 31 angeführten Regeln an.
30). $(3x^3 - 4xy + 2) + (5x^3 - 8x^2 + 2xy - 4) + (2x^2 + xy + y^2 + 2) =$	?	
31). $(9a^m x^2 - 13 + 20ab^3x - 4b^m cx^2) - (3b^m cx^2 + 9a^m x^2 - 6 + 3ab^3x) =$	?	
32). $(5a^4 - 7a^3b^2 - 3cd^2 + 7d) - (3a^4 - 15a^3b^2 - 7cd^2 - 3a^2)$	?	
33). $3a^2 - 5b^2 - [(7a^2 - 3b^2) - 2a^2 + 4b^2] - 7a^2 =$	?	
34). $3a^2 - [5b^2 - (2a^2 - (7a^2 - 3b^2)) - 7a^2] =$	?	die in der Erkl. 31 angeführten Regeln sind hier dreimal anzuwenden.
35). $m^4 - [2a^3 - (m^4 - a^3) + m^2] + m^2 - a^2 - [m^5 - (a^2 - m^3) - (m^5 + a^2)] =$	?	

6). Ueber die Multiplikation von Potenzen.

In Betreff der Multiplikation von Potenzen kann man, je nachdem die zu multiplizierenden Potenzen gleichbasig, gleichnamig oder gleich sind, drei Arten unterscheiden, nämlich:

1). Multiplikation **gleichbasiger** Potenzen — siehe Lehrsatz 6 —
2). Multiplikation **gleichnamiger** Potenzen — siehe Lehrsatz 7 — und
3). Multiplikation **gleicher** Potenzen — siehe die Lehrsätze 6 u. 7, besonders aber auch den Abschnitt, welcher über **wiederholte Potenzierung** handelt.

Lehrsatz 6. Gleichbasige Potenzen (d. s. solche, welche gleiche Basen haben) **werden multipliziert, indem man die gemeinschaftliche Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.**

Behaupt. $a^3 . a^2 = a^{3+2} = a^5$

oder allgemein:

$$a^n . a^m . a^r = a^{m+n+r}$$

Beweis. Nach Antw. der Frage 8, ist:

$a^3 . a^2 = a . a . a . a . a = a^5$ (s. Antw. d. Frage 2).

Dasselbe Resultat erhält man, wenn man die gemeinschaftliche Basis (a) mit der Summe der Exponenten ($3 + 2 = 5$) potenziert.

Allgemein hat man hiernach:

$$a^n . a^m . a^r = a^{n+m+r}$$

Zusatz 1. Durch Umkehrung des Lehrsatzes 6 erhält man den, besonders bei Reduktionen wichtigen Satz:

„Eine Zahl (Buchstabengrösse) wird mit einer Summe potenziert, indem man die Zahl mit jedem Summanden potenziert und die so erhaltenen Potenzen multipliziert“, in Zeichen: $a^{3+2} = a^3 . a^2$ oder allgemein: $a^{n+m+r} = a^n . a^m . a^r$

Lehrsatz 7. Gleichnamige Potenzen (d. s. solche, welche gleiche Exponenten haben) werden multipliziert, indem man das Produkt ihrer Basen mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenziert (man vergl. den Zusatz 2, Seite 9).

Behaupt. $a^3 b^3 = (ab)^3$ oder allgemein: $a^m b^m c^m = (abc)^m$

Beweis. Nach Antw. der Frage 8, ist: $a^3 b^3 = aaabbb$

Da nun in einem Produkte die Reihenfolge der einzelnen Faktoren von dem Resultate der hierdurch angedeuteten Multiplikation unabhängig ist, so kann man auch schreiben:

$a^3 b^3 = ab . ab . ab$ und hieraus erhält man nach Antw. der Frage 2:

$a^3 b^3 = (ab)^3$ oder allgemein: $a^m b^m c^m = (abc)^m$

Die Richtigkeit des vorstehenden Lehrsatzes kann auch durch Umkehrung des Lehrs. 4 (vergl. Zusatz 2, Seite 9) bewiesen werden.

Anmerkung 3. In nachstehenden Erklärungen und in den Erkl. 21, 22 und 23 sind die Hauptregeln und Sätze aus dem ersten Kapitel der Buchstabenrechnung: Die vier Species mit allgemeinen Zahlzeichen, welche sich auf die Multiplikation von allgemeinen Zahlzeichen, mithin auch auf die Multiplikation von Potenzen beziehen, kurz angedeutet.

Die sich hieran anschliessenden Uebungsbeispiele sollen zur Einübung der Multiplikation von Potenzen dienen.

Erkl. 32. Eine zusammengesetzte Grösse (ein sogenanntes Aggregat, Polynom oder auch eine sogenannte algebraische Summe) wird mit einer einfachen (einem sog. Monom) multipliziert, indem man jedes Glied der zusammengesetzten Grösse mit der einfachen multipliziert, z. B.: $(3a - 4b + 3c) . -4a = -12a^2 + 16ab - 12ac$

Erkl. 33. Eine zusammengesetzte Grösse wird mit einer andern zusammengesetzten Grösse multipliziert, indem man jedes Glied der einen mit jedem Glied der anderen zusammengesetzten Grösse multipliziert, z. B.: $(3a - 4b + 3c)(2a - d) = 6a^2 - 8ab + 6ac - 3ad + 4bd - 3cd$

Aufgabe 8. Die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Multiplikationen von Potenzen sollen nach dem Lehrsatze 6 — und soweit es die bis dahin aufgestellten Lehrsätze zulassen — ausgeführt werden.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $a^{36} . a^{17} = a^{36+17} =$	a^{53}	. . . man beachte den Lehrsatz 6.
2). $a^7 . a^5 =$	?	
3). $b^4 . b^3 =$	?	
4). $a^7 . a^8 . a^{14} =$	?	
5). $m^3 . m = m^{3+1} =$	m^4	. . . man beachte Antw. der Frage 2.
6). $c^8 . c =$	?	
7). $x^n . x^3 =$	?	
8). $y^n . y =$	?	
9). $a^{x-y} . a^y = a^{x-y+y} =$	a^x	
10). $z^{n-1} z =$	?	
11). $x^n . x =$	?	
12). $y^{n-1} y =$	?	
13). $y . y^{n-2} . y = y^{1+n-2+1} = y^{2+n-2} =$	y^n	
14). $x^{p-q+r} . x^{p+q-r} =$	?	
15). $p^n . p^n =$	?	
16). $q^{m-n} . q^n =$	?	
17). $c^{4-x} . c^5 =$	?	
18). $q^{2n} . q^{3-n} =$	?	
19). $m^x . m^{5-2x} =$	?	
20). $3a^2 . 2a^3 . 5a^8 = 3 . 2 . 5 . a^2 . a^3 . a^8 = 30a^{2+3+8} =$	$30a^{13}$	. . man multipliziere erst die Koeffizienten und dann die Potenzen.
21). $3a^4 . 5a^7 =$	?	
22). $3a^2 . 2a^3 . 5a^8 =$	?	
23). $2a^3 . 3a^2 =$	?	
24). $5x^3 . 8x =$	?	
25). $5a^3 . a^7 . 7a^5 . 3a^6 =$	?	
26). $7a^3 . -5a^6 = -7 . 5 . a^3 . a^6 = -35a^{3+6} =$	$-35a^9$	. . man beachte die Erkl. 21.
27). $x^2 . -3x^3 =$	?	
28). $-x^7 \cdot -2x^8 \cdot -x =$	?	
29). $-x^n . 2x^{n-1} \cdot -5x^{9-2n} =$	?	
30). $a^{27} . a^{36} . b^9 . b^{10} . a^3 . b^4 = a^{27+36+3} . b^{9+10+4} =$	$a^{66} b^{23}$	. . man multipliziere nach dem Lehrsatze 6 nur die Potenzen, welche gleiche Basen haben.
31). $a^4 . b . a^8 . b^3 =$	?	
32). $a^7 . a^8 . a^{14} b^9 . b^{12} . c^3 . a^5 . b^{15} . c^{11} . a^{15} . c^{19} =$	?	
33). $x^3 . y^3 . x^{n-2} . y^{n-4} = x^{3+n-2} . y^{3+n-4} =$	$x^{n+1} y^{n-1}$	
34). $a^{3x} b^{4y} a^x b^y =$	?	
35). $5a^2x^4 . 2a^3x^5 = 10a^{2+3} x^{4+5} =$. .	$10a^5x^9$	
36). $5ax^2 . 3a^3x^4y^5 . 6x^2y^6 =$	?	
37). $5a^nx^4 . 2a^3x^ny^5 . 6x^2y^6 =$	?	

Uebungbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

38). $6a^9 . 7b^{15} . 3a^{27} . 9b^{31} . 12 . a . 13 . b = \;.\; ?$

39). $a^{2m-6} . b^{2m-n+4} . a^{7-2m+3n} . b^{12-2m+n} = ?$

40). $\frac{5}{9}a^2 \cdot b \cdot \frac{2}{7}ab^3 = \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{7}a^{2+1}b^{1+3} = \frac{10}{63}a^3b^4$. . . Brüche werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

41). $\frac{5}{9}a^2bx . \frac{6}{7}ab^3y^n \cdot \frac{4}{5}a^nbx^ny = \;.\;.\;.\; ?$

42). $6x^3y^4 \cdot -4x^5y^7 = -24x^{3+5}y^{4+7} = -24x^8y^{11}$. . man beachte die Erkl. 21.

43). $2a^3b^5 . -6a^8b^4 \cdot -5a^3b^2 = \;.\;.\;.\;.\; ?$

44). $\frac{3}{4}a^5b^3c^2 \cdot -\frac{2}{3}a^3b^4c^5 = \;.\;.\;.\;.\;.\; ?$

45). $5a^3b^4 . 10a^2b^5c \cdot -3a^7 = \;.\;.\;.\;.\;.\; ?$

46). $7a^6b^3c^5 \cdot -3a^5b^4c^8 \cdot -4a^4b^2c^5 = \;.\;.\; ?$

47). $\frac{5a^3b^4}{c^5} \cdot 7ab^5 = \frac{5a^3b^4 . 7ab^5}{c^5} = \;.\;.\; \frac{35a^4b^9}{c^5}$. . Ein Quotient (Bruch) wird mit einer Zahl multipliziert, indem man den Dividend (Zähler) mit dieser Zahl multipliziert und den Divisor (Nenner) unverändert beibehält.

48). $\frac{3m^2b^4}{a^2} \cdot -6mb^2 = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; ?$. . . man beachte die Erkl. 21.

49). $\frac{7a^3}{5b^2} \cdot -\frac{3a^4}{4b^3} = -\frac{7a^3 . 3a^4}{5b^2 . 4b^3} = \;.\; -\frac{21a^7}{20b^5}$. . man beachte die Andeutung, welche bei dem Beispiel 40 steht.

50). $\frac{7a^mb^n}{3c^{3m}} \cdot -\frac{5a^nb^2}{2c^4d^3} = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; ?$

51). $\frac{3a^2b^4}{4c^3d} \cdot -\frac{8a^3b}{2cd} = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; ?$

52). $(x-y)^2 . (x-y)^3 = (x-y)^{2+3} = (x-y)^5$. . . Ein in eine Klammer eingeschlossener Ausdruck hat man stets als eine einzige Grösse zu betrachten.

53). $(a-b)^n . (a-b)^2 . (a-b)^3 = \;.\;.\;.\; ?$

54). $(x-y)^{n-2} . (x-y)^n . (x-y)^{m+1} = \;.\; ?$

55). $4(a^2-b)^5 . 3(a^2-b)^4 = 4 . 3(a^2-b)^{5+4} = 12(a^2-b)^9$

56). $4(a^2-b^3)^5 . 3(a^2-b^3)^4 = \;.\;.\;.\;.\;.\;. ?$

57). $(x+y)^p \cdot -(x+y)^q = \;.\;.\;. -(x+y)^{p+q}$

58). $(a-b)^{n-1} \cdot -2(a-b) = \;.\;.\;.\;.\;.\; ?$

59). $2(a-b)^2 . -(a-b)^{n-3} = \;.\;.\;.\;.\; ?$

60). $\frac{3(x^6+y^3)^2}{5a^2} . \frac{2(x^6+y^3)^3}{7a^3b^n} = \frac{6(x^6+y^3)^5}{35a^5b^n}$. . man beachte die Andeutungen, welche bei den Beispielen 40 und 52 stehen.

61). $\frac{(a+b)^5b^3}{2} . \frac{(a+b)^2 . b^2}{4} = \;.\;.\;.\; ?$

62). $\frac{(x+y)^8a^8}{m} . -\frac{b^2(x+y)^3}{m^3} = \;.\;.\;.\; ?$

63). $\frac{a^mb^{x-2y}}{(m-n)^3} \cdot -\frac{a^2b^x}{2(m-n)^5} = \;.\;.\;.\; ?$

64). $\frac{a^{5m-n}b^{7x-3y}}{3m+2n} . \frac{a^{3n-2m}b^{6y-5x}}{2x+3y} = .\;.\; ?$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

65). $\frac{5x^{m+4}y^{3n+2} . z^4}{7(a+b)^{3+4m}} . - \frac{2x^{7+3m}y^{5m}z}{3(a+b)^4} = . \quad ?$

66). $(a^3 - 3a^2b^5 + 4b^2) . 5a^2b^3 = 5a^5b^3 - 15a^4b^8 + 20a^2b^5$. . . man beachte die Erkl. 32 u. 21.

67). $(2a^5b^4 - 3a^2c + 7ac^4) . 4a^2bc = \quad . \; . \; . \; ?$

68). $(a^2 - 3ab - 5b^2) . 4a^2b = \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; ?$

69). $(2a + 3b - 4c^3) \cdot - a^2b^2c^2 = -2a^3b^2c^2 - 3a^2b^3c^2 + 4a^2b^2c^5$

70). $(2a^3b^5 - 5a^2c^6 + 9a^3b^2c^3) \cdot - 3a^2bc^2 = \; . \; ?$

71). $(3a^5 - 5a^2b^3 + 7b^2) \cdot - 2ab^2 = \; . \; . \; . \; . \; ?$

72). $(2ab^2c^3 - 3a^2b^3c - 5a^3bc^2) \cdot - 4a^2b^3c^4 = \quad ?$

73). $\left(\frac{3a^2}{5b^3} - \frac{7a^3}{2b^4} - \frac{5f^4}{2b^4d}\right) \cdot - \frac{2af^3}{7d} = \; . \; . \; ?$. . man beachte die Erkl. 32, die Erkl. 21 u. die Andeutung zu Beispiel 40.

74). $\left(\frac{7a^{m+2}b^{3n+4}}{5c^{4p+3}d} - \frac{4a^5b^{2n+3}}{3c^7d^3}\right) \cdot - \frac{2a^{5m}b^{2m+1}}{6c^5d^n} = ?$

75). $(a^6 - 3a^4b^2 + 5a^2b^4) . (7a^4 - 4a^2b^2 + b^4) =$
$7a^{10} - 21a^8b^2 + 35a^6b^4 - 4a^8b^2 + 12a^6b^4 -$
$20a^4b^6 + a^6b^4 - 3a^4b^6 + 5a^2b^8 = 7a^{10} -$
$25a^8b^2 + 48a^6b^4 - 23a^4b^6 + 5a^2b^8$ man beachte die Erkl. 33 u. addiere die gleichen Buchstabengrössen.

76). $(a^4 + 2a^3b + 8ab^3 + 16b^4)(a^2 - 2ab + 4b^2) = ?$

77). $(3a^2 - 5ab + 6b^2) . (2a^2 - 4ab - 5b^2) = \quad ?$

78). $(5a^2 - 9ab + 7b^2) . (3a^3 - 8a^2b - 2ab^2) = ?$

79). $(6a^3 - 3ab + 4b^3)(5a^2b - 3a^3) = \; . \; . \; . \; ?$

80). $(8a^2 - 20ab + 5ab^2)(2a - 5b) = \; . \; . \; . \; ?$

81). $(x^6 - 5x^4y^2 + 3x^2y^4) . (8x^4 - 7x^2 . y^2 + y^4) = ?$

82). $(a^4 - a^2b^2 + b^4) . (a^2 + b^2) = \; . \; . \; . \; . \; . \; ?$

83). $(x^9 + x^6 + x^3 + x) . (x^3 - 1) = \; . \; . \; . \; . \; ?$

84). $(x^3 - 3x - 7) . (x - 2) = \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; ?$

85). $(4a^2 - 16ax + 3x^2) . (5a^3 - 2a^2x) = \; . \; . \; ?$

86). $(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) . (x^2 + 1) = \; . \; . \; ?$

87). $(7a^2 + ab - 6b^2) . (6a^2 - ab - 5b^2) = \; . \; . \; ?$

88). $(a^{3n} - a^{2n+m} + a^{n+2m} - a^{3m}) . (a^n + a^m) =$
$a^{4n} - a^{3n+m} + a^{2n+2m} - a^{n+3m} + a^{3n+m} -$
$a^{2n+2m} + a^{n+3m} - a^{4m} = a^{4n} - a^{4m}$

89). $(a^{3m-n} + a^{2m} + a^{n+2m} - a^{3m})(a^n + a^m) = ?$

90). $(2a^2 + b^2 - 3c^2) . (3a^2 + 2b^2 - c^2) . (a^2 - 4b^2 + 3c^2) = ?$. . man multipliziere zuerst die zwei ersten Klammerwerte, vereinfache den erhaltenen Ausdruck und multipliziere denselben mit dem zweiten Klammerwert.

91). $(2a^3 - 3b^2)(2a^2 - 3b^3)(4a^4 + 9b^6) = \; . \; . \; ?$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:

92). $[mx^4+(m-n)x^3+(m-n+p)x^2+(m-n)x+m]\cdot(x-1) = \ldots\ldots$? . . man führe zuerst die in der eckigen Klammer stehenden angedeut. Multiplikationen aus, reduziere den erhaltenen Ausdruck und multipliziere denselben alsdann mit dem anderen Klammerwert $(x-1)$ und reduziere, wenn möglich.

93). $[2x^4-(1-a)x^3+(1-a+b)x^2-(1-a)x+2]\cdot(x+1) = \ldots\ldots$?

94). $a(a-b)^3 \cdot a^{n-1}b(a-b)^{n-3} \cdot a^2 \cdot b^{n-1} = a^{1+n-1+2}b^{1+n-1}(a-b)^{3+n-3} = a^{n+2}b^n(a-b)^n$. . man multipliziere nach dem Lehrsatz 6 die Potenzen, welche gleiche Basen haben.

95). $(b-x)^{n-1} \cdot y^5x^3(b-x)^{n-2}x^{n-1}y(b-x)^3x^{n-2}y^n = ?$

96). $m^nb(-x)^3 \cdot m^2b^n(-x)^6 \cdot m^{n-2}b^{5-n}(-x)^5 = m^{n+2+n-2}b^{1+n+5-n}(-x)^{3+6+5} = m^{2n}b^6(-x)^{14} = \ldots\ldots\; m^{2n}b^6x^{14}$. . man beachte den Lehrsatz 3.

97). $\left(\frac{a^2}{b^3}+\frac{2c^3d^4}{b^5}-\frac{7c^2}{2a^4b^3}\right)\cdot\left(\frac{a^2}{b^3}-\frac{2c^3d^4}{b^5}+\frac{7c^2}{2a^4b^3}\right) = ?$. man beachte die Andeutung zu Beispiel 40.

98). $\left(\frac{4a^3b^4}{4m^5}-\frac{5ab^3}{2m^2}+\frac{6a^3b^2}{5m^4}\right)\cdot\left(\frac{3a^3b^4}{4m^5}+\frac{5ab}{2m^2}-\frac{6ab}{2m}\right) = ?$

99). $\left(\frac{5}{2}x^2+3ax-\frac{3}{4}a^2\right)\cdot\left(4x^2-2ax-\frac{1}{2}a^2\right) = ?$

100). $(a+b)(a+b) = a^2+ab+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2$. . man vergl. die in dem Abschnitt: **Potenzierung von mehrgliedrigen Grössen** aufgestellten Formeln.

101). $(a-b)(a-b) \ldots\ldots$?

102). $(a+b)(a+b)(a+b) = \ldots\ldots$?

103). $(a+b+c)(a+b+c) = \ldots\ldots$?

104). $(2a^2-3b^3)(2a^2-3b^3) = \ldots\ldots$?

105). $(a+b)(a-b) = a^2+ab-ab+b^2 = a^2-b^2$

106). $(3a^2+5bc)\cdot(3a^2-5bc) = \ldots\ldots$?

107). $(a^n+b^n)\cdot(a^n-b^n) = \ldots\ldots$?

Aufgabe 9. Die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Multiplikationen von Potenzen, sollen nach dem Lehrsatze 7 — und soweit es die bis dahin aufgestellten Lehrsätze zulassen — ausgeführt werden.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:

1). $(2a)^m \cdot (3b)^m = (2a \cdot 3b)^m = \ldots\; (6ab)^m$. . man beachte den Lehrsatz 7.

2). $\left(\frac{a^7}{b^y}\right)^m \cdot (b^y)^m \cdot a^m = \left(\frac{a^7 \cdot b^y \cdot a}{b^y}\right)^m = (a^7 \cdot a)^m = (a^8)^m$

3). $\left(\frac{a}{b^7}\right)^m \cdot (b^7)^m \cdot a^m = \ldots\ldots$?

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
4). $\left(\frac{ab}{c^9 . d^{11}}\right)^m . (c^9 . d^{11})^m . a^m = \ldots\ldots$	?	
5). $(3a-4b)^m . (2a-3b)^m = [(3a-4b)(2a-3b)]^m = [6a^2-8ab-9ab+12b^2]^m = (6a^2-17ab+12b^2)^m$		
6). $(9a^2-6b)^x . (3a-2b)^x = \ldots\ldots$	?	
7). $(3a-4b)^n . (9a^2+16b)^n . (3a-4b)^n = .$	?	
8). $\left(\frac{a+b}{c-d}\right)^m . \left(\frac{c-d}{a}\right)^m = \left(\frac{a+b}{c-d} \cdot \frac{c-d}{a}\right)^m = \left(\frac{(a+b)(c-d)}{(c-d).a}\right)^m = \ldots\ldots$	$\left(\frac{a+b}{a}\right)^m$	
9). $\left(\frac{a+b}{z-x}\right)^m . \left(\frac{z+x}{a+b}\right)^m . \left(\frac{z-x}{a-b}\right)^m = \ldots$	?	
10). $(4a+3b)^m (4a-3b)^m . (16a^2+9b^2)^m = .$	?	
11). $((25a)^m+(2b)^m) . ((4c)^m-(5d)^m) = (25a)^m . (4c)^m + (2b)^m . (4c)^m - (25a)^m . (5d)^m + (2b)^m . (5d)^m = (25a . 4c)^m + (2b . 4c)^m - (25a . 5d)^m + (2b . 5d)^m = (100ac)^m + (8bc)^m - (125ad)^m + (10bd)^m . \ldots$		man beachte zunächst die Erkl. 22 und dann den Lehrsatz 7.
12). $((3a)^x-(5b)^x) . ((4b)^x+(2a)^x) = \ldots$	?	
13). $(6^x-1) . (20^x+5^x-2^x) = \ldots\ldots$	?	
14). $5^7 . 2^7 = (5 . 2)^7 = 10^7 = \ldots$	10000000	
15). $25^9 . 4^9 = \ldots\ldots$	?	
16). $2^6 . 5^6 = \ldots\ldots$	?	
17). $6^4 . 5^4 = \ldots\ldots$	?	
18). $8^2 . 5^2 = \ldots\ldots$	?	
19). $77^7 . 6^7 = \ldots\ldots$	?	
20). $2^6 . 5^6 . 10^6 = \ldots\ldots$	?	
21). $\left(1\frac{1}{2}\right)^4 . \left(6\frac{2}{3}\right)^4 = \left(1\frac{1}{2} \cdot 6\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{20}{3}\right)^4 = 10^4 = \ldots\ldots$	10000	
22). $\left(1\frac{3}{7}\right)^{10} . \left(1\frac{2}{5}\right)^{10} = \ldots\ldots$	?	
23). $\left(7\frac{1}{2}\right)^5 . \left(1\frac{1}{3}\right)^5 = \ldots\ldots$	?	
24). $19^3 . 4^3 . \left(\frac{1}{19}\right)^3 . 5^3 = \ldots\ldots$	?	

7). Ueber die Division von Potenzen.

In Betreff der Division von Potenzen kann man, je nachdem die zu dividierenden Potenzen gleichbasig, gleichnamig oder gleich sind, drei Arten unterscheiden, nämlich:

1). Division **gleichbasiger** Potenzen — siehe Lehrsatz 8 —

2). Division **gleichnamiger** Potenzen — siehe Lehrsatz 9 — und

3). Division **gleicher** Potenzen — siehe Lehrsatz 10. —

Lehrsatz 8. Gleichbasige Potenzen (d. s. solche, welche gleiche Basen haben) **werden dividiert, indem man von dem Exponenten des Dividenden (Zählers) den des Divisors (Nenners) subtrahiert und die so erhaltene Differenz der gemeinschaftlichen Basis als Potenzexponent zuschreibt** (man beachte hierbei den Zusatz 1).

Behaupt. $a^5 : a^2 = \frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$

oder allgemein:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

(man beachte hierbei die Zusätze 1, 2 und 3).

Beweis. Nach Antw. der Frage 8, ist:

$$a^5 : a^2 = \frac{a^5}{a^2} = \frac{a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a}{a \,.\, a}$$

Da nun der Wert eines Bruches (Quotienten) unverändert bleibt, wenn man Zähler und Nenner (Dividend und Divisor) mit ein und derselben Zahl dividiert, und ein Produkt durch eine Zahl dividiert wird, indem man einen Faktor desselben durch diese Zahl dividiert, so kann man auch schreiben:

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, 1}{a \,.\, 1} \text{ oder:}$$

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \,.\, a \,.\, a \,.\, 1 \,.\, 1}{1 \,.\, 1}$$

mithin erhält man:

$\frac{a^5}{a^2} = a \,.\, a \,.\, a$ oder nach Antw. der Frage 2:

$$\frac{a^5}{a^2} = a^3$$

Dasselbe Resultat hätte man erhalten, wenn man die gemeinschaftliche Basis a mit der Differenz $(5 - 2) = 3$ potenziert hätte.

Allgemein hat man hiernach:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$ (man beachte die Zusätze 1, 2 und 3).

Zusatz 1. Bei der Division **gleichbasiger** Potenzen kann man folgende **drei Fälle** unterscheiden:

1). der Exponent des Dividenden (Zählers) ist **grösser** als der Exponent des Divisors (Nenners);

2). der Exponent des Dividenden (Zählers) ist **gleich** dem Exponenten des Divisors (Nenners) und

3). der Exponent des Dividenden (Zählers) ist **kleiner** als der Exponent des Divisors (Nenners).

Im 1. Falle beachte man den Lehrsatz 8,
im 2. " " " " Zusatz 2 und
im 3. " " " " Zusatz 3.

Zusatz 2. In dem Falle in welchem die Exponenten der zu dividierenden gleichbasigen Potenzen einander **gleich** sind, hat man zu beachten, dass diese Potenzen alsdann **gleiche** Potenzen sind und dass **gleiche** Potenzen in einander dividiert stets den Quotienten **Eins** (1) ergeben — man vergl. hiermit den Lehrsatz 10. —

z. B.: $a^3 : a^3 = \frac{a^3}{a^3} = 1$

$a^m : a^m = \frac{a^m}{a^m} = 1$

Zusatz 3. Wollte man in dem Falle, in welchem der Exponent des Dividenden (Zählers) **kleiner** als der Exponent des Divisors (Nenners) ist,

z. B. bei $a^3 : a^5$ oder bei $\frac{a^3}{a^5}$

den Lehrsatz 8 anwenden, so würde man:

a^{3-5} oder a^{-2},

nämlich eine Potenz mit **negativem** Exponenten erhalten. Da aber (bis jetzt) nach der Antwort der Frage 10 einer Potenz nur dann einen Sinn beiwohnt, wenn der Exponent eine **positive** ganze Zahl ist, so muss ein Resultat, wie das vorstehende in welchem Potenzen mit **negativen** Exponenten vorkommen, vermieden werden; **vorstehender Lehrsatz 8**

hat daher zunächst nur dann Gültigkeit, wenn der Exponent des Dividenden (Zählers) **grösser als der Exponent des Divisors** (Nenners) **ist.**

Beachtet man ferner, dass der Wert eines Quotienten (Bruches) **unverändert** bleibt, wenn man Dividend (Zähler) und Divisor (Nenner) mit ein und derselben Grösse dividiert, so kann man für den 3ten Fall in dem Zusatze 1 die Regel aufstellen:

Hat man gleichbasige Potenzen zu dividieren und ist der Exponent des Dividenden (Zählers) **kleiner als der Exponent des Divisors** (Nenners), **so dividiere man Dividend und Divisor** (bezw. Zähler und Nenner) nach dem Lehrsatze 8 und dem Zusatze 2, **durch den Dividenden** (bezw. den Zähler), d. h. **man kürze** (hebe) **den gegebenen Quotienten.**

Hat man z. B.: $a^3 : a^5$ oder $\frac{a^3}{a^5}$ so schreibe man hierfür:

$$\frac{a^3 : a^3}{a^5 : a^3}$$

Führt man nun nach dem Zusatze 2 und dem Lehrsatze 8 die angedeuteten Divisionen aus, so erhält man:

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{a^3 : a^3}{a^5 : a^3} = \frac{1}{a^2}$$

Analog erhält man, für:

$\frac{a}{a^n}$ den Quotienten: $\frac{a : a}{a^n : a}$ oder: $\frac{1}{a^{n-1}}$

Zusatz 4. Durch Umkehrung des Lehrsatzes 8 erhält man den, besonders **bei Reduktionen** wichtigen Satz:

„**Eine Zahl** (Buchstabengrösse) **wird mit einer Differenz potenziert, indem man sie einmal mit dem Minuenden, ein andermal mit dem Subtrahenden potenziert und die erstere Potenz durch die letztere dividiert**“, in Zeichen: $a^{5-3} = \frac{a^5}{a^3}$ **oder allgemein:**

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

Lehrsatz 9. Gleichnamige Potenzen (d. s. solche, welche gleiche Exponenten haben) **werden dividiert, indem man die Basen dividiert und den so erhaltenen Quotienten mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenziert** (man vgl. den Zusatz 1 des Lehrsatzes 5, Seite 11).

Behaupt. $a^3 : b^3 = \frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$

oder allgemein:

$$a^m : b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Beweis. Nach Antw. der Frage 8, ist:

$$a^3 : b^3 \text{ oder } \frac{a^3}{b^3} = \frac{a.a.a}{b.b.b}$$

Da nun Brüche miteinander multipliziert werden, indem man die Zähler miteinander und auch die Nenner miteinander multipliziert und das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner dividiert, so kann man auch schreiben:

$$a^3 : b^3 = \frac{a^3}{b^3} = \frac{a.a.a}{b.b.b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$$

und hieraus erhält man nach Antwort der Frage 2:

$$a^3 : b^3 = \frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

oder allgemein:

$$a^m : b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Die Richtigkeit des vorstehenden Lehrsatzes kann auch durch Umkehrung des Lehrs. 5 (Seite 10) bewiesen werden.

Lehrsatz 10. Gleiche Potenzen (das sind solche, welche gleiche Basen und gleiche Exponenten haben) **in einander dividiert, geben stets Eins** (1) **zum Quotienten.**

Behaupt. $a^3 : a^3 = \frac{a^3}{a^3} = 1$

oder allgemein:

$$a^m : a^m = \frac{a^m}{a^m} = 1$$

Beweis. Nach Antw. der Frage 8, ist:

$$\frac{a^3}{a^3} = \frac{a.a.a}{a.a.a}$$

Dividiert man Zähler und Nenner des Bruches $\frac{a.a.a}{a.a.a}$ dreimal durch a, so erhält man:

$$\frac{a^3}{a^3} = \frac{a.a.a}{a.a.a} = \frac{1.1.1}{1.1.1} \text{ oder:}$$

$$\frac{a^3}{a^3} = \frac{1}{1} = 1$$

Hiernach ist allgemein:

$$a^m : a^m = \frac{a^m}{a^m} = 1$$

Zusatz 1. Nach dem Lehrsatze 8, ist:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$$

und nach dem Lehrsatze 10, ist:

$$\frac{a^m}{a^m} = 1.$$ Hieraus folgt, dass:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^0 = 1,$$ bezw. dass:

$a^0 = 1$ ist.

Mithin kann man sagen:

Jede Potenz mit dem Exponenten Null ist = Eins,

d. h. man kann die Zahleneinheit als Symbol der 0ten Potenz irgend einer endlichen Zahl betrachten und umgekehrt.

Man vergl. hierüber den Abschnitt, welcher über: **„Potenzen mit dem Exponenten Null und mit negativen Exponenten“** handelt. —

Anmerkung 4. In nachstehenden Erklärungen sind die Hauptregeln und Sätze aus dem ersten Kapitel der Buchstabenrechnung: **Die 4 Species mit allgemeinen Zahlzeichen,** welche sich auf die Division von allgemeinen Zahlzeichen, mithin auch auf die **Division von Potenzen** beziehen, kurz angedeutet.

Die sich hieran anschliessenden Uebungsbeispiele sollen zur Einübung der Division von Potenzen dienen.

Erkl. 34. Werden zwei Grössen ineinander dividiert, so erhält man ein **positives** Resultat, wenn die Vorzeichen gleich (nämlich beide = + oder beide = —) sind; man erhält ein **negatives** Resultat, wenn die Vorzeichen ungleich (nämlich das eine = +, das andere = — ist) sind.

z. B.:

$$\frac{+a^3}{+b^2} = +\frac{a^3}{b^2}$$

$$\frac{-a^3}{-b^2} = +\frac{a^3}{b^2}$$

$$\frac{-a^3}{+b^2} = -\frac{a^3}{b^2}$$

$$\frac{+a^3}{-b^2} = -\frac{a^3}{b^2}$$

Erkl. 35. Ein Produkt wird durch eine Grösse dividiert, indem man irgend einen Faktor jenes Produktes durch diese Grösse dividiert.

Hat man z. B.: $a^2 . b^3 c : b^2$ oder: $\frac{a^2 b^3 c}{b^2}$ so erhält man nach nebenstehender Erklärung:

$a^2 . \frac{b^3}{b^2} \cdot c$ und nach dem Lehrsatze 8:

$a^2 b c$

Erkl. 36. Eine **zusammengesetzte Grösse** (ein sogenanntes Aggregat, Polynom oder auch eine sogenannte algebraische Summe) wird mit einer

einfachen (einem sog. Monom) dividiert, indem man **jedes** Glied der zusammengesetzten Grösse durch die einfache dividiert, z. B.: . .

1). . $(15a^8 - 3a^7 + 18a^9) : 3a^3 = \frac{15a^8}{3a^3} - \frac{3a^7}{3a^3} + \frac{18a^9}{3a^3}$

wenn man die Koeffizienten in den einzelnen Brüchen hebt und die angedeuteten Divisionen von Potenzen nach dem Lehrsatze 8 ausführt, so erhält man $= 5a^5 - a^4 + 6a^6$

2). $\frac{6b^5 - 9b^4 - 18b^6}{3b^3} = \frac{6b^5}{3b^3} - \frac{9b^4}{3b^3} - \frac{18b^6}{3b^3} = 2b^2 - 3b - 6b^3$

Erkl. 37. Eine **zusammengesetzte Grösse** wird durch eine andere **zusammengesetzte** Grösse dividiert, indem man zuerst **beide** Grössen alphabetisch, bezw. lexikographisch **ordnet**, alsdann mit dem ersten Gliede des Divisors in das erste Glied des Dividenden dividiert, den so erhaltenen (und reduzierten) Quotienten mit dem ganzen Divisor multipliziert und dieses Produkt von dem Dividenden subtrahiert (d. h. die Zeichen wechselt und addiert). Nachdem der erhaltene Rest wieder geordnet ist, so dividiere man wieder mit dem ersten Gliede des Divisors in das erste Glied des neuen Dividenden, multipliziere den erhaltenen Quotienten mit dem ganzen Divisor und subtrahiere das erhaltene Produkt von dem neuen Dividenden (d. i. jetzt der vorhin erhaltene Rest); ordne den neuen Rest wieder und verfahre wie vorher, bis die Division aufgeht — vergl. nebenstehende Beispiele 1 und 2. — Geht die Division nicht auf, so erhält man als Quotienten eine **unendliche Reihe von Gliedern** — vergl. nebenstehendes Beispiel 3. —

Beispiel 1.

$(21bd - 42ad - 15bc + 30ac) : (5c - 7d)$

hierfür erhält man nach alphabetischer und lexikographischer Ordnung:

$(30ac - 42ad - 15bc + 21bd) : (5c - 7d)$

und dies schreibt man am besten in folgender Divisionsform und verfährt alsdann wie in nebenstehender Erklärung angegeben ist:

$$\begin{array}{llll|l}
\multicolumn{4}{c|}{\text{Dividend}} & \text{Divisor} \\
30ac & - 42ad & - 15bc & + 21bd & 5c - 7d \\
30ac & - 42ad & & & 6a - 3b \\
- & + & & & \text{Quotient} \\
\hline
 & & - 15bc & + 21bd & \\
 & & - 15bc & + 21bd & \\
 & & + & - & \\
\hline
 & & " & " & (\text{Rest} = 0)
\end{array}$$

Beispiel 2.

$(48x^6y^4 - 25x^8y^2 - 23x^4y^6 + 7x^{10} + 5x^2y^8) :$
$(5x^2y^4 + x^6 - 3x^4y^2)$

hierfür erhält man nach alphabetischer und lexikographischer Ordnung [oder was dasselbe sagt: **nach fallenden Potenzen der Grösse** x **geordnet**]:

$7x^{10} - 25x^8y^2 + 48x^6y^4 - 23x^4y^6 + 5x^2y^8) :$
$(x^6 - 3x^4y^2 + 5x^2y^4$

und dies schreibt man am besten in folgender Divisionsform und verfährt alsdann wie in nebenstehender Erklärung angegeben ist:

$$\begin{array}{lllll|l}
\multicolumn{5}{c|}{\text{Dividend}} & \text{Divisor} \\
7x^{10} & - 25x^8y^2 & + 48x^6y^4 & - 23x^4y^6 & + 5x^2y^8 & x^6 - 3x^4y^2 + 5x^2y^4 \\
7x^{10} & - 21x^8y^2 & + 35x^6y^4 & & & 7x^4 - 4x^2y^2 + y^4 \\
- & + & - & & & \text{Quotient} \\
\hline
 & - 4x^8y^2 & + 13x^6y^4 & - 23x^4y^6 & + 5x^2y^8 & \\
 & - 4x^8y^2 & + 12x^6y^4 & - 20x^4y^6 & & \\
 & + & - & + & & \\
\hline
 & & x^6y^4 & - 3x^4y^6 & + 5x^2y^8 & \\
 & & x^6y^4 & - 3x^4y^6 & + 5x^2y^8 & \\
 & & - & + & - & \\
\hline
 & & " & " & " & (\text{Rest} = 0)
\end{array}$$

Beispiel 3.

$$a:(a-1) \text{ oder } \frac{a}{a-1}$$

Derartige Divisionen werden wie vorstehende Beispiele ausgeführt, da man den Dividenden (Zähler) ebenfalls als eine Summe, nämlich als $a + 0$ betrachten kann.

Analog den vorstehenden Beispielen und der Erkl. 37 erhält man:

Dividend: a | Divisor: $a - 1$

$$a : (a-1) = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots \textit{ in infinitum}$$

(Quotient gibt eine unendl. Reihe)

$$\begin{array}{l} a \\ \underline{a - 1} \\ - \quad + \\ \hline 1 \\ \underline{1 - \frac{1}{a}} \\ - \quad + \\ \hline \frac{1}{a} \dots \\ \underline{\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}} \\ - \quad + \\ \hline \frac{1}{a^2} \dots \\ \underline{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3}} \\ - \quad + \\ \hline \frac{1}{a^3} \end{array}$$

Zu $\frac{1}{a}$: $\left(\frac{1}{a} : a = \frac{1}{a \cdot a} = \frac{1}{a^2}\right.$, vergl. das 3. Glied im Quotienten)

Zu $\frac{1}{a^2}$: $\left(\frac{1}{a^2} : a = \frac{1}{a^2 \cdot a} = \frac{1}{a^3}\right.$ vergl. das 4. Glied im Quotienten)

$\frac{1}{a^3}$ geht niemals ohne Rest auf.

Aufgabe 10. Die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Divisionen von Potenzen sollen nach dem Lehrsatze 8 — und soweit es die bis dahin aufgestellten Lehrsätze zulassen — ausgeführt werden:

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} =$	a^2	. . . man beachte den Lehrsatz 8.
2). $a^{13} : a^7 = a^{13-7} =$	a^6	. . . " " " " 8.
3). $\frac{b^9}{b^6} =$	?	
4). $a^8 : a^5 =$	?	
5). $c^7 : c^5 =$	?	
6). $\frac{a^n}{a^2} = a^{n-2} =$	a^{n-2}	
7). $\frac{c^8}{c} = c^{8-1} =$	c^7	. . . man beachte, dass der Potenzexponent 1 meistens nicht geschrieben und gelesen wird.
8). $\frac{-b^n}{b^4} = -\frac{b^n}{b^4}$ u. s. w.	?	. . . man beachte die Erkl. 34.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
9). $m^n : m^3$	?	
10). $\frac{-a^7}{-a} = + \frac{a^7}{a}$ u. s. w.	?	. . man beachte die Erkl. 34.
11). $a^{10} : a =$	?	
12). $-a^n : a =$	?	
13). $\frac{x^n}{x} =$	?	
14). $\frac{x^3}{-x^n} = - \frac{x^3}{x^n}$ u. s. w.	?	
15). $y^5 : y^m =$	?	
16). $\frac{c^{7x}}{c^{2x}} = c^{7x-2x} =$	c^{5x}	
17). $\frac{x^{3m}}{x^{2m}} =$	?	
18). $a^{5n} : a^n =$	?	
19). $\frac{a^{7m}}{-a^m} =$	?	
20). $\frac{(x+y)^p}{(x+y)^q} =$	$(x+y)^{p-q}$	. . . man beachte, dass die gemeinschaftliche Basis $(x+y)$ ist.
21). $\frac{(x-y)^3}{(x-y)^2} =$	?	
22). $(a+b)^5 : (a+b)^2 =$	?	
23). $(a-b)^n : (a-b) =$. . .	$(a-b)^{n-1}$	
24). $\frac{(m+n)^5}{(m+n)} =$	?	
25). $\frac{(p-q)^n}{(p-q)} =$	?	
26). $\frac{a^{n-2}}{-a^3} = -a^{n-2-3} =$. .	$-a^{n-5}$	
27). $\frac{-a^{x+1}}{-a^2} =$	?	
28). $\frac{a^{x+1}}{a} =$	?	
29). $x^{n+2} : x^3 =$	?	
30). $(x+y)^{m+2} : (x+y)^m =$	?	
31). $\frac{x^{n+1}}{-x^3} = - \frac{x^{n+1}}{x^3}$ u. s. w. . .	?	

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

32). $\dfrac{a^5}{a^{1-n}} = a^{5-(1-n)} = a^{5-1+n} = \ldots a^{4+n} \ldots$

man beachte, dass der Exponent des Nenners eine **zusammengesetzte** Grösse ist, folglich bei angedeuteter Subtraktion in eine Klammer eingeschlossen werden muss. Wird die Subtraktion ausgeführt, so beachte man, dass, wenn vor einer Klammer ein Minuszeichen steht, dasselbe mit der Klammer weggelassen werden kann, sobald man die Vorzeichen in der Klammer in die entgegengesetzten verwandelt.

33). $\dfrac{x^3}{x^{3-n}} = \ldots\ldots\ldots\ldots ?$

34). $m^3 : m^{3-n} = \ldots\ldots\ldots ?$

35). $\dfrac{x^5}{x^{3-n}} = x^{1-(3-n)} = x^{1-3+n} = \ldots x^{n-2}$

36). $a : a^{1-n} = \ldots\ldots\ldots\ldots ?$

37). $\dfrac{m^{x-1}}{m^{x-2}} = m^{x-1-(x-2)} = m^{x-1-x+2} = m^1 = m$

38). $\dfrac{x^{3+a}}{x^{a-3}} = \ldots\ldots\ldots\ldots ?$

39). $a^{n-1} : a^{1-n} = \ldots\ldots\ldots ?$

40). $\dfrac{-a^{8+x}}{a^{17-x}} = \ldots\ldots\ldots ?$

41). $\dfrac{24x^{3m}}{6x^m} = \dfrac{24}{6}x^{3m-m} = \ldots\ldots 4x^{2m} \ldots$

haben die Potenzen Koeffizienten (Faktoren) bei sich, so dividiere man dieselben für sich und die Potenzen für sich.

42). $\dfrac{-15x^{12}}{-3x^5} = \ldots\ldots\ldots ?$

43). $\dfrac{33a^{p-q}}{11a^{2q-p}} = \ldots\ldots\ldots\ldots ?$

44). $\dfrac{15(a^2-b^3)^7}{3(a^2-b^3)^4} = \ldots\ldots\ldots ?$

45). $20p^{3-n} : -5p^{4-2n} = \ldots\ldots\ldots ?$

46). $\dfrac{7}{3}a^3 : \dfrac{2}{3}a = \dfrac{7a^3}{3} : \dfrac{2a}{3} = \dfrac{7a^3 . 3}{3 . 2a} = \ldots \dfrac{7}{2}a^2 \ldots$

Brüche werden dividiert, indem man den Divisorbruch umkehrt und multipliziert (Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner).

47). $\dfrac{\frac{4}{5}a^5}{\frac{3}{5}a^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots ?$

48). $\dfrac{1}{2}(x+y)^n : \dfrac{3}{4}(x+y)^{n+2} = \ldots\ldots ?$

49). $\dfrac{5}{7}(a-b)^{n+3} : \dfrac{3}{8}(a-b)^{n-5} = \ldots\ldots ?$

50). $\dfrac{9}{10}(a^2-b^3)^5 : \dfrac{2}{5}(a^2-b^3)^{5-n} = \ldots\ldots ?$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

51). $\frac{m^5}{m^{12}} = \frac{m^5 : m^5}{m^{12} : m^5} = \frac{1}{m^{12-5}} = \ldots \frac{1}{m^7}$. . . man beachte die Zusätze 3 und 2, Seite 23, indem man derartige Quotienten (Brüche) abkürzt, hebt, bezw. Zähler und Nenner durch den Zähler dividiert.

52). $\frac{a^3}{a^9} = \ldots ?$

53). $m^3 : m^{11} = \ldots ?$

54). $\frac{a^{3x}}{a^{5x}} = \frac{a^{3x} : a^{3x}}{a^{5x} : a^{3x}} = \frac{1}{a^{5x-3x}} = \ldots \frac{1}{a^{2x}}$

55). $\frac{a}{a^n} = \frac{a : a}{a^n : a} = \ldots \frac{1}{a^{n-1}}$

56). $y : y^{12} = \ldots ?$

57). $\frac{a^x}{a^{3y-2x}} = \ldots ?$

58). $\frac{-a^7}{+a^9} = -\frac{a^7 : a^7}{a^9 : a^7} = -\frac{1}{a^{9-7}} = -\frac{1}{a^2}$. . . man beachte die Erkl. 34.

59). $\frac{a^x}{-a^{x-y}} = -\frac{1}{a^{x+y} : a^x} = -\frac{1}{a^{x+y-x}} = -\frac{1}{a^y}$

60). $\frac{-x^2}{x^{n+1}} = \ldots ?$

61). $\frac{x}{-x^{n+1}} = \ldots ?$

62). $-a^3 : a^{x+2} = \ldots ?$

63). $\frac{n^{y-1}}{-n^y} = -\frac{n^{y-1} : n^{y-1}}{n^y : n^{y-1}} = -\frac{1}{n^{y-(y-1)}} =$

$-\frac{1}{n^{y-y+1}} = -\frac{1}{n^1} = \ldots -\frac{1}{n}$

64). $\frac{p^{x-y}}{p^x} = \ldots ?$

65). $\frac{-v^{x-2}}{v^{x+3}} = \ldots ?$

66). $\frac{(x+y)^3}{(x+y)^7} = \ldots ?$

67). $\frac{16 . a^3}{4 . a^7} = \frac{4a^3}{a^7} = \frac{4a^3 : a^3}{a^7 : a^3} = \frac{4 . 1}{a^{7-3}} = \frac{4}{a^4}$. . . man dividiere die Koeffizienten für sich.

68). $\frac{-3 . m^{n+2}}{-18 . m^{n+5}} = \ldots ?$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

69). $\frac{24a^{7+2x}}{8a^{3x-7}} = \ldots\ldots\ldots ?$

70). $\frac{\frac{7}{3}a^3}{\frac{5}{2}a^7} = \frac{7a^3 . 2}{3 . 5a^7} = \frac{14a^3 : a^3}{15a^7} = \frac{14}{15a^4}$

71). $\frac{\frac{1}{4}a^5}{\frac{3}{4}a^7} = \ldots\ldots\ldots ?$

Aufgabe 11. Folgende Ausdrücke sollen — soweit es die bis zu dem Lehrsatze 9 aufgestellten Lehrsätze, Regeln etc. zulassen — reduziert, d. h. auf ihre einfachste Form gebracht werden:

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $\frac{a^7b^2}{a^2b^6} = \frac{a^5 . b^2}{1 . b^6} = \frac{a^5 . 1}{1 . b^4} = \ldots \frac{a^5}{b^4} \ldots$

ein Quotient (Bruch) wird reduziert, indem man hebt, d. h. Zähler und Nenner mit ein und derselben Grösse dividiert. Kommen Potenzen vor, so hat man den Lehrsatz 8, bezw. die Zusätze 2 u. 3 desselben zu beachten.

2). $\frac{x^7y}{x . y^5} = \ldots\ldots\ldots ?$

3). $\frac{x^ny}{x . y^n} = \ldots\ldots\ldots ?$

4). $\frac{a^mb^{m+1}}{a^2b^m} = \frac{a^{m-2} . b^{m+1-m}}{1 . 1} = a^{m-2}b^1 = a^{m-2}b$

5). $\frac{a^{m+1}b^{n-1}}{a^mb^{2n}} = \ldots\ldots\ldots ?$

6). $\frac{a^3b^4c^5}{a^2b^5c^4} = \ldots\ldots\ldots ?$

7). $\frac{a^2b^3c^4}{a^4b^3c^6} = \ldots\ldots\ldots ?$

8). $\frac{m^8n^7o^5}{n^5m^4o^9} = \ldots\ldots\ldots ?$

9). $\frac{(a-1)^4(x-y)^5}{(x-y)^9(a-1)^3} = \ldots\ldots\ldots ?$

10). $a^6b^4x^5 : a^9b^7x^2 = \ldots\ldots\ldots ?$

11). $\frac{12a^5b^3c^4}{3a^2b^3c^7} = \ldots\ldots\ldots ?$

12). $\frac{24a^7c^4b^5}{8a^7c^4b^7} = \ldots\ldots\ldots ?$

13). $\frac{72x^6y^7z^9}{18x^9y^{10}z^9} = \ldots\ldots\ldots ?$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

14). $108a^7b^{n+1}c^5 : 12a^8b^3c^{10} = \ldots\ldots$?

15). $\dfrac{x^3(m-n)^p}{x^n(m-n)^3} = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

16). $30a^{4m}b : 6a^{3m}b^n = \ldots\ldots\ldots$?

17). $\dfrac{a^{5x-1}b^{7y+1}c^{3z}}{a^5b^{9y-5}c^{7z-3}} = \ldots\ldots\ldots$?

18). $\dfrac{4a^3x^4}{3b^2y^2} \cdot \dfrac{6ay^3}{7x^4} = \dfrac{4a^3}{b^2} \cdot \dfrac{2ay}{7} = \ldots \dfrac{8a^4y}{7b^2} \ldots$

19). $\dfrac{2a^8x^7}{3b^8} \cdot \dfrac{5a^4b^5}{4c^4x^6} = \ldots\ldots\ldots$?

20). $\dfrac{15bc^3}{8a^6d^2} \cdot \dfrac{2cd}{3ab} = \ldots\ldots\ldots$?

21). $\dfrac{2a^8x^7}{3b^8} \cdot \dfrac{5a^4b^5}{4c^4x^{16}} \cdot \dfrac{18ab^2c^3}{5a^4x} = \dfrac{2.5.18a^{13}x^7b^{\cdot}c^3}{3.4.5b^8c^4x^{17}a^4} = \dfrac{3a^9}{bcx^{10}}$

22). $\dfrac{2a^5x^5}{3b^2y^4} \cdot \dfrac{6ay^3}{5b^2x^4} \cdot \dfrac{by}{4a^2x^2} = \ldots\ldots$?

23). $\dfrac{15bc^3}{8a^6d} \cdot \dfrac{2cd^2}{3ab} \cdot \dfrac{8a^7b^4}{c^3d^4} = \ldots\ldots$?

Da Brüche multipliziert werden, indem man die Zähler miteinander und auch die Nenner miteinander multipliziert und ersteres Produkt durch letzteres dividiert, so kann man entweder zuerst kürzen (heben) und dann die Multiplikation ausführen, oder erst die Multiplikation ausführen und dann kürzen; je nachdem das eine oder das andere am raschesten zum Ziele führt.

24). $\dfrac{m^{4a+b} \,.\, n^{6a-3b}}{m^{2a-6b} \,.\, n^{7b+16a}} \cdot \dfrac{m^{12b-3a}}{m^{14b-12a}} = \dfrac{m^{a+13b}\, n^{6a-3b}}{m^{8b-10a}\, n^{7b+16a}} = \dfrac{m^{a+13b-(8b-10a)}}{n^{7b+16a-(6a-3b)}} =$

$$\dfrac{m^{a+13b-8b+10a}}{n^{7b+16a-6a+3b}} = \dfrac{m^{11a+5b}}{n^{10a+10b}} = \dfrac{m^{11a+5b}}{n^{10(a+b)}}$$

25). $\dfrac{x^{m+3n}\,y^{7m-8n}}{x^{4m-7n}\,y^{3m-11n}} \cdot \dfrac{x^{2m-6n}\,y^{5m+6n}}{x^{6m-17n}\,y^{2m+4n}} =$?

26). $\dfrac{a^{x-1}b^{x-2}c^{x-3}}{x^{n-1}y^{n-2}z^{n-3}} \cdot \dfrac{x^{n+1}y^{n-2}z^{n+4}}{a^{x-2}b^{x+1}c^{x-1}} \cdot \dfrac{a^2c^2}{b^2x^2} =$?

27). $\dfrac{2a^3d}{2b^5} : \dfrac{b^3}{4a^2c^7} = \dfrac{2a^3d \,.\, 4a^2c^7}{2b^5 \,.\, b^3} = \dfrac{4a^5c^7d}{b^8} \ldots$

28). $\dfrac{a^2x^5z^4}{b^3y^2} : \dfrac{a^5x^7z}{b^8y^5} = \dfrac{a^2x^5z^4 \,.\, b^8y^5}{b^3y^2 \,.\, a^5x^7z} = \dfrac{b^5y^3z^3}{a^3x^2}$

Brüche werden dividiert, indem man den Divisorbruch umkehrt und multipliziert.

29). $\dfrac{2x^7y^4}{5} : \dfrac{3x^2y^3}{4} = \ldots\ldots\ldots$?

30). $\dfrac{4a^{9m}b^{8n}}{5c^{10p}} : \dfrac{7a^{5m}c^{6p}}{b^{10n}} = \ldots\ldots\ldots$?

31). $\dfrac{2a^3b^7c^4}{3x^3y^4z^3} : \dfrac{4a^2b^8c^5}{10x^2y^7z^4} = \ldots\ldots\ldots$?

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

32). $\frac{12a^7x^5y}{5b^3cz^4} : \frac{24a^9xy}{15bc^2z^5} = \ldots\ldots\ldots$?

33). $\frac{5a^3b^5c^{n+1}}{6x^3y^nz^{n+4}} : \frac{3a^6b^4c}{8x^4yz^{n-1}} = \ldots\ldots$?

34). $\frac{a^{3x-y}b^{2y-3x}}{a^{3y-2x}b^{5x-2y}} : \frac{a^{7x-y}b^{7y-6x}}{a^{3x+2y}b^{3x+2y}} = \ldots$?

35). $\frac{2x^{3n-5m}y^{2n-3}}{7a^mb^3c} : \frac{4x^{1-5m}}{3ab^{n-1}y^5} = \ldots\ldots$?

36). $\frac{3a^3b^5}{4} : 2ab^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$? . . . dem Divisor $2ab^3$ denke man sich den Nenner 1 beigeschrieben.

37). $\frac{7a^3b^2}{5c^4} : 6a^8b^4c^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

38). $4x^3y^2 : \frac{2x^4y^2}{3z^5} = \ldots\ldots\ldots\ldots$? . . . dem Dividenden $4x^3y^2$ denke man sich den Nenner 1 beigeschrieben.

39). $\frac{5a^7}{7b^3x^5} : \left(\frac{15a^4b^2}{16x^5y^2} : \frac{21a^2x^3}{48b^3y^5}\right) =$. . . man dividiere erst die in der Klammer stehenden Brüche und dann verfahre man weiter wie in den vorhergehenden Beispielen.

$$\frac{5a^7}{7b^3x^5} : \frac{15a^4b^2 . 48b^3y^5}{16x^5y^2 . 21a^2x^3} =$$

$$\frac{5a^7 . 16x^5y^2 . 21a^2x^3}{7b^3x^5 . 15a^4b^2 . 48b^3y^5} = \ldots ?$$

40). $\frac{a^3b^7}{c^2x^6} : \left[\left(\frac{a^7x^3}{b^4c^2} : \frac{c^3x^5}{a^4b^3}\right) : \frac{a^5x^2}{b^5c^4}\right] = \ldots$?

41). $\frac{a^{15}}{b^5y^{11}} : \left\{\frac{a^4y^{16}}{b^{13}} : \left[\left(\frac{b^7y^5}{a^4} : \frac{b^5}{a^3y^5}\right) : \left(\frac{a^3b^{11}}{y^7} : \frac{b^2y^5}{a^3}\right)\right]\right\} = \ldots$?

42). $\left(\frac{2a^2c^3}{5b^3} - \frac{20b^3c}{6a^5} + \frac{20}{c^4}\right) \cdot - \frac{4b^2c^5}{a^3} = \ldots$? . . . man beachte die Erkl. 21 und 32 und dann den Lehrsatz 8.

43). $\left(\frac{2a^2c^3}{5b^3} - \frac{2b^3}{7c^3} + \frac{a}{3}\right) \cdot \left(\frac{a^2c^2}{3b^2} - \frac{2ab}{9c}\right) =$? . . . man beachte die Erkl. 33 und dann den Lehrsatz 8.

44). $\left(\frac{3a^2c^3}{4b^2} + \frac{2}{3b} - \frac{4}{a^2c^3}\right) \cdot \left(\frac{abc^2}{3} + \frac{3b^2}{a^2}\right) =$?

45). $\left(\frac{a^3}{b^2} - \frac{2a^2b}{cd^2} + \frac{4bc}{3a^2} + \frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{b^3}{a} - \frac{cd}{ab} + \frac{2ab}{cd}\right) = \ldots$?

46). $(15a^8 - 3a^7 + 18a^9) : 3a^3 = \frac{15a^8}{3a^3} - \frac{3a^7}{3a^3} + \frac{18a^9}{3a^3}$. . . man beachte zuerst die Erkl. 36 u. 34 und dann den Lehrsatz 8.

$$= 5a^5 - a^4 + 6a^6$$

47). $(8a^6b^4 - 7a^3b^5 + 9a^5b^8c^3) : 2a^5b^5 = \ldots$?

48). $(3a^2b^3 - 2a^3c + 4a^3c^4) : -6a^3b^3c^3 = \ldots$?

49). $(10x^4y^3z^5 + 15x^2y^4z - 6xyz^4) : 30x^2y^3z^4 =$?

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

50). $(9a^7b^5c^3 - 4a^9b^7 + 6a^{11}b^{15}c^4) : 36a^4b^3c^2 = \ ?$

51). $(15m^{4x}n^{8y} - 3m^{6x}n^{7y} + 6m^{10x}n^{2y}) : 3m^{3x}n^{2y} = ?$

52). $(a^{3x-4y} + a^{2y-3x} - a^{3(x-y)}) : a^{4x-5y} = \ .\ .\ ?$

53). $(a^{2n-m} + a^{3m-2n} - a^{4m-3n}) : a^{m-6n} = \ .\ .\ ?$

54). $\left(\frac{56a^4}{7b^4} - \frac{4b^3c^7}{15a^2} + \frac{8a^3c^{12}}{5b^6}\right) : \frac{8a^3c^5}{45b^6} = \ .\ .\ ?$

55). $\left(\frac{7x^2y^2}{3z^4} - \frac{3x^3y^3}{4z^5} + \frac{9x^8y}{z}\right) : -\frac{2x^4y^3}{3z^5} = \ .\ .\ ?$

. . . man beachte die Erklärung 34, dann berücksichtige man, dass Brüche dividiert werden, indem man den Divisorbruch umkehrt und multipliziert, und schliesslich reduziere man nach Lehrsatz 8.

56). $(15a^3 + a^2b - 31ab^2 + 15b^3) : (5a - 3b) = \ ?$

. . . man beachte die Erkl. 37, indem man zunächst untersucht, ob Divisor und Dividend alphabetisch und lexikographisch, bezw. nach Potenzen eines u. desselben Buchstabens geordnet sind (ist dies nicht der Fall, so muss dies zuerst geschehen), dann verfahre analog, wie in den Beispielen 1 und 2, Seite 27, angegeben ist.

$$
\begin{array}{l|l}
15a^3 + a^2b - 31ab^2 + 15b^3 & 5a - 3b \\
\underline{15a^3 - 9a^2b} & \overline{3a^2 + 2ab - 5b^2} \\
\quad - \quad\ + & \\
\qquad 10a^2b - 31ab^2 + 15b^3 & \\
\qquad \underline{10a^2b - 6ab^2} & \\
\qquad\ - \quad\ + & \\
\qquad\qquad -25ab^2 + 15b^3 & \\
\qquad\qquad \underline{-25ab^2 + 15b^3} & \\
\qquad\qquad\ + \qquad\ - & \\
\qquad\qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot &
\end{array}
$$

57). $(4a^3 + 4a^2 - 29a + 21) : (2a - 3) = \ .\ .\ ?$

58). $(8x^6 - 36x^4 + 54x^2 - 27) : (2x^2 - 3) = \ .\ ?$

59). $(16a^4 - 81b^4) : (2a - 3b) = \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ?$

60). $(45a^7 - a^6 - 53a^5 + 20a^4) : (4a - 5a^2) = \ ?$. . . der Divisor muss erst geordnet werden.

61). $(6a^3 + 5a^2b - 13ab^2 - 12b^3) : (4b + 3a) = \ ?$

62). $(a^9b^3 - 31a^6b^6 + 6a^{12} + 8b^{12} - 14a^3b^9) : (-3a^3b^3 + 2a^6 - 4b^6) = ?$. . . Divisor und Dividend müssen beide erst geordnet werden.

63). $(49b^4 - 58a^2b^2 + 9a^4) : (-7b^2 - 4ab + 3a^2) = \ ?$

64). $(25a^6b^4 - 30a^5b^6 + 9a^4b^8) : (-3a^2b^4 + 5a^3b^2) = ?$

65). $(12a^{10}c^5 - 27a^6b^2c^3 + 18a^4b^3c^2 - 3a^2b^4c) : (2a^4c^2 - 3a^2bc + b^2) = ?$

66). $(a^7 - 12a^5b^2 - 64ab^6 + 48a^3b^4) : (6a^3b + a^4 + 12a^2b^2 + 8ab^3) = \ ?$

67). $\frac{2}{5}a^2 - \frac{1}{5}ab - 2b^2) : (-3b + \frac{6}{5}a) = \ .\ .\ .\ ?$

$$
\begin{array}{l|l}
\frac{2}{5}a^2 - \frac{1}{5}ab - 2b^2 & \frac{6}{5}a - 3b \\
\underline{\frac{2}{5}a^2 - ab} & \overline{\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b} \\
\quad - \quad\ + & \\
\qquad \frac{4}{5}ab - 2b^2 & \\
\qquad \underline{\frac{4}{5}ab - 2b^2} & \\
\qquad\ - \qquad + & \\
\qquad\quad \cdot \qquad\ \cdot &
\end{array}
$$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

68). $\left(\frac{a^4}{3} - \frac{a^2c^2}{3} + \frac{a^2c}{6} - \frac{c^3}{6} - \frac{a^2d}{3} + \frac{c^2d}{3}\right) : \left(\frac{a^2}{3} - \frac{c^2}{3}\right) = ?$

69). $\left(\frac{a^4}{6b} - \frac{a^3c}{10m} + \frac{ac}{3b^2} - \frac{c^2}{5bm} - \frac{a}{3bm} + \frac{c}{5m^2}\right) : \left(\frac{a}{3b} + \frac{c}{5m}\right) = ?$... Bei der Untersuchung, ob **geordnet** ist, hat man in den Aufgaben 68 bis 72 nur die Zähler der einzelnen Brüche in Betracht zu ziehen.

70). $\left(\frac{9x^4y^8}{16z^6} - \frac{25x^6}{9z^2} - \frac{80x^5yz^2}{3} - 64x^4y^2z^6\right) : \left(\frac{3x^2y^4}{4z^3} + \frac{5x^3}{3z} + 8x^2yz^3\right) = ?$

71). $\left(\frac{9m^6n^8}{16p^{10}} - \frac{25m^2n^6}{4p^4} + \frac{6m^4n^5}{p^5} - \frac{36m^6n^4}{25p^6}\right) : \left(\frac{3m^3n^4}{4p^5} - \frac{5mn^3}{2p^2} + \frac{6m^3n^2}{5p^3}\right) = ?$... man ordne nach Potenzen von n.

72). $\left(\frac{18x^9y^6}{5z^9} - \frac{201x^2y^5}{25z^3} - \frac{4x^7y^2}{25z^4} - \frac{9x^2y^5}{z^3} + \frac{201y^4z^3}{10x^5} + \frac{2yz^2}{5}\right) : \left(\frac{6x^3y^2}{5z^3} - \frac{3yz^3}{x^4}\right) = ?$ man ordne nach Potenzen von y.

73). $(4a^{m+6}b^{6n} + 16a^6b^{3n}c^{3n} + 32a^{6-2m}c^{6n} - 16a^{6-3m}c^{6n}) : (2a^{m+3}b^{3n} + 4a^{3-m}c^{3n}) = ?$ man ordne nach Potenzen von a.

74). $(9a^{2m}b^{2n} - 12a^{m+2}b^{n+1} + 18a^{m+n}b^{m+n} + 4a^4b^2 - 12a^{n+2}b^{m+1} + 9a^{2n}b^{2m}) :$

$(3a^mb^n - 2a^2b + 3a^nb^m) = \;.\;.\;.\;.\; ?$. . . ist geordnet.

75). $\left(27y^{4m+8n} - 6y^{2m+4n} + \frac{1}{3}\right) : \left(3y^{2m+4n} + 2y^{m+2n} + \frac{1}{3}\right) = ?$. . . ist geordnet.

76). $(m^{x+y}n^y - 4m^{x+y-1}n^{2y} - 27m^{x+y-2}n^{3y} + 42m^{x+y-3}n^{4y}) : (m^xn^y - 7m^{x-1}n^{2y}) = ?$ untersucht man in Betreff der Ordnung nach den Potenzen von n, so findet man, dass Divisor und Dividend nach **steigenden Potenzen** von n geordnet sind.

77). $(a^4 - b^4) : (a - b) = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; ?$

78). $(x^6 - y^6) : (x - y) = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; ?$

79). $(x^4 - 1) : (x - 1) = (x^4 - 1^4) : (x - 1) = \;.\; ?$

80). $(x^6 - 1) : (x - 1) = (x^6 - 1^6) : (x - 1) = \;.\; ?$

Da diese Divisionen von Aggregaten ohne Rest aufgehen, so kann man hierbei den Satz aufstellen:

1). **„Die Differenz zweier gleichen geraden Potenzen ist stets ohne Rest teilbar durch die Differenz ihrer Basen."**

81). $(x^6 - y^6) : (x + y) = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; ?$

82). $(a^4 - b^4) : (a + b) = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; ?$

83). $(x^6 - 1) : (x + 1) = (x^6 - 1^6) : (x + 1) = \;.\; ?$

Nach ausgeführter Division kann man den Satz aufstellen:

2). **„Die Differenz zweier gleichen geraden Potenzen ist stets ohne Rest teilbar durch die Summe ihrer Basen."**

84). $(x^7 + y^7) : (x + y) = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; ?$

85). $(a^5 + b^5) : (a + b) = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; ?$

86). $(x^5 + 1) : (x + 1) = (x^5 + 1^5) : (x + 1) = \;.\; ?$

Nach ausgeführter Division kann man den Satz aufstellen:

3). **„Die Summe zweier gleichen ungeraden Potenzen ist stets ohne Rest teilbar durch die Summe ihrer Basen."**

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:

87). $(x^5 - y^5) : (x - y) = \ldots\ldots\ldots$?

88). $(a^5 - b^5) : (a - b) = \ldots\ldots\ldots$?

89). $(x^5 - 1) : (x - 1) = (x^5 - 1^5) : (x - 1) =$?

Nach ausgeführter Division kann man den Satz aufstellen:

4). **„Die Differenz zweier gleichen ungeraden Potenzen ist stets ohne Rest teilbar durch die Differenz ihrer Basen.“**

90). $(a^4 + b^4) : (a + b) = \ldots\ldots\ldots$?

91). $(x^6 + 1) : (x + 1) = (x^6 + 1^6) : (x + 1) =$?

92). $(x^4 + y^4) : (x - y) = \ldots\ldots\ldots$?

Diese Divisionen gehen nicht auf, daher der Satz:

5). **„Die Summe zweier gleichen geraden Potenzen ist weder durch die Summe noch durch die Differenz ihrer Basen ohne Rest teilbar.“**

93). $(a^6 + b^6) : (a^2 + b^2) = \ldots\ldots\ldots$?

94). $(a^6 - b^6) : (a^2 - b^2) = \ldots\ldots\ldots$?

Vorstehende Sätze 1). bis 4). finden besondere Anwendungen bei Faktorenzerlegungen, bezw. bei Reduktionen.

95). $\left(\frac{3ab}{5cd}\right)^4 \cdot \left(\frac{5c}{4a}\right)^3 \cdot \left(\frac{4b}{3d}\right)^2 =$

$$\frac{3^4a^4b^4}{5^4c^4d^4} \cdot \frac{5^3c^3}{4^3a^3} \cdot \frac{4^2b^2}{3^2d^2} = \frac{3^2 . ab^6}{5 . 4 . cd^2} = \frac{9ab^6}{20cd^2}$$

. . . bei dieser und ähnlichen Aufgaben führe man nach dem Lehrsatze 5 zunächst die angedeuteten Potenzierungen aus und verfahre weiter wie in vorhergegangenen Beispielen.

96). $(ab)^2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^3 = \ldots\ldots\ldots$?

97). $\left(\frac{6a}{b}\right)^4 \cdot \left(\frac{b}{4a}\right)^2 \cdot \frac{b^2}{(3a)^3} = \ldots\ldots$?

98). $\left(-\frac{2}{3}ab\right)^5 \cdot \left(\frac{6a}{5b}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3b}{8a}\right)^3 = \ldots$? . . . man beachte den Lehrsatz 3.

99). $\left(-\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{c}\right) \cdot \left(-\frac{c}{d}\right)^3 = \ldots\ldots$?

100). $\frac{(3xy)^2 . (4xz)^3 . (5yz)^4}{(25xyz)^2 . (6xyz)^4} = \ldots\ldots$?

101). $\frac{28^3}{21^2} = \frac{(4 . 7)^3}{(3 . 7)^2} = \frac{4^3 . 7^3}{3^2 . 7^2} = \frac{4^3 . 7}{3^2} = \frac{448}{9}$

. . . man zerlege nach dem Lehrsatze 4 die einzelnen Potenzen so, dass man Potenzen mit gleichen Grundzahlen erhält, dann reduziere man.

102). $\frac{32^4}{48^3} = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

103). $\frac{54^5}{72^4} = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

104). $\frac{25^3 . 72^2}{9^3 . 20^4} = \frac{(5 . 5)^3 . (4 . 9 . 2)^2}{9^3 . (4 . 5)^4} = \frac{5^3 . 5^3 . 4^2 . 9^2 . 2^2}{9^3 . 4^4 . 5^4}$

$$= \frac{5^3 . 2^2}{9 . 4^2 . 5} = \frac{5^2 . 4}{9 . 4^2} = \frac{25}{9 . 4} = \frac{25}{36}$$

105). $\frac{18^4 . 30^5}{27^3 . 15^3} = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

106). $\frac{28^3 . 45^4}{36^2 . 35^5} = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

Aufgabe 12. Folgende Ausdrücke sollen nach dem Lehrsatze 9 (teilweise auch nach dem Lehrsatze 10) — und soweit es die bis dahin aufgestellten Lehrsätze zulassen — reduziert, d. h. auf ihre einfachste Form gebracht werden:

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $\frac{15^3}{5^3} = \left(\frac{15}{5}\right)^3 = 3^3 = \ldots\ldots$	27	. . . man beachte den Lehrsatz 9.
2). $\frac{12^7}{4^7} = \ldots\ldots$	?	
3). $35^5 : 7^5 = \ldots\ldots$	?	
4). $9^5 . 17^5 : 51^5 = (9 . 17)^5 : 51^5 = \left(\frac{9 . 17}{51}\right)^5$	$= 3^5$	. . . man beachte zuerst den Lehrsatz 7, dann den Lehrsatz 9.
5). $\frac{24^4 . 2^4}{8^4 . 3^4} = \ldots\ldots$	?	
6). $36^3 : 60^3 . 3^3 = \ldots\ldots$	?	
7). $\frac{30^2}{6^2} \cdot \frac{30^4}{15^4} = \left(\frac{30}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{30}{15}\right)^4 = 5^2 . 2^4 =$	?	
8). $\left(\frac{6}{35}\right)^4 : \left(2\frac{6}{7}\right)^4 = \left(\frac{6}{35} : 2\frac{6}{7}\right)^4 = \left(\frac{6}{35} : \frac{20}{7}\right)^4 = \left(\frac{6 . 7}{35 . 20}\right)^4 = \left(\frac{3}{50}\right)^4$		
9). $\left(1\frac{2}{3}\right)^5 : \left(2\frac{1}{6}\right)^5 = \ldots\ldots$	?	
10). $\left(2\frac{5}{6}\right)^2 : \left(4\frac{3}{8}\right)^2 \cdot \left(3\frac{1}{4}\right)^2 = \ldots\ldots$	?	
11). $\left(\frac{7a^2}{3b}\right)^m : \left(\frac{14a}{15b^3}\right)^m = \left(\frac{7a^2}{3b} : \frac{14a}{15b^3}\right)^m = \left(\frac{7a^2 . 15b^3}{3b . 14a}\right)^m = \left(\frac{5ab^2}{2}\right)^m$		. . . man beachte zuerst Lehrsatz 9.
12). $\left(\frac{3a^2b^3c^4}{5d^5e^6f^7}\right)^m : \left(\frac{9a^4b^2c}{25d^6e^7f^2}\right)^m = \ldots\ldots$	?	
13). $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{x}\right)^n = \ldots\ldots$	?	
14). $\left(\frac{a^2}{x^3}\right)^n \cdot \left(\frac{c^2}{y^3}\right)^n : \left(\frac{ac^2}{x^2y^3}\right)^n = \left(\frac{a^2}{x^3} \cdot \frac{c^2}{y^3} : \frac{ac^2}{x^2y^3}\right)^n = \left(\frac{a^2c^2}{x^3 . y^3} \cdot \frac{x^2y^3}{ac^2}\right)^n = \left(\frac{a}{x}\right)^n$		

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

15). $\left(\frac{a+b}{x+y}\right)^3 \cdot \left(\frac{a-b}{x-y}\right)^3 : \left(\frac{a-b}{x+y}\right)^3 = \left(\frac{a+b}{x+y} \cdot \frac{a-b}{x-y} : \frac{a-b}{x+y}\right)^3 =$

$\left[\frac{(a+b)(a-b) \, . \, (x+y)}{(x+y)(x-y) \, . \, (a-b)}\right]^3 = \left(\frac{a+b}{x-y}\right)^3$

16). $\left(\frac{a-x}{x-y}\right)^3 \cdot \left(\frac{x-b}{x+a}\right)^3 : \left(\frac{(a-x)(x-b)}{(x-y)(x-a)}\right)^3 = ?$

17). $\left(\frac{m-n}{n-p}\right)^4 \cdot \left(\frac{n-p}{m-n}\right)^4 : \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^4 = \quad . \quad ?$

18). $\frac{5648^4}{2824^4} : \frac{n^3}{4^3 m^3} = \quad . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad ?$

19). $(5a^2+8ab-21b^2)^x : (a+3b)^x = \left(\frac{5a^2+8ab-21b^2}{a+3b}\right)^x$

oder $= \quad (5a-7b)^x$ wenn man die durch

$\frac{5a^2+8ab-21b^2}{a+3b}$

angedeutete Division von Aggregaten, wie folgt ausführt:

$$\begin{array}{r|l} 5a^2+8ab-21b^2 & a+3b \\ \cline{2-2} 5a^2+15ab \quad\quad\;\; & 5a-7b \\ -\quad - \quad\quad\quad\;\; & \\ \hline -7ab-21b^2 & \\ -7ab-21b^2 & \\ + \quad\;\; + \;\; & \\ \hline \cdot \quad\quad \cdot \;\; & \end{array}$$

20). $(49x^2-36y^2)^m : (7x-6y)^m = \, . \, . \, . \, . \quad ?$

21). $\frac{28^3 \, . \, 45^4}{36^4 \, . \, 35^3} = \left(\frac{28}{35}\right)^3 \cdot \left(\frac{45}{36}\right)^4 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^4 =$. . . analog den Beispielen 101 bis 106 in der Aufgabe 11.

$\frac{4^3 \, . \, 5^4}{5^3 \, . \, 4^4} = \frac{5}{4}$

22). $\frac{18^4 \, . \, 30^5}{27^4 \, . \, 15^5} = \quad . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad ?$

23). $\frac{36^3 \, . \, 25^4 \, . \, 32^5}{16^5 \, . \, 10^4 \, . \, 18^3} = \quad . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad ?$

Aufgabe 13. Die in nachstehenden Uebungsbeispielen angeführten Brüche sollen addiert, bezw. **gleichnamig** gemacht werden.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $\frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x^7} + \frac{1 \, . \, x}{x^6 \, . \, x} + \frac{1 \, . \, x^6}{x \, . \, x^6} =$. . . man beachte, dass der Nenner x^7 der Hauptnenner ist, indem alle übrigen Nenner darin enthalten sind.

$\frac{1}{x^7} + \frac{x}{x^7} + \frac{x^6}{x^7} = \frac{1+x+x^6}{x^7}$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

2). $\frac{1}{x^3}+\frac{1-x}{x^4}=\frac{1\,.\,x}{x^3.\,x}+\frac{1-x}{x^4}=\frac{x}{x^4}+\frac{1-x}{x^4}=\frac{x+1-x}{x^4}=\frac{1}{x^4}$

3). $\frac{1-x^3}{x^5}+\frac{1}{x^2}=$?

4). $\frac{1-x^3}{x^2}+\frac{1}{x^5}=\frac{(1-x^3)\,.\,x^3}{x^2\,.\,x^3}+\frac{1}{x^5}=$

$\frac{x^3-x^6}{x^5}+\frac{1}{x^5}=\frac{x^3-x^6+1}{x^5}$

5). $\frac{1-x^3}{x^5}+\frac{1-x^2}{x^4}+\frac{1}{x^2}=$?

6). $\frac{1-x^2}{x^8}+\frac{1+x}{x^6}-\frac{1}{x^5}=$?

7). $\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n-1}}=\frac{1}{x^n}+\frac{1\,.\,x}{x^{n-1}\,.\,x}=$. . . man beachte, dass der Nenner x^n der Hauptnenner ist, da der andere Nenner x^{n-1} in demselben enthalten ist.

$\frac{1}{x^n}+\frac{x}{x^n}=\frac{1+x}{x^n}$

8). $\frac{1}{x^n}-\frac{1}{x^{n-p}}=$?

9). $\frac{1}{x^n}-\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^{n-2}}=$?

10). $\frac{1+x}{x^n}+\frac{1-x}{x^{n-1}}-\frac{1}{x^{n-2}}=$?

11). $\frac{x^{n-1}}{(x+y)^{m-1}}-\frac{x^n}{(x+y)^m}=\frac{x^{n-1}(x+y)}{(x+y)^{m-1}(x+y)}-\frac{x^n}{(x+y)^m}$. . . man beachte, dass der Nenner $(x+y)^m$ der Hauptnenner ist.

$=\frac{x^n+x^{n-1}y}{(x+y)^m}-\frac{x^n}{(x+y)^m}$

$=\frac{x^n+x^{n-1}y-x^n}{(x+y)^m}=\frac{x^{n-1}y}{(x+y)^m}$

12). $\frac{y^n}{(y-z)^n}-\frac{y^{n-1}}{(y-z)^{n-1}}=$?

13). $\frac{b}{a^{x-y}}+\frac{c}{a^{x-z}}+\frac{d}{a^{x-u}}-\frac{e}{a^x}=$. ? . . . der Hauptnenner ist: a^x

14). $\frac{y^2}{(x-y)^n}+\frac{x}{(x-y)^{n-1}}-\frac{1}{(x-y)^{n-2}}=$?

15). $\frac{1-2x^2}{x^p}+\frac{2-3x^2}{x^{p-2}}+\frac{3}{x^{p-4}}=$. . . ?

8). Ueber die Potenzen von Potenzen.

(Wiederholte Potenzierung.)

Hat man mehrere **gleiche** Potenzen mit einander zu multiplizieren, z. B.

$$a^5 . a^5 . a^5 . a^5$$

so nennt man ein solches Produkt gleicher Potenzen (Faktoren), entsprechend der Antwort der Frage 1, **eine Potenz von einer Potenz** und schreibt dies nach Antwort der Frage 2 $= (a^5)^4$.

Die in einem Ausdrucke, wie $(a^5)^4$ angedeutete Operation heisst **wiederholte Potenzierung.**

In Betreff der wiederholten Potenzierung (der Multiplikation gleicher Potenzen) beziehungsweise der Potenzierung einer Potenz, beachte man nachstehenden Lehrsatz:

Lehrsatz 11. **Eine Potenz wird nochmals potenziert, indem man die Basis jener Potenz mit dem Produkte der Exponenten potenziert.**

Behaupt. $(a^4)^3 = a^{4 \cdot 3} = a^{12}$

oder allgemein:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Beweis. Hat man den Ausdruck $(a^4)^3$ so heisst dies:

$$(a^4)^3 = a^4 . a^4 . a^4$$

Da man nach Antwort der Frage 8 jede der Potenzen a^4 in das Produkt $a . a . a . a$ zerlegen kann, so ist auch:

$$(a^4)^3 = a . a . a . a . a . a . a . a . a . a . a . a$$

und hierfür kann man nach Antwort der Frage 2 schreiben:

$$(a^4)^3 = a^{12}$$

Dasselbe Resultat erhält man, wenn man die Basis a der Potenz a^4 mit dem Produkte der Exponenten $(3 . 4 = 12)$ potenziert.

Allgemein hat man hiernach:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Zusatz 1. Soll eine Potenz mehreremale hintereinander je in eine weitere Potenz erhoben werden, so findet vorstehender Lehrsatz wiederholte Anwendung.

z. B.:

$$((a^3)^2)^4 = (a^{3 \cdot 2})^4 = (a^6)^4 = a^{6 \cdot 4} = a^{24}$$

oder:

$$((a^3)^2)^4 = a^{3 \cdot 2 \cdot 4} = a^{24}$$

Zusatz 2. Bei wiederholten Potenzierungen bleibt die **Reihenfolge** der Exponenten ohne jeden Einfluss auf das Resultat.

z. B.: für $((a^3)^2)^4$ kann man auch schreiben: $((a^2)^3)^4$ oder: $((a^4)^3)^2$ u. s. f.

Die in diesem Beispiele angedeutete wiederholte Potenzierung ergibt stets das Resultat: a^{24}.

Zusatz 3. Durch Umkehrung des Lehrsatzes 11 erhält man den bei **Reduktionen und nummerischen Ausrechnungen** wichtigen Satz:

Eine Zahl wird mit einem Produkte potenziert, indem man die Zahl mit den einzelnen Faktoren potenziert und zwar in beliebiger Reihenfolge.

z. B.:

$$a^{12} = a^{2 \cdot 2 \cdot 3} = ((a^2)^2)^3 \text{ oder: } = ((a^3)^2)^2$$

allgemein:

$$a^{x \cdot y \cdot z} = ((a^x)^y)^z \text{ oder auch: } = ((a^y)^z)^x \text{ u. s. f.}$$

Aufgabe 14. Die in nachstehenden Uebungsbeispielen angeführten Ausdrücke sollen nach dem Lehrsatze 11 — und soweit es die bis dahin aufgestellten Lehrsätze zulassen, **reduziert**, bezw. auf ihre einfachste Form gebracht werden.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} =$	a^6	. . . man beachte den Lehrsatz 11.
2). $(a^3)^5 =$	?	
3). $(a^n)^p =$	?	
4). $(x^n)^4 =$	?	
5). $(a^3)^{n-1} = a^{3(n-1)} =$	a^{3n-3}	
6). $(a^{n+1})^4 =$	?	
7). $(x^{n+1})^{n+3} =$	?	
8). $((ab)^2)^3 = (ab)^{2 \cdot 3} = (ab)^6 =$	$a^6 b^6$	. . . man beachte auch den Lehrs. 4.
9). $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^4\right)^5 = \left(\frac{a}{b}\right)^{4 \cdot 5} = \left(\frac{a}{b}\right)^{20} =$	$\frac{a^{20}}{b^{20}}$	. . . " " " " " 5.
10). $((2a)^3)^2 =$	?	
11). $\left(\left(\frac{a}{4}\right)^2\right)^4 =$	?	
12). $(-a^3)^2 = -a^3 \cdot -a^3 = +a^{3+3} =$. .	$+a^6$	
13). $(-n^2)^5 = -n^{2 \cdot 5} =$	$-n^{10}$	. . . man beachte den Lehrsatz 3.
14). $(-x^5)^7 =$	?	

Uebungsbeispiele:	**Resultate**	**Andeutungen:**
15). $(-a^m)^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	
16). $(-a^3)^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	
17). $10(a^2)^3 = 10 \,.\, a^{2\cdot3} = \ldots\ldots$	$10a^6$	
18). $-5(n^3)^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	
19). $4(-n^2)^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	
20). $20(-n^3)^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	
21). $((a^3)^2)^4 = a^{3\cdot2\cdot4} = \ldots\ldots\ldots$	a^{24}	. . . man beachte den Zusatz 1 des Lehrsatzes 11.
22). $((x^5)^7)^9 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	
23). $(((a^m)^n)^p)^q = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	
24). $((2^3)^2)^4 \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	
25). $(((ma)^2)^3)^5 = (ma)^{2\cdot3\cdot5} = (ma)^{30} =$	$m^{30} \,.\, a^{30}$	
26). $(-5a^3b^5)^2 = +5^2a^{3\cdot2}b^{5\cdot2} = \ldots$	$25a^6b^{10}$	. . . man beachte zuerst den Lehrs. 4 und dann den Lehrs. 11, vergesse dabei nicht den Koeffizienten zu potenzieren und den Lehrsatz 3 anzuwenden.
27). $(-2a^2)^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	
28). $((-2a^2)^5)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	
29). $(a^4b^2)^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	
30). $(-a^5b^7)^8 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	
31). $((x^n \,.\, y)^3)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	
32). $(-2a^2b^3)^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	
33). $(3ab^{n-2})^5 = 3^5 \,.\, a^5 \,.\, b^{(n-2)5} = \ldots$	$3^5a^5b^{5n-10}$	
34). $(10a^2x^{n-1}y^{n+1})^3 = \ldots\ldots\ldots$	?	
35). $\left(\frac{a^2b^3}{x^3y^4}\right)^5 = \frac{(a^2b^3)^5}{(x^3y^4)^5} = \frac{a^{5\cdot2}b^{3\cdot5}}{x^{3\cdot5}y^{4\cdot5}} =$	$\frac{a^{10}b^{15}}{x^{15}y^{20}}$	. . . man beachte zuerst den Lehrs. 5 und dann den Lehrsatz 11.
36). $\left(\frac{3a^2b^5}{2x^2y^4}\right)^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	
37). $\left(\frac{4ab^n}{5xy^{n+1}}\right)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	
38). $\left(\frac{2a^2b^3x^4}{3y^5}\right)^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	
39). $\left(\frac{a^2y^p x^{n-1}}{2b^{z-1}z^4}\right)^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	
40). $\frac{(a^3x^2)^4}{(m\,.\,n)^{10}} = \frac{a^{3\cdot4}\,.\,x^{2\cdot4}}{m^{10}\,.\,n^{10}} = \ldots\ldots$	$\frac{a^{12}x^8}{m^{10}\,.\,n^{10}}$	. . . man führe die Potenzierungen im Zähler und Nenner einzeln für sich aus.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

41). $\frac{(a^3b^4)^2}{(a^2b^3)^3} = \frac{a^6b^8}{a^6b^9} = \ldots\ldots\ldots \frac{1}{b}$. . . man verfahre wie im Beispiel 40 und dann hebe man den erhaltenen Quotienten.

42). $\frac{3\,(2a^2x^5)^2}{4\,(3a^3x^4)^3} = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

43). $\frac{2\,(4a^3b^2c^2)^2}{5\,(2a^2bc)^3} = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

44). $\left(\frac{3a^2x^2}{4bc^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2a^2c^4}{b^3x}\right)^3 = \frac{3^2a^4x^4}{4^2b^2c^6} \cdot \frac{2^3a^6c^{12}}{b^9x^3} = \ldots$. . . man führe zunächst die Potenzierungen der einzelnen Faktoren aus und dann reduziere man.

$$\frac{9a^{10}xc^6}{2b^2}$$

45). $\frac{3\,(2a^2b)^2}{4\,(3x^3y^2)^3} \cdot \frac{7\,(3x^4y^3)^2}{5\,(2ab^2)^3} = \ldots\ldots$?

46). $\left(\frac{a^9b^{28}c^{47}}{d^{10}e^{29}}\right)^{17} \cdot \left(\frac{d^9e^{26}}{a^8b^{45}c^{24}}\right)^{19} = \ldots\ldots$?

47). $\left(\frac{2a^3b^2}{3xy^4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3xy}{5ab}\right)^3 \cdot \left(\frac{5ay^2}{2bx}\right)^2 = \ldots$?

48). $\frac{2\,(4a^3b^4c^2)^2}{3\,(6x^2y^3z^4)^3} \cdot \frac{6\,(3xy^3z^2)^4}{5\,(2a^2bc)^3} = \ldots$?

49). $\left(\frac{2a^3b^2}{3xy^4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3x^2y}{5a^2b}\right)^2 \cdot \left(\frac{5ay^2}{2bx^2}\right)^4 = \ldots$?

50). $\frac{(3a^4b)^2}{(5cd)^3} \cdot \frac{(5c)^4}{(6a)^5} \cdot \frac{(4b)^6}{40a^3b^5} = \ldots$? . . . man führe zuerst die Potenzierungen der Produkte aus, dann reduziere man.

51). $((8x - 6y)^{2a})^{5a} : ((4x - 3y)^{5a})^{2a} =$

$$(8x - 6y)^{10a^2} : (4x - 3y)^{10a^2} =$$

$$\left(\frac{8x - 6y}{4x - 3y}\right)^{10a^2} = \left(\frac{2(4x - 3y)}{4x - 3y}\right)^{10a^2} = 2^{10a^2}$$

52). $((3a - 6b)^3)^5 : ((6a - 12b)^5)^3 = \ldots$?

53). $\left(p^{3a-5b}\right)^{7a-4b} : \left(p^{2a-3b}\right)^{4a-8b} =$

$$p^{(3a-5b)(7a-4b)} : p^{(2a-3b)(4a-8b)} =$$

$$p^{21a^2 - 35ab - 12ab + 20b^2} : p^{8a^2 - 12ab - 16ab + 24b^2} =$$

$$p^{21a^2 - 47ab + 20b^2} : p^{8a^2 - 28ab + 24b^2} =$$

$$p^{21a^2 - 47ab + 20b^2 - (8a^2 - 28ab + 24b^2)} = p^{13a^2 - 19ab - 4b^2}$$

54). $\left(a^{2n-4m}\right)^{2n+4m} \cdot \left(a^{4m-2n}\right)^{4m+2n} = .$?

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

55). $\left((p+q)^{2+a}\right)^{a+4} : \left((p+q)^{a+5}\right)^{2-a} = \ldots ?$

56). $\left(\dfrac{4\,a^{n-1}b^3c^{3-x}}{9x^2y^{3n-2}z^6}\right)^2 : \left(\dfrac{2\,a^nb^2c^{2-x}}{3x\,y^{2n-1}z^4}\right)^3 =$

$$\frac{4^2\,a^{2n-2}b^6\,c^{6-2x}}{9^2\,x^4\,y^{6n-4}z^{12}} : \frac{2^3\,a^{3n}\,b^6\,c^{6-3x}}{3^3\,x^3\,y^{6n-3}z^{12}} =$$

$$\frac{(2\,.\,2)^2\,.\,a^{2n-2}b^6c^{6-2x}\,.\,3^3x^3y^{6n-3}z^{12}}{(3\,.\,3)^2\,.\,x^4\,.\,y^{6n-4}z^{12}\,.\,2^3\,a^{3n}\,b^6c^{6-3x}} = \frac{2\,c^x y}{3\,a^{n+2}\,x}$$

57). $\left[\left(\dfrac{a^5b^3}{c^2x^2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{a\,x^3}{b}\right)^4\right] : \left[\left(\dfrac{a^3b}{c^2x^3}\right)^5 : \left(\dfrac{a^2x^3}{b^2c}\right)^5\right] = ?$. . . man führe zunächst die Potenzierungen in den eckigen Klammern und dann die angedeuteten Divisionen und Multiplikationen aus.

58). $\left[\left(\dfrac{a^4b^3}{cx^7}\right)^5 : \left(\dfrac{a\,x^3}{b\,c^4}\right)^4\right] : \left[\left(\dfrac{a\,b^3}{c\,x^3}\right)^6 : \left(\dfrac{a^2x^3}{b^2c^3}\right)^5\right] = ?$

59). $\dfrac{(2^5)^5}{4^4} = \dfrac{2^{25}}{(2^2)^4} = \dfrac{2^{25}}{2^8} = \ldots\ldots\ 2^{17}$

60). $\dfrac{(3^3)^3}{9^4} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ ?$

61). $\dfrac{(3^8)^4}{27^{12}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ ?$

62). $\dfrac{(3^3\,.\,4^2)^3}{12^4} = \dfrac{3^9\,.\,4^6}{(3\,.\,4)^4} = \dfrac{3^9\,.\,4^6}{3^4\,.\,4^4} = \ldots\ 3^5\,.\,4^2$

63). $\dfrac{(6^2)^3}{(4\,.\,3^3)^2} = \dfrac{6^6}{4^2\,.\,3^6} = \dfrac{(2\,.\,3)^6}{(2\,.\,2)^2\,.\,3^6} = \dfrac{2^6\,.\,3^6}{2^2\,.\,2^2\,.\,3^6} =$

$2^2 = 4$

64). $\dfrac{(12^2)^3}{(4^2\,.\,3^3)^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ ?$

65). $\dfrac{(8^2\,.\,5^4)^4}{(2^2\,.\,20)^6} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ ?$

9). Ueber die Potenzierung algebraischer Summen.

In den vorhergehenden Abschnitten wurden die Gesetze, Regeln, aufgestellt nach welchen Potenzen addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert; nach welchen ferner Produkte, Quotienten und Potenzen mit einer andern Grösse, welche auch eine algebraische Summe sein kann, potenziert werden müssen.

In diesem Abschnitte soll nun gezeigt werden, wie **algebraische Summen** (siehe Erkl. 38), welche aus beliebigen Ausdrücken bestehen können, potenziert werden müssen. Ein **allgemeines Gesetz** nach welchem algebraische Summen, wie z. B. $(a-b)$, $(a-b+c)$ etc., mit einer beliebigen Zahl n, potenziert werden müssen, lässt sich in der Elementar-Mathematik nicht aufstellen, und **namentlich ist der Anfänger davor zu warnen**, z. B.

$(a-b)^n = a^n - b^n$

oder: $(a-b+c)^n = a^n - b^n + c^n$

„ $(a-b)^2 = a^2 - b^2$ u. s. f.

zu setzen.

Die in der Elementar-Mathematik zur Anwendung kommenden besonderen Sätze, welche sich auf Potenzierung von algebraischen Summen beziehen, sind in nachstehenden Lehrsätzen 12 bis 16 enthalten.

Lehrsatz 12. Das Quadrat eines **Binoms** (siehe Erkl. 39) besteht:

1). aus dem Quadrat des 1. Gliedes,
2). plus dem doppelten Produkte beider Glieder und
3). plus dem Quadrat des 2. Gliedes.

Hierbei hat man jedoch die vor den einzelnen Gliedern des Binomiums stehenden **Vorzeichen** als denselben zugehörig zu betrachten (s. Erkl. 25, S. 13) und mit in Rechnung zu ziehen.

Erkl. 38. Unter einer **algebraischen Summe** versteht man jeden Ausdruck in welchem darin vorkommende Ausdrücke durch $+$ oder $-$ verbunden sind, so sind z. B.:

$a-b+c$ oder:

$2a-3ab+m^2$ u. s. f.

algebraische Summen.

Vorauss. Gegeben seien die Potenzen:

$(a+b)^2$, $(a-b)^2$

$(-a+b)^2$, $(-a-b)^2$

Behaupt.

1). $(a+b)^2 = (+a)^2 + 2\cdot(+a\cdot+b) + (+b)^2$

oder:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2). $(a-b)^2 = (+a)^2 + 2\cdot(+a\cdot-b) + (-b)^2$

oder:

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Erkl. 39. Kommen in einer algebraischen Summe nur 2 Ausdrücke vor, welche durch + oder — verbunden sind, so nennt man diese algebraische Summe **ein Binom** (Binomium), so sind z. B. $a-b$, $3a-4b^2$ Binomien.

Kommen in einer algebraischen Summe 3 Ausdrücke vor, welche durch + oder — verbunden sind, so nennt man diese algebraische Summe **ein Trinom.**

z. B.: $3a-4b+5c^2$ ist ein Trinom.

Kommen in einer algebraischen Summe 3 oder mehrere Ausdrücke vor, welche durch + oder — verbunden sind, so nennt man eine solche algebr. Summe allgemein **ein Polynom.**

z. B.: $(a-b+c+d)$ ist ein Polynom.

Ein für sich bestehender Ausdruck wird dementsprechend **ein Monom** genannt.

z. B.: $3a^4b$ ist ein Monom.

3). $(-a+b)^2=(-a)^2+2\cdot(-a\cdot+b)+(+b)^2$ oder:

$$(-a+b)^2=a^2-2ab+b^2$$

4). $(-a-b)^2=(-a)^2+2.(-a.-b)+(-b)^2$ oder:

$$(-a-b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Bei 1). bis 4). hat man den Lehrsatz 3 zu beachten.

Beweis.

1). Nach Antwort der Frage 2, ist:

$$(a+b)^2=(a+b).(a+b)$$

Führt man die auf der rechten Seite dieser Gleichung angedeutete Multiplikation aus, so erhält man:

$$(a+b)^2=a^2+ab+ab+b^2$$

oder:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

vergl. vorsteh. Behaupt. 1.

2). Analog dem Beweise 1, ist:

$$(a-b)^2=(a-b).(a-b)$$

$$(a-b)^2=a^2-ab-ab+b^2$$

oder:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

vergl. vorsteh. Behaupt. 2.

3). Analog dem Beweise 1, ist:

$$(-a+b)^2=(-a+b).(-a+b)$$

$$(-a+b)^2=a^2-ab-ab+b^2$$

oder:

$$(-a+b)^2=a^2-2ab+b^2$$

vergl. vorsteh. Behaupt. 3.

4). Analog dem Beweise 1, ist:

$$(-a-b)^2=(-a-b).(-a-b)$$

$$(-a-b)^2=a^2+ab+ab+b^2$$

oder:

$$(-a-b)^2=a^2+2ab+b^2$$

vergl. vorsteh. Behaupt. 4.

Zusatz 1. Da nach vorstehendem Lehrsatze:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

und auch:

$$(-a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ ist,}$$

so folgt hieraus:

$$\text{I. . . } \underline{(a+b)^2 = (-a-b)^2}$$

Da ferner nach vorstehendem Lehrsatze:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

und auch:

$$(-a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ ist,}$$

so folgt hieraus:

$$\text{II. . . } \underline{(a-b)^2 = (-a+b)^2}$$

Da ferner der Exponent einer jeden **geraden** Potenz $= 2 \cdot n$ ist, wenn n irgend eine beliebige Zahl bedeutet und man nach dem Lehrsatze 11:

a). $(a+b)^{2 \cdot n} = ((a+b)^2)^n$

b). $(-a-b)^{2 \cdot n} = ((-a-b)^2)^n$

c). $(a-b)^{2 \cdot n} = ((a-b)^2)^n$

d). $(-a+b)^{2 \cdot n} = ((-a+b)^2)^n$

setzen kann, so folgt aus den Gleichungen I, a). und b). allgemein:

$$\text{III. . . } \underline{(a+b)^{2n} = (-a-b)^{2n}}$$

Ferner folgt aus den Gleichungen II, c). und d). allgemein:

$$\text{IV. . . } \underline{(a-b)^{2n} = (-a+b)^{2n}}$$

Zu beachten bleibt, dass die Potenzen in vorstehenden Gleichungen I bis IV stets **gerade** Potenzen sind.

Vorstehende Gleichungen I bis IV finden praktische Verwertungen bei **Reduktionen** (siehe spätere Aufgaben).

Zusatz 2. Von dem vorstehenden Lehrsatze 12 (ebenso von den folgenden Lehrsätzen 13 bis 16) kann man mit Vorteil **bei der Quadrierung** (bezw. bei der Kubierung) **von Zahlen** Gebrauch machen. —

Man vergl. hiermit den Abschnitt, welcher über die Ausziehung von Quadrat- und Kubikwurzeln handelt.

z. B.: Hat man 85^2 auszuführen, so setze man:

$$85^2 = (80 + 5)^2$$

Mit Anwendung des Lehrsatzes 12 erhält man hiernach:

$$85^2 = 80^2 + 2 \,.\, 5 \,.\, 80 + 5^2 \text{ oder:}$$

$$85^2 = 6400 + 800 + 25$$

mithin ist:

$$85^2 = 7225$$

Aufgabe 15. Die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Potenzierungen sollen nach dem Lehrsatze 12 — und soweit es die bis dahin aufgestellten Lehrsätze zulassen — ausgeführt werden.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $(x^2 + a)^2 = (+x^2)^2 + 2 \,.\, (+x^2) \,.\, (+a) + (+a)^2$

$= x^4 + 2ax^2 + a^2$ man beachte den Lehrs. 12 **und versuche** bei den ungelösten Uebungsaufgaben **das Endresultat sofort hinzuschreiben,** indem man die in den Resultaten der gelösten Beispiele durch die Klammern angedeuteten Operationen im Kopfe ausführt.

2). $(a^8 - a)^2 = (+a^8)^2 + 2 \,.\, (+a^8) \,.\, (-a) + (-a)^2$

$= a^{16} - 2a^9 + a^2$

3). $(2a^x - 3a^y)^2 = (+2a^x)^2 + 2 \,.\, (+2a^x) \,.\, (-3a^y) + (-3a^y)^2$

$= 2^2 a^{2 \cdot x} - 12a^x \,.\, a^y + 3^2 a^{2 \cdot y}$

$= 4a^{2x} - 12a^{x+y} + 9a^{2y}$

4). $\left(\frac{2a^2b}{3c^2} - \frac{3c^2}{2a^2b}\right)^2 = \left(+\frac{2a^2b}{3c^2}\right)^2 + 2 \,.\, \left(+\frac{2a^2b}{3c^2}\right) \cdot \left(-\frac{3c^2}{2a^2b}\right) + \left(\frac{-3c^2}{2a^2b}\right)^2$

$= \frac{2^2a^4b^2}{3^2c^4} - \frac{2 \,.\, 2a^2b \,.\, 3c^2}{3 \,.\, c^2 \,.\, 2a^2b} + \frac{3^2c^4}{2^2a^4b^2}$

$= \frac{4a^4b^2}{9c^4} - 2 + \frac{9c^4}{4a^4b^2}$

5). $(1 - x)^2 = (+1)^2 + 2 \,.\, (+1) \,.\, (-x) + (-x)^2$

$= 1 - 2x + x^2$

6). $99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \,.\, 100 + 1^2$ man beachte obigen Zusatz 2.

$= 10000 - 200 + 1$

$= 9800 + 1$

$= 9801$

7). $(x + 2y)^2 =$?

8). $(3x - 4y)^2 =$?

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

9). $(2a-5b)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

10). $(a+2b)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

11). $(3a+5b)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

12). $(5p-8q)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

13). $(2x-3y)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

14). $(a^7-a^3)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

15). $(m^2-n^2)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

16). $(a^m-a^n)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

17). $(x^5-y^5)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

18). $(a-2x)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

19). $(2a^2+3b^3)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

20). $(3m^3-4n^5)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

21). $(3a^2-5b^2)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

22). $(7a^2+3b^3)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

23). $\left(\frac{a}{2}+2x\right)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

24). $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

25). $\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

26). $\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{6}x\right)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

27). $\left(\frac{a^3}{2}-2b^5\right)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

28). $\left(\frac{3a^2}{b}+2b^3\right)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

29). $\left(\frac{3a^2}{4b^3}-\frac{2b^6}{3a^3}\right)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

30). $\left(\frac{2a^3}{3b^2}-\frac{4a^2}{5b}\right)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

31). $\left(\frac{2a^2}{5b^3}+\frac{3b^2}{4a^3}\right)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

32). $\left(\frac{7a^2}{3b}-\frac{5b}{2a}\right)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

33). $\left(\frac{3ac}{8b}+\frac{4bc}{9a^2}\right)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

34). $\left(\frac{4n^2m^3}{3p^4}-\frac{3m^4p}{5n^3}\right)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

35). $(a^2b^{x+1}-a^{x+1}b^3)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
36). $(1+x)^2+(1-x)^2=$	?	 man führe zuerst die angedeuteten Potenzierungen aus und dann reduziere man.
37). $(a+b)^2-(a-b)^2=$	?	
38). $(a-1)^2+2a-1=$	?	
39). $3(a-4)^2+16(7-2a)^2=$	?	
40). $\frac{(a-b)^2}{2}+\frac{(a+b)^2}{2}=$	?	 man addiere zuerst die Quotienten.
41). $999^2=$	?	 man vergl. das Beispiel 6 und beachte den Zusatz 2.
42). $78^2=$	?	
43). $75^2=$	?	
44). $89^2=$	?	
45). $1001^2=$	?	
46). $102^2=$	?	

Lehrsatz 13. Der Kubus eines **Binoms** (siehe Erkl. 39) besteht:

1). aus dem Kubus des 1. Gliedes,

2). plus dem dreifachen Produkte des Quadrats vom ersten Gliede mal dem zweiten,

3). plus dem dreifachen Produkte des ersten Gliedes mal dem Quadrate des zweiten,

4). plus dem Kubus des 2. Gliedes.

Hierbei hat man jedoch die vor den einzelnen Gliedern des Binomiums stehenden **Vorzeichen** als denselben zugehörig zu betrachten (siehe Erkl. 25, und 26, S. 13) und mit in Rechnung zu bringen.

Vorauss. Gegeben seien die Potenzen:

$$(a+b)^3,\quad (a-b)^3$$
$$(-a+b)^3,\quad (-a-b)^3$$

Behaupt.

1). $(a+b)^3=(+a)^3+3.(+a)^2.(+b)+3.(+a).(+b)^2+(+b)^3$

oder:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

2). $(a-b)^3=(+a)^3+3.(+a)^2.(-b)+3.(+a).(-b)^2+(-b)^3$

oder:

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

3). $(-a+b)^3=(-a)^3+3.(-a)^2.(+b)+3.(-a).(+b)^2+(+b)^3$

oder:

$$(-a+b)^3=-a^3+3a^2b-3ab^2+b^3$$

4). $(-a-b)^3=(-a)^3+3.(-a)^2.(-b)+3.(-a).(-b)^2+(-b)^3$

oder:

$$(-a-b)^3=-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3$$

Beweis.

1). Da $(a+b)^3 = (a+b)^{2+1}$ gesetzt werden kann, so erhält man nach dem Zusatze 1, Seite 16:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2 . (a+b)$$

oder nach dem Lehrsatze 12:

$$(a+b)^3 = (a^2+2ab+b^2) . (a+b)$$

Führt man die auf der rechten Seite dieser Gleichung angedeutete Multiplikation weiter aus, so erhält man:

$$(a+b)^3 = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \text{ oder:}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

vergl. vorsteh. Behaupt. 1.

2). Analog dem Beweise 1, ist:

$$(a-b)^3 = (a-b)^2 . (a-b)$$

mithin nach Lehrs. 12:

$$(a-b)^3 = (a^2-2ab+b^2) . (a-b)$$

oder:

$$(a-b)^3 = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$

und schliesslich:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

vergl. vorsteh. Behaupt. 2.

3). Analog dem Beweise 1, ist:

$$(-a+b)^3 = (-a+b)^2 . (-a+b)$$

mithin nach Lehrs. 12:

$$(-a+b)^3 = (a^2-2ab+b^2) . (-a+b)$$

oder:

$$(-a+b)^3 = -a^3 + 2a^2b - ab^2 + a^2b - 2ab^2 + b^3$$

und schliesslich:

$$(-a+b)^3 = -a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$$

vergl. vorsteh. Behaupt. 3.

4). Analog dem Beweise 1, ist:

$$(-a-b)^3 = (-a-b)^2 . (-a-b)$$

mithin nach Lehrs. 12:

$$(-a-b)^3 = (a^2+2ab+b^2) . (-a-b)$$

oder:

$$(-a-b)^3 = -a^3 - 2a^2b - ab^2 - a^2b - 2ab^2 - b^3$$

und schliesslich:

$$(-a-b)^3 = -a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$$

vergl. vorsteh. Behaupt. 4.

Aufgabe 16. Die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Potenzierungen sollen nach dem Lehrsatze 13 — und soweit es die bis dahin aufgestellten Lehrsätze zulassen — ausgeführt werden.

Uebungsbeispiele: Resultate: Andeutungen:

1). $(x^2+a)^3 = (+x^2)^3 + 3 . (+x^2)^2 . (+a) + 3 . (+x^2) . (+a)^2 + (+a)^3$. . . man beachte den Lehrs. 13 **und versuche bei** den ungelösten Uebungsaufgaben **das Endresultat sofort hinzuschreiben**, indem man die in den Resultaten der gelösten Beisp. durch die Klammern angedeut. Operationen im Kopfe ausführt.

$= x^6 + 3ax^4 + 3a^2x^2 + a^3$

2). $(a-b^4)^3 = (+a)^3 + 3.(+a)^2.(-b^4) + 3.(+a).(-b^4)^2 + (-b^4)^3$

$= a^3 - 3a^2b^4 + 3ab^8 - b^{12}$

3). $(2x^3-3y^2)^3 = (+2x^3)^3 + 3 . (+2x^3)^2 . (-3y^2) + 3 . (+2x^3) . (-3y^2)^2 + (-3y^2)^3$

$= 2^3 . x^9 - 3 . 2^2 . x^6 . 3y^2 + 3 . 2 . x^3 . 3^2 . y^4 - 3^3 . y^6$

$= 8x^9 - 36x^6y^2 + 54x^3y^4 - 27y^6$

4). $$\left(\frac{3m^2}{8n^2}-\frac{4m}{9n}\right)^3 = \left(+\frac{3m^2}{8n^2}\right)^3 + 3\cdot\left(+\frac{3m^2}{8n^2}\right)^2\cdot\left(-\frac{4m}{9n}\right) + 3\cdot\left(+\frac{3m^2}{8n^2}\right)\cdot\left(-\frac{4m}{9n}\right)^2 + \left(-\frac{4m}{9n}\right)^3$$

$$= \frac{3^3 . m^6}{8^3 . n^6} - 3\cdot\frac{3^2 . m^4}{8^2 . n^4}\cdot\frac{4 . m}{9 . n} + 3\cdot\frac{3 . m^2}{8 . n^2}\cdot\frac{4^2 . m^2}{9^2 . n^2} - \frac{4^3 . m^3}{9^3 . n^3}$$

$$= \frac{27m^6}{512n^6} - \frac{3m^5}{16n^5} + \frac{2m^4}{9n^4} - \frac{64m^3}{729n^3}$$

5). $(x-1)^3 = (+x)^3 + 3 . (+x)^2 \cdot (-1) + 3 \cdot (+x) \cdot (-1)^2 + (-1)^3$

$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

6). $88^3 = (90-2)^3 = 90^3 - 3 \cdot 90^2 . 2 + 3 \cdot 90 \cdot 2^2 - 2^3$. . . man beachte den Zusatz 2, Seite 49.

$= 729000 - 48600 + 1080 - 8$

$= 730080 - 48608$

$= 681472$

7). $(x+2y)^3 =$?

8). $(3x-4y)^3 =$?

9). $(3a-2b)^3 =$?

10). $(4m+7n)^3 =$?

11). $(a^2-b)^3 =$?

12). $(a^4-a^3)^3 =$?

13). $(a^m-a^n)^3 =$?

14). $(4x^3+2y^2)^3 =$?

15). $(3x^2-2yz)^3 =$?

16). $(5a^n-3x^2)^3 =$?

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
17). $(4mnp - 5mpq)^3 =$	?	
18). $\left(\frac{m}{3} - 2x\right)^3 =$	?	
19). $\left(\frac{3}{4} - \frac{2a}{b}\right)^3 =$	?	
20). $\left(\frac{3m^2}{2} + \frac{2b^3}{m}\right)^3 =$	?	
21). $\left(\frac{5m^2}{3n^3} - \frac{4n^3}{5m^7}\right)^3 =$	?	
22). $\left(\frac{4m^3}{3n^2} - \frac{2n}{3m^4}\right)^3 =$	?	
23). $\left(\frac{3x^2}{8a^2} - \frac{4x}{9a}\right)^3 =$	?	
24). $(x-1)^3 =$	?	
25). $(1-m)^3 =$	?	
26). $(m+n)^3 - (m-n)^3 =$	?	 man führe zuerst die angedeuteten Potenzierungen aus, dann reduziere man.
27). $(1+t)^3 + (1-t)^3 =$	?	
28). $999^3 =$	?	 man vergl. das Beisp. 6 und beachte den Zusatz 2, Seite 49.
29). $9997^3 =$	?	
30). $94^3 =$	?	
31). $37^3 =$	?	
32). $98^3 =$	?	
33). $69^3 =$	?	

Lehrsatz 14. Das Quadrat eines **Polynoms** (siehe Erkl. 39) besteht:

1). aus dem Quadrat des 1ten Gliedes,
2). plus dem doppelten Produkte des 2ten Gliedes mal dem vorhergehenden 1ten Gliede,
3). plus dem Quadrat des 2ten Gliedes,
4). plus dem doppelten Produkte des 3ten Gliedes mal den vorhergehenden zwei Gliedern,
5). plus dem Quadrat des 3ten Gliedes,
6). plus dem doppelten Produkte des 4ten Gliedes mal den vorhergehenden drei Gliedern,
7). aus dem Quadrate des 4ten Gliedes,
8). u. s. f., u. s. f.

Hierbei hat man jedoch die vor den

Vorauss. Gegeben seien z. Beisp. die Potenzen:

$$(a-b+c)^2 \text{ und } (a+b-c-d)^2$$

Behaupt.

1). $(a-b+c)^2 = (+a)^2 + 2\cdot(-b)\cdot(+a) + (-b)^2 + 2\cdot(+c)\cdot(a-b) + (+c)^2$

oder:

$$(a-b+c)^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 2c(a-b) + c^2$$

einzelnen Gliedern des Polynoms stehenden **Vorzeichen** als denselben zugehörig zu betrachten (siehe Erkl. 25 und 26, S. 13) und mit in Rechnung zu bringen.

2). $(a+b-c-d)^2=(+a)^2+2\cdot(+b)\cdot(+a)+(+b)^2+2\cdot(-c)\cdot(+a+b)+(-c)^2+2\cdot(-d)\cdot(+a+b-c)+(-d)^2$

oder:

$(a+b-c-d)=a^2+2ab+b^2-2c(a+b)+c^2-2d\cdot(a+b-c)+d^2$

Beweis.

1). Setzt man in der gegebenen Potenz $(a-b+c)^2$ z. B. $(a-b)=m$, so wird

$(a-b+c)^2=(m+c)^2=m^2+2cm+c^2$

(vergl. Lehrsatz 12)

oder:

$(a-b+c)^2=(a-b)^2+2c(a-b)+c^2$

mithin:

$(a-b+c)^2=a^2-2ab+b^2+2c(a-b)+c^2$

(vergl. vorst. Behaupt. 1)

2). Setzt man in der gegebenen Potenz $(a+b-c-d)^2$ z. B. $(a+b-c)=n$, so wird:

$(a+b-c-d)^2=(n-d)^2=n^2-2nd+d^2$

(vergl. Lehrsatz 12)

oder:

$(a+b-c-d)^2=(a+b-c)^2-2d(a+b-c)+d^2$

mithin erhält man, wenn man den ersten Ausdruck rechts, nämlich: $(a+b-c)^2$ nach der Behaupt. 1 potenziert:

$(a+b-c-d)^2=a^2+2ab+b^2-2c(a+b)+c^2-2d(a+b-c)+d^2$

(vergl. vorst. Behaupt. 2)

Aufgabe 17. Die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Potenzierungen sollen nach dem Lehrsatze 14 — und soweit es die bis dahin aufgestellten Lehrsätze zulassen — ausgeführt werden.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $(3a-b+2c)^2=(+3a)^2+2\cdot(-b)\cdot(+3a)+(-b)^2+2\cdot(+2c)\cdot(+3a-b)+(+2c)^2$

$=3^2a^2-2\cdot3\cdot ab+b^2+2\cdot2c(3a-b)+2^2c^2$

$=9a^2-6ab+b^2+12ac-4bc+4c^2$

2). $(4m^2-2n^3-3p^4)^2=(+4m^2)^2+2\cdot(-2n^3)\cdot(+4m^2)+(-2n^3)^2+2\cdot(-3p^4)\cdot(+4m^2-2n^3)+(-3p^4)^2$

man beachte den Lehrsatz 14 und versuche bei den ungelösten Uebungsbeispielen das Endresultat **sofort** hinzuschreiben, indem man die in den Resultaten der gelösten Beispiele durch die Klammern angedeuteten Operationen im Kopfe ausführt.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:

$(4m^2 - 2n^2 - 3p^4)^2 = 4^2m^4 - 2.2.4.n^3m^2 + 2^2n^6 - 6p^4(4m^2 - 2n^3) + 3^2p^8$

$= 16m^4 - 16n^3m^2 + 4n^6 - 24p^4m^2 + 12p^4n^3 + 9p^8$

3). $\left(\frac{3a^2}{2b} - \frac{4b^3}{5a} - a^3b^4\right)^2 = \left(+\frac{3a^2}{2b}\right)^2 + 2\cdot\left(-\frac{4b^3}{5a}\right)\cdot\left(+\frac{3a^2}{2b}\right) + \left(-\frac{4b^3}{5a}\right)^2 + 2.(-a^3b^4)$

$\left(+\frac{3a^2}{2b} - \frac{4b^3}{5a}\right) + (-a^3b^4)^2$

$= \frac{3^2a^4}{2^2b^2} - \frac{2\cdot4\cdot b^3\cdot 3\cdot a^2}{5\cdot a\cdot 2\cdot b} + \frac{4^2b^6}{5^2a^2} - 2a^3b^4\left(\frac{3a^2}{2b} - \frac{4b^3}{5a}\right) + a^6b^8$

$= \frac{9a^4}{4b^2} - \frac{12ab^2}{5} + \frac{16b^6}{25a^2} - 3a^5b^3 + \frac{8a^2b^7}{5} + a^6b^8$

4). $(x^3 - ax^2 + ax - 1)^2 = (+x^3)^2 + 2\cdot(-ax^2)\cdot(+x^3) + (-ax^2)^2 + 2\cdot(+ax)\cdot(+x^3 - ax^2) +$

$(+ax)^2 + 2\cdot(-1)\cdot(+x^3 - ax^2 + ax) + (-1)^2$

$= x^6 - 2ax^2.x^3 + a^2x^4 + 2ax(x^3 - ax^2) + a^2x^2 - 2(x^3 - ax^2 + ax) + 1^2$

$= x^6 - 2ax^5 + a^2x^4 + 2ax^4 + 2a^2x^3 + a^2x^2 - 2x^3 + 2ax^2 - 2ax + 1$

5). $374^2 = (300 + 70 + 4)^2 = 300^2 + 2.70.300 + 70^2 + 2.4.300 + 2.4.70 + 4^2$. . . man beachte den Zusatz 2, Seite 49.

$= 90000 + 42000 + 4900 + 2400 + 560 + 16$

$= 139876$

6). $(a + b + c)^2 =$?

7). $(a + b - c)^2 =$?

8). $(a + c - b)^2 =$?

9). $(b + c - a)^2 =$?

10). $(a - b - c)^2 =$?

11). $(x^2 + x + 1)^2 =$?

12). $(a - a^2 - a^3)^2 =$?

13). $(2x - 3y + 3z)^2 =$?

14). $(2x + 3y - 4)^2 =$?

15). $(3x - 2y + z)^2 =$?

16). $(5x^2 - 3x + 2)^2 =$?

17). $(ax^2 + bx + c)^2 =$?

18). $(2a^2 - 3b^5 + 4c^3)^2 =$?

19). $(a^2 + 2b^3 - 3c^4)^2 =$?

20). $(1 + 2a - 3a^2)^2 =$?

21). $\left(\frac{3a^2}{2b} - \frac{4b^3}{5a} - a^3b^4\right)^2 =$?

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

22). $\left(\frac{2ab}{3cd}+\frac{5ac}{4bd}-\frac{4ad}{5bc}\right)^2= \ldots\ldots$?

23). $\left(\frac{9fg}{8hl}-\frac{8fh}{3gl}-\frac{3gh}{4fl}\right)^2= \ldots\ldots$?

24). $769^2 = \ldots\ldots$? . . . man beachte das Beispiel 5 und den Zusatz 2, Seite 49.

25). $438^2 = \ldots\ldots$?

26). $476^2 = \ldots\ldots$?

27). $(a+b+c-x)^2 = \ldots\ldots$?

28). $(a+b+x-c)^2 = \ldots\ldots$?

29). $(a+c+x-b)^2 = \ldots\ldots$?

30). $(b+c+x-a)^2 = \ldots\ldots$?

31). $(a-b-c-d)^2 = \ldots\ldots$?

32). $(-a+b-c-d)^2 = \ldots\ldots$?

33). $(a-b+c-d)^2 = \ldots\ldots$?

34). $(x^3+ax^2+ax+1)^2 = \ldots\ldots$?

35). $(3a^2+2ab+c^2-3d^2)^2 = \ldots\ldots$?

36). $(4-3x+2x^2-7x^3)^2 = \ldots\ldots$?

37). $(a+b-c+d-f)^2 = \ldots\ldots$?

38). $(2a^8-4a^6+8a^4-14a^2+22)^2 = \ldots\ldots$?

39). $(x^4-ax^3+bx^2-ax+1)^2 = \ldots\ldots$?

40). $\left(\frac{2}{3}f^4h^2+\frac{3}{4}f^3h^3-\frac{4}{5}f^2h^4+\frac{5}{6}fh^5\right)^2= \ldots$?

41). $((3a-2b)^3)^2 = \ldots\ldots$? . . . man führe zuerst nach dem Lehrsatze 12 die angedeutete Kubierung aus, dann erhält man ein Polynom, welches noch zu quadrieren ist.

42). $3587^2 = \ldots\ldots$?

43). $1694^2 = \ldots\ldots$?

44). $7854^2 = \ldots\ldots$?

45). $21341^2 = \ldots\ldots$?

Lehrsatz 15. Der Kubus eines **Polynoms** (siehe Erkl. 39) besteht:

1). aus dem Kubus des 1^{ten} Gliedes,

2). plus dem 3fachen Produkte des 2^{ten} Gliedes mal dem Quadrate des vorhergehenden 1^{ten} Gliedes,

3). plus dem 3fachen Produkte des Quadrats des 2^{ten} Gliedes mal dem vorhergehenden 1^{ten} Gliede,

4). plus dem Kubus des 2^{ten} Gliedes,

5). plus dem 3fachen Produkte des 3^{ten} Gliedes mal dem Quadrate der Summe der beiden vorhergehenden Glieder,

6). plus dem 3fachen Produkte des Quadrats des 3^{ten} Gliedes mal der Summe der beiden vorhergehenden Glieder,

7). plus dem Kubus des 3^{ten} Gliedes,

8). plus dem 3fachen Produkte des 4^{ten} Gliedes mal dem Quadrat der Summe der drei vorhergehenden Glieder (ist analog unter 5).)

9). plus dem 3fachen Produkte des Quadrats des 4^{ten} Gliedes mal der Summe der drei vorhergehenden Glieder (ist analog unter 6).)

10). plus dem Kubus des 4^{ten} Gliedes (ist analog unter 7).)

11). analog wie unter 8).,

12). „ „ „ 9).,

13). „ „ „ 10)., u. s. f., u. s. f.

Hierbei hat man jedoch die vor den einzelnen Gliedern des Polynoms stehenden **Vorzeichen** als denselben zugehörig zu betrachten (siehe Erkl. 25, und 26, S. 13) und mit in Rechnung zu ziehen.

Vorauss. Gegeben seien z. Beisp. die Potenzen:

$$(a-b+c)^3 \text{ und } (a-b+c-d)^3$$

Behaupt.

1). $(a-b+c)^3 = (+a)^3 + 3\cdot(-b)\cdot(+a)^2 + 3\cdot(-b)^2\cdot(+a) + (-b)^3 + 3\cdot(+c)\cdot(+a-b)^2 + 3(+c)^2\cdot(+a-b) + (+c)^3$

oder:

$$(a-b+c)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3c(a-b)^2 + 3c^2(a-b) + c^3$$

2). $(a-b+c-d)^3 = (+a)^3 + 3\cdot(-b)\cdot(+a)^2 + 3\cdot(-b)^2\cdot(+a) + (-b)^3 + 3\cdot(+c)\cdot(+a-b)^2 + 3\cdot(+c)^2\cdot(+a-b) + (+c)^3 + 3\cdot(-d)\cdot(a-b+c)^2 + 3\cdot(-d)^2\cdot(a-b+c) + (-d)^3$

oder:

$$(a-b+c-d)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3c(a-b)^2 + 3c^2(a-b) + c^3 - 3d(a-b+c)^2 + 3d^2(a-b+c) - d^3$$

Beweis.

1). Setzt man in der gegebenen Potenz $(a-b+c)^3$ z. B. $(a-b) = m$, so wird:

$$(a-b+c)^3 = (m+c)^3 = m^3 + 3m^2c + 3mc^2 + c^3$$ (vergl. Lehrs. 13)

oder:

$$(a-b+c)^3 = (a-b)^3 + 3\cdot(a-b)^2\cdot c + 3(a-b)\cdot c^2 + c^3$$

mithin:

$$(a-b+c)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3c(a-b)^2 + 3c^2(a-b) + c^3$$

(vergl. vorst. Behaupt. 1)

2). Setzt man in der gegebenen Potenz $(a-b+c-d)^3$ z. B. $(a-b+c) = n$, so wird:

$$(a-b+c-d)^3 = (n-d)^3 = n^3 - 3n^2d + 3nd^2 - d^3$$ (vergl. Lehrs. 13)

oder:

$$(a-b+c-d)^3 = (a-b+c)^3 - 3(a-b+c)^2 d + 3(a-b+c)d^2 - d^3$$

mithin erhält man, wenn man den ersten Ausdruck rechts, nämlich $(a-b+c)^3$ nach der Behaupt. 1 potenziert:

$$(a-b+c-d)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3c(a-b)^2 + 3c^2(a-b) + c^3 - 3d(a-b+c)^2 + 3d^2(a-b+c) - d^3$$

Aufgabe 18. Die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Potenzierungen sollen nach dem Lehrsatze 15 — und soweit es die bis dahin aufgestellten Lehrsätze zulassen — ausgeführt werden.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $(3a-b+2c)^3 = (+3a)^3 + 3\cdot(-b)\cdot(+3a)^2 + 3\cdot(-b)^2\cdot(+3a) + (-b)^3 + 3\cdot(+2c)\cdot(3a-b)^2 + 3\cdot(+2c)^2\cdot(3a-b) + (+2c)^3 \ldots$

$= 3^3a^3 - 3.b.3^2.a^2 + 3b^2.3a - b^3 + 6c(3a-b)^2 + 3.2^2c^2(3a-b) + 2^3c^3$

$= 27a^3 - 27a^2b + 9ab^2 - b^3 + 6c(9a^2 - 6ab + b^2) + 12c^2(3a-b) + 8c^3$

$= 27a^3 - 27a^2b + 9ab^2 - b^3 + 54a^2c - 36abc + 6b^2c + 36ac^2 - 12bc^2 + 8c^3$

. . . man beachte den Lehrs. 15 **und versuche** bei den ungelösten Uebungs-Beispielen **das Endresultat sofort hinzuschreiben,** indem man die in den Resultaten der gelösten Beispiele durch die Klammern angedeuteten Operationen im Kopfe ausführt.

2). $\left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{3} + 1\right)^3 = \left(+\frac{x^3}{2}\right)^3 + 3\cdot\left(-\frac{x^2}{3}\right)\cdot\left(+\frac{x^3}{2}\right)^2 + 3\cdot\left(-\frac{+x^2}{3}\right)^2\cdot\left(+\frac{x^3}{2}\right) + \left(-\frac{x^2}{3}\right)^3 + 3\cdot(+1)\cdot\left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{3}\right)^2 + 3\cdot(+1)^2\cdot\left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{3}\right) + (+1)^3$

$= \frac{x^9}{2^3} - \frac{3x^2}{3}\cdot\frac{x^6}{2^2}\cdot + \frac{3.x^4}{3^2}\cdot\frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{3^3} + 3\left(\left(\frac{x^3}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{x^3}{2}\cdot\frac{x^2}{3} + \left(\frac{x^2}{3}\right)^2\right) + 3\cdot\left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{3}\right) + 1$

$= \frac{x^9}{8} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^7}{6} \underbrace{- \frac{x^6}{27} + \frac{3x^6}{4}}_{\text{addiert}} - x^5 + \frac{x^4}{3} + \frac{3x^3}{2} - x^2 + 1$

$= \frac{x^9}{8} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^7}{6} + \frac{77x^6}{108} - x^5 + \frac{x^4}{3} + \frac{3x^3}{2} - x^2 + 1$

3). $(3a^3 - 2a^2 + a - 1)^3 = (+3a^3)^3 + 3\cdot(-2a^2)\cdot(+3a^3)^2 + 3\cdot(-2a^2)^2\cdot(+3a^3) + (-2a^2)^3 + 3\cdot(+a)\cdot(+3a^3 - 2a^2)^2 + 3\cdot(+a)^2\cdot(+3a^3 - 2a^2) + (+a)^3 + 3\cdot(-1)\cdot(+3a^3 - 2a^2 + a)^2 + 3\cdot(-1)^2\cdot(+3a^3 - 2a^2 + a) + (-1)^3$

$= 3^3a^9 - 6a^2.3^2a^6 + 3.2^2.a^4.3.a^3 - 2^3a^6 + 3a(9a^6 - 12a^5 + 4a^4) + 3a^2(3a^3 - 2a^2) + a^3 - 3(9a^6 - 12a^5 + 4a^4 + 6a^4 - 4a^3 + a^2) + 3(3a^3 - 2a^2 + a) - 1$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

$$(3a - 2a^2 + a - 1)^3 = 27a^9 - 54a^8 + 36a^7 - 8a^6 + 27a^7 - 36a^6 + 12a^5 + 9a^5 - 6a^4 +$$
$$a^3 - 27a^6 + 36a^5 - 12a^4 - 18a^4 + 12a^3 - 3a^2 + 9a^3 - 6a^2 + 3a - 1$$
$$= 27a^9 - 54a^8 + 63a^7 - 71a^6 + 57a^5 - 36a^4 + 22a^3 - 9a^2 + 3a - 1$$

4). $462^3 = (400 + 60 + 2)^3 = 400^3 + 3 \,.\, 60 \,.\, 400^2 + 3 \,.\, 60^2 \,.\, 400 + 60^3 + \ldots$ man beachte den Zusatz 2, Seite 49.

$$3 \,.\, 2 \,.\, (400 + 60)^2 + 3 \,.\, 2^2 (400 + 60) + 2^3$$
$$= 64000000 + 180 \,.\, 160000 + 1200 \,.\, 3600 + 216000 +$$
$$6\,(160000 + 800 \,.\, 60 + 3600) + 12\,(400 + 60) + 8$$
$$= 64000000 + 28800000 + 4320000 + 216000 + 960000 +$$
$$288000 + 21600 + 4800 + 720 + 8$$
$$= 98611128$$

5). $(a + b + c)^3 = \ldots\ldots\ldots$?

6). $(a - b - c)^3 = \ldots\ldots\ldots$?

7). $(b - a - c)^3 = \ldots\ldots\ldots$?

8). $(c - a - b)^3 = \ldots\ldots\ldots$?

9). $(1 - 2a^2 + 3bc)^3 = \ldots\ldots\ldots$?

10). $(3a^2 - 2ab - c^2)^3 = \ldots\ldots\ldots$?

11). $(3a^2 - 2a^2b^2 + b^2)^3 = \ldots\ldots\ldots$?

12). $(ax^2 + bx + c)^3 = \ldots\ldots\ldots$?

13). $\left(\frac{2a}{5} - \frac{b}{5} + c\right)^3 = \ldots\ldots\ldots$?

14). $\left(\frac{2a^3b}{5c} + \frac{3bc^2}{2a} - \frac{3a^2b^2}{4c}\right)^3 = \ldots\ldots$?

15). $\left(\frac{a}{2} - \frac{2a^2}{3} + \frac{3a^3}{4}\right)^3 = \ldots\ldots\ldots$?

16). $(x - y + z - v)^3 = \ldots\ldots\ldots$?

17). $(2x - 3y + z - 4v)^3 = \ldots\ldots\ldots$?

18). $(x^4 - x^3 + x^2 - x)^3 = \ldots\ldots\ldots$?

19). $548^3 = \ldots\ldots\ldots$?

20). $362^3 = \ldots\ldots\ldots$?

21). $458^3 = ?\ \ldots\ldots\ldots$?

22). $1362^3 = \ldots\ldots\ldots$?

23). $5874^3 = \ldots\ldots\ldots$?

24). $1002^3 = \ldots\ldots\ldots$?

Lehrsatz 16. Hat man algebraische Summen in **höhere** Potenzen als in die zweite und dritte Potenz (siehe die Lehrsätze 12—15) zu erheben, so verfahre man entweder nach den diesem Lehrsatze nachfolgenden Zusätzen 1 bis 3 oder wie folgt:

1). Ist der Exponent eine solche Zahl, welche sich in die Faktoren zwei und drei zerlegen lässt, so führe man die angedeutete Potenzierung unter Benutzung des Lehrsatzes 11 mittelst wiederholter Anwendung der Lehrsätze 12—15 aus. — Man vergleiche hiermit die gelösten Uebungsbeispiele in der Aufgabe 19. —

2). Ist der Exponent eine solche Zahl, welche sich **nicht** in die Faktoren zwei und drei zerlegen lässt, so zerlege man die gegebene Potenz unter Benutzung des Lehrsatzes 6 (bezw. dessen Zusatzes 1) in ein Produkt solcher Potenzen, welche sich wenigstens teilweise nach dem vorstehenden unter 1). angegebenen Verfahren ausführen lassen und multipliziere schliesslich die übrig gebliebenen Produkte. — Man vergl. hiermit die gelösten Uebungsbeispiele in der Aufgabe 20.

Beweis. Die Beweise der einzelnen Teile dieses Lehrsatzes stützen sich, wie aus den gelösten Uebungsbeispielen in den Aufgaben 19 und 20 ersichtlich ist, auf die Lehrsätze 11 und 6.

Zusatz 1. **Jede** algebraische Summe kann man ohne Kenntnis der vorstehenden Lehrsätze 12—16 in eine beliebige Potenz erheben und zwar durch wiederholte Multiplikation, wenn man die Definition einer Potenz (siehe die Antworten der Fragen 1 und 2) berücksichtigt.

z. B.:

$(a-2x+3y)^3$ heisst nichts anderes als $(a-2x+3y)$ soll dreimal mit sich selbst multipliziert werden, angedeutet durch:

$$(a-2x+3y)^3 = (a-2x+3y)\cdot(a-2x+3y)\cdot(a-2x+3y)$$

Führt man diese angedeuteten Multiplikationen nach und nach (siehe Erkl. 33) aus und reduziert das erhaltene

Resultat, so erhält man dasselbe als wenn man den Lehrsatz 15 angewandt hätte.

Zusatz 2. Erhebt man nach den vorstehenden Lehrsätzen, bezw. nach dem Zusatze 1, das **Binomium** $(a+b)$ in eine Reihe aufeinanderfolgenden Potenzen, und zwar von 0 ab, so erhält man folgendes Schema:

Schema I.

$(a+b)^0 = 1$ (siehe den Zusatz 1, Seite 26)

$(a+b)^1 = a+b$ (s. d. letzte Beisp. in Antw. d. Frg. 2)

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ (siehe Lehrsatz 12, Behaupt. 1)

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (siehe Lehrsatz 13, „ 1)

$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$. . . (siehe Beispiel 1, Aufgabe 19)

$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$ („ „ 1, „ 20)

$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$ (s. Beispiel 2, Aufg. 19)

$(a+b)^7 = a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$

u. s. f., u. s. f. (s. Beispiel 2, Aufg. 20)

Aus dieser Zusammenstellung lässt sich das Bildungsgesetz für eine beliebige Potenz **eines Binoms** sofort erkennen, indem man nämlich nach der jeweiligen Potenzierung eine Reihe von Partialprodukten erhält, welche mit derjenigen Potenz des ersten Gliedes des Binoms, die gleich dem Exponenten ist mit welchem das Binom potenziert wurde beginnt und mit derselben Potenz des zweiten Gliedes des Binoms schliesst. Die zwischen diesen Potenzen liegenden Partialprodukte bestehen aus Potenzen von a und b, und zwar so, dass die Potenz von a regelmässig um eine Einheit fällt, während diejenige von b um eine Einheit steigt, die Summe der Exponenten in jedem Partialprodukt aber stets gleich dem Exponenten des Binoms bleibt.

Um ferner das Bildungsgesetz der **Koeffizienten** der erhaltenen Partialprodukte zu erkennen, schreibe man sich diese Koeffizienten aus dem Schema I in folgendem Schema II übersichtlich zusammen:

Schema II.

0	1							
I	1	1						
II	1	2	1					
III	1	3	3	1				
IV	1	4	6	4	1			
V	1	5	10	10	5	1		
VI	1	6	15	20	15	6	1	
VII	1	7	21	35	35	21	7	1

u. s. f., u. s. f.

Die römischen Ziffern in der vorderen Vertikalreihe bedeuten die Exponenten des Binoms $(a+b)$

Aus diesem Schema II ersieht man, dass jede Zahl, welche in demselben enthalten ist (d. i. jedesmal einer der gedachten Koeffizienten) gefunden werden kann, indem man die unmittelbar über ihr stehende zu der links von letzterer stehenden addiert (fehlt eine dieser Zahlen, so hat man sich 0 an deren Stelle gesetzt zu denken). Hiernach kann man aus der 1^ten^ Horizontalreihe vorstehenden Schemas II die 2^te^ Horizontalreihe, aus der 2^ten^ die 3^te^, aus der 3^ten^ die 4^te^, aus der 4^ten^ die 5^te^, aus der 5^ten^ die 6^te^ Horizontalreihe u. s. f. u. s. f. herleiten, mithin dieses Schema auf ganz mechanische Weise beliebig erweitern.

Mit Hülfe vorstehender Betrachtung kann man die Potenzierung eines Binoms (mit beliebigen Exponenten) auf rasche und mechanische Weise ausführen. — Man vergleiche die gelösten Uebungsbeispiele in der Aufgabe 21.

Bemerkt sei hier noch, dass vorstehendes Schema II, da es bei entsprechender Erweiterung die Koeffizienten eines beliebigen **Binoms** zu allen möglichen Potenzen enthält, „**Binomial-Koeffizienten-Tafel**“, und weil es die Form eines Dreiecks hat und von dem französischen Mathematiker *Pascal* zuerst aufgestellt worden sein soll, auch das „**Pascalsche Dreieck**“ (auch **arithmetisches Dreieck**) genannt wird.

. . . *Pascal*, ein französischer Mathematiker, geb. 19. Juli 1623 zu Clermont in Auvergne (gest. 1662), benutzte die Binomial-Koeffizienten-Tafel zur Lösung von Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeits-Rechnung und soll diese Tafel zuerst aufgestellt haben. Nach anderen Angaben soll er jedoch nicht der Erfinder dieser Tafel sein.

Vorstehendes Schema II wird auch oft in folgender Form geschrieben:

Binomial-Koeffizienten-Tafel.

0	1							
I	1	1						
II	1	2	1					
III	1	3	3	1				
IV	1	4	6	4	1			
V	1	5	10	10	5	1		
VI	1	6	15	20	15	6	1	
VII	1	7	21	35	35	21	7	1

u. s. f., u. s. f.

Die Bildung irgend eines Gliedes einer Horizontalreihe vorstehenden Schemas geschieht durch Addition der beiden unmittelbar über jenem Gliede stehenden Glieder der vorhergehenden Horizontalreihe, wie durch Striche angedeutet ist. Die äusseren Glieder jeder Horizontalreihe sind stets = 1.

Zusatz 3. Weitere und zwar einfacherere und sicherere Methoden zur Potenzierung algebraischer Summen bietet die höhere Mathematik. Diese Methoden sind unter dem Namen:

der binomische und
der polynomische Lehrsatz bekannt.

Man vergleiche hierüber den Teil der algebraischen Analysis, welcher über die **Kombinationslehre,** speziell über den binomischen und polynomischen Lehrsatz handelt.

Aufgabe 19. Die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Potenzierungen sollen nach der in dem Lehrsatze 16 unter 1). angegebenen Methode — und soweit es die bis dahin aufgestellten Lehrsätze zulassen — ausgeführt werden.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $(a+b)^4 = ((a+b)^2)^2 = (a^2+2ab+b^2)^2$ man beachte die Lehrs. 11, 12.

$= (a^2)^2 + 2 \, . \, 2ab \, . \, a^2 + (2ab)^2 + 2 \, . \, b^2 . \, a^2 +$

$2 \, . \, b^2 . \, 2ab + (b^2)^2$ man beachte den Lehrs. 14.

Uebungsbeispiele:	**Resultate:**	**Andeutungen:**

$$= a^4 + 4a^3b + 4a^2b^2 + 2a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \ldots\ldots$$

man addiere schliesslich noch die gleichen Glieder.

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

2). $(a+b)^6 = ((a+b)^3)^2 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)^2 \ldots\ldots$

$$= (a^3)^2 + 2 \cdot 3a^2b \cdot a^3 + (3a^2b)^2 + 2 \cdot 3ab^2 \cdot a^3 + 2 \cdot 3ab^2 \cdot 3a^2b + (3ab^2)^2 + 2 . b^3 . a^3 + 2 . b^3 . 3a^2b + 2 . b^3 . 3ab^2 + (b^3)^2$$

$$= a^6 + 6a^5b + 9a^4b^2 + 6a^4b^2 + 18a^3b^3 + 9a^2b^4 + 2a^3b^3 + 6a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

mithin ist:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

man beachte den Lehrs. 11, berücksichtige dabei, dass man ebensogut $(a+b)^6 = ((a+b)^2)^3$ hätte schreiben können, dass man aber nach dieser Schreibweise schliesslich ein Polynom in die dritte Potenz erheben müsste, während man nach der zuerst angegebenen Schreibweise schliesslich ein Polynom nur in die zweite Potenz zu erheben hat, somit das unter der Rubrik „Resultate" gezeigte Verfahren einfacher zur weiteren Ausführung ist. Dies beachte man auch bei späteren analogen Aufgaben.

3). $(a-b)^8 = (((a-b)^2)^2)^2 = ((a^2 - 2ab + b^2)^2)^2$

$$= (a^4 - 4a^3b + 4a^2b^2 + 2a^2b^2 - 4ab^3 + b^4)^2$$

$$= (a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4)^2$$

vor jeder weiteren Potenzierung untersuche man stets, ob nichts vereinfacht werden kann, indem hierdurch die weitere Rechnung abgekürzt wird.

$$= a^8 - 8a^7b + 16a^6b^2 + 12a^6b^2 - 48a^5b^3 + 36a^4b^4 - 8a^5b^3 + 32a^4b^4 - 48a^3b^5 + 16a^2b^6 + 2a^4b^4 - 8a^3b^5 + 12a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$$

mithin ist:

$$(a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$$

4). $(2a^2 - 3b^3)^6 = ((2a^2 - 3b^3)^3)^2 = (8a^6 - 3 \cdot 3b^3 \cdot (2a^2)^2 + 3 \cdot (3b^3)^2 \cdot 2a^2 - 27b^9)^2$

$$= (8a^6 - 36a^4b^3 + 54a^2b^6 - 27b^9)^2$$

$$= \text{u. s. f.} \ldots\ldots\ldots$$

man siehe die gelösten Beispiele in der Aufgabe 17.

5). $999^4 = (1000-1)^4 = ((1000-1)^2)^2$

$$= (1000^2 - 2 \cdot 1000 + 1^2)^2$$

$$= (1000^2 - 2000 + 1)^2$$

$$= 1000^4 - 2 \cdot 2000 \cdot 1000^2 + 2000^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1000^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2000 + 1^2$$

$$= 1000000000000 - 4000000000 + 4000000 + 2000000 - 4000 + 1$$

mithin ist:

$$999^4 = 996005996001$$

6). $(x+y)^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

7). $(a-b)^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

8). $(x-y)^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

9). $(x+1)^6 = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
10). $(1+a)^8 =$	?	
11). $(1-a)^8 =$	?	
12). $\left(\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}\right)^4 =$	?	
13). $\left(\frac{3}{5}m - \frac{5}{3}n\right)^4 =$	?	
14). $\left(\frac{3}{4}a - \frac{4}{3}b\right)^6 =$	?	
15). $(m+n+y)^4 =$	?	
16). $(m-n-y)^4 =$	?	
17). $(a+b+c)^6 =$	?	
18). $(a-b-c)^6 =$	?	
19). $(a+b+c+d)^4 =$	?	
20). $(x+3)^4+(x-3)^4 =$	?	man führe zuerst die durch die Klammern angedeuteten Potenzierungen aus, dann vereinfache man den erhaltenen Ausdruck.
21). $(a+x)^4-(a-x)^4 =$	?	
22). $(x+5)^4-(x-5)^4$	?	
23). $(a-2b)^6-(3a-4b)^6 =$	?	
24). $\left(\frac{2a^3bc^2}{3m^2n} - \frac{4m^3 . n}{ab^2c}\right)^6 =$	?	
25). $(2m-3n)^9 =$	?	
26). $(1-x)^{12} =$	?	
27). $58^4 =$	?	
28). $62^6 = (60+2)^6$	?	
29). $9999^4 =$	?	
30). $999^6 =$	?	

Aufgabe 20. Die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Potenzierungen sollen nach der in dem Lehrsatze 16 unter 2). angegebenen Methode — und soweit es die bis dahin aufgestellten Lehrsätze zulassen — ausgeführt werden.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $(a+b)^5 = (a+b)^{3+2} = (a+b)^3 . (a+b)^2$		man beachte den Zusatz 1, S. 16, dann die Lehrsätze 13 und 12, schliesslich führe man die angedeutete Multiplikation zusammengesetzter Grössen nach der Erkl. 33, S. 16, aus und addiere die gleichen Ausdrücke.

$$= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a^5 + 3a^4b + 3a^3b^2 + a^2b^3 + 2a^4b + 6a^3b^2 + 6a^2b^3 + 2ab^4 + a^3b^2 + 3a^2b^3 + 3ab^4 + b^5$$

$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

2). $(a+b)^7 = (a+b)^{6+1} = (a+b)^6 . (a+b)^1 = ((a+b)^3)^2 . (a+b)$

$= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)^2 . (a+b)$

$= (a^6 + 6a^5b + 9a^4b^2 + 6a^4b^2 + 18a^3b^3 + 9a^2b^4 + 2a^3b^3 + 6a^2b^4 + 6ab^5 + b^6) . (a+b)$

$= (a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6)(a+b)$

$= a^7 + 6a^6b + 15a^5b^2 + 20a^4b^3 + 15a^3b^4 + 6a^2b^5 + ab^6 + a^6b + 6a^5b^2 +$
$15a^4b^3 + 20a^3b^4 + 15a^2b^5 + 6ab^6 + b^7$

$= a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

3). $(2m - 3n)^5 = (2m - 3n)^{4+1} = (2m - 3n)^4 . (2m - 3n)^1 = ((2m - 3n)^2)^2 (2m - 3n)$

$= (4m^2 - 12mn + 9n^2)^2 . (2m - 3n)$

$= (16m^4 - 96m^3n + 144m^2n^2 + 72m^2n^2 - 216mn^3 + 81n^4) . (2m - 3n)$

$= (16m^4 - 96m^3n + 216m^2n^2 - 216mn^3 + 81n^4) . (2m - 3n)$

$= 32m^5 - 192m^4n + 432m^3n^2 - 432m^2n^3 + 162mn^4 - 48m^4n + 288m^3n^2 -$
$648m^2n^3 - 648mn^4 - 243n^5$

$= 32m^5 - 240m^4n + 720m^3n^2 - 1080m^2n^3 - 486mn^4 - 243n^5$

4). $\left(\frac{a}{b} - 1\right)^5 = \left(\frac{a}{b} - 1\right)^{3+2} = \left(\frac{a}{b} - 1\right)^3 \cdot \left(\frac{a}{b} - 1\right)^2$

$= \left(\frac{a^3}{b^3} - 3 \cdot \frac{a^2}{b^2} + 3 \cdot \frac{a}{b} - 1\right) \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} - 2 \cdot \frac{a}{b} + 1\right)$

$= \frac{a^5}{b^5} - 3\frac{a^4}{b^4} + 3\frac{a^3}{b^3} - \frac{a^2}{b^2} - 2\frac{a^4}{b^4} + 6\frac{a^3}{b^3} - 6\frac{a^2}{b^2} + 2\frac{a}{b} + \frac{a^3}{b^3} - 3\frac{a^2}{b^2} + 3\frac{a}{b} - 1$

$= \frac{a^5}{b^5} - 5\frac{a^4}{b^4} + 10\frac{a^3}{b^3} - 10\frac{a^2}{b^2} + 5\frac{a}{b} - 1$

5). $(a - b)^5 = \ldots\ldots\ldots$?

6). $(m + n)^7 = \ldots\ldots\ldots$?

7). $(a - t)^7 = \ldots\ldots\ldots$?

8). $(z - 3y)^5 = \ldots\ldots\ldots$?

9). $\left(\frac{2}{3}a - \frac{b}{2}\right)^5 = \ldots\ldots\ldots$?

10). $(a-b)^{10} = ((a-b)^5)^2 = ((a-b)^3 . (a-b)^2)^2 =$?

11). $\left(\frac{a}{2} - 1\right)^{11} = \left(\frac{a}{2} - 1\right)^{10} \cdot \left(\frac{a}{2} - 1\right)$

$= \left[\left(\frac{a}{2} - 1\right)^3 \cdot \left(\frac{a}{2} - 1\right)^2\right]^2 \cdot \left(\frac{a}{2} - 1\right) =$?

12). $(1 - x)^{13} = (1 - x)^{12} . (1 - x)$

$= (((1 - x)^3)^2)^2 . (1 - x) = \ldots$?

Aufgabe 21. Die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Potenzierungen **von Binomien** sollen nach den im Zusatze 2, Seite 62, aufgestellten Regel und mit Hülfe der sogenannten **Binomial-KoeffizIententafel**, Seite 64, ausgeführt werden.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $\left(\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}\right)^4$ soll ausgeführt werden . . .

Man schreibe $\left(\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}\right)^4$ in der Form:

$$\left(\left(+\frac{3}{4}x\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)\right)^4$$ — s. Erkl. 25, S. 13 —

und denke sich:

$$+\frac{3}{4}x = a \text{ und}$$

$$-\frac{2}{3} = b \text{ gesetzt;}$$

alsdann erhält man nach dem im Zusatze 2, Seite 62, angegebenen Bildungsgesetz, die Partialprodukte:

$$a^4 + a^3b^1 + a^2b^2 + a^1b^3 + b^4$$

Zur Bestimmung der den einzelnen Gliedern noch fehlenden Koeffizienten, beachte man, dass dieselben für eine 4te **Potenz** in der 4ten Horizontalreihe der Binomial-Koeffizietentafel Seite 64, enthalten sind. Hiernach erhält man für die angedeutete 4te Potenz:

$$(a+b)^4 =$$
$$1 \,.\, a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1 \,.\, b^4$$

Setzt man in diesen Ausdruck für a und b die Werte: $\left(+\frac{3}{4}x\right)$ und $\left(-\frac{2}{3}\right)$, so erhält man:

$$\left(\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}\right)^4 = 1 \,.\left(+\frac{3}{4}x\right)^4 + 4 \cdot \left(+\frac{3}{4}x\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^1 + 6 \,.\left(+\frac{3}{4}x\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 +$$
$$4 \,.\left(+\frac{3}{4}x\right)^1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 1 \,.\left(-\frac{2}{3}\right)^4$$
$$= \frac{81}{256}x^4 - \frac{9}{8}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{16}{81}$$

2). $$\left(\frac{2ab}{c} - \frac{c}{b}\right)^5 = 1 \cdot \left(+\frac{2ab}{c}\right)^5 + 5 \cdot \left(+\frac{2ab}{c}\right)^4 \cdot \left(-\frac{c}{b}\right)^1 + 10 \,.\left(+\frac{2ab}{c}\right)^3 \cdot \left(-\frac{c}{b}\right)^2 +$$
$$10 \cdot \left(+\frac{2ab}{c}\right)^2 \cdot \left(-\frac{c}{b}\right)^3 + 5 \,.\left(+\frac{2ab}{c}\right)^1 \cdot \left(-\frac{c}{b}\right)^4 + \left(-\frac{c}{b}\right)^5$$. . man verfahre analog wie im 1. Beispiele.

$$= \frac{2^5a^5b^5}{c^5} - \frac{5 \,.\, 2^4 \,.\, a^4b^4 \,.\, c}{c^4 \,.\, b} + \frac{10 \,.\, 2^3 \,.\, a^3b^3c^2}{c^3 \,.\, b^2} - \frac{10 \,.\, 2^2a^2b^2 \,.\, c^3}{c^2 \,.\, b^3} + \frac{5 \,.\, 2 \,.\, a \,.\, b \,.\, c^4}{c \,.\, b^4} - \frac{c^5}{b^5}$$

$$= \frac{32a^5b^5}{c^5} - \frac{80a^4b^3}{c^3} + \frac{80a^3b}{c} - \frac{40a^2c}{b} + \frac{10ac^3}{b^3} - \frac{c^5}{b^5}$$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

3). $\left(-\frac{m}{2}+n\right)^9 = 1\cdot\left(-\frac{m}{2}\right)^9+9\cdot\left(-\frac{m}{2}\right)^8\cdot\left(+n\right)^1+36\cdot\left(-\frac{m}{2}\right)^7\cdot\left(+n\right)^2+84\cdot\left(-\frac{m}{2}\right)^6\cdot$

$\left(+n\right)^3+126\cdot\left(-\frac{m}{2}\right)^5\cdot\left(+n\right)^4+126\cdot\left(-\frac{m}{2}\right)^4\cdot\left(+n\right)^5+84\cdot\left(-\frac{m}{2}\right)^3\cdot$

$\left(+n\right)^6+36\cdot\left(-\frac{m}{2}\right)^2\cdot\left(+n\right)^7+9\cdot\left(-\frac{m}{2}\right)^1\cdot\left(+n\right)^8+1\cdot\left(+n\right)^9$. . um die Koeffizienten der Partialprodukte zu erhalten, muss man die Koeffiziententafel, S. 64, um 2 Reihen erweitern.

$= -\frac{m^9}{512}+\frac{9m^8n}{256}-\frac{36m^7n^2}{128}+\frac{84m^6n^3}{64}-\frac{126m^5n^4}{32}+\frac{126m^4n^5}{16}-$

$\frac{84m^3n^6}{8}+\frac{36m^2n^7}{4}-\frac{9mn^8}{2}+n^9$

$= -\frac{m^9}{512}+\frac{9m^8n}{256}-\frac{9m^7n^2}{32}+\frac{21m^6n^3}{16}-\frac{63m^5n^4}{16}+\frac{63m^4n^5}{8}-$

$\frac{21m^3n^6}{2}+9m^2n^7-\frac{9mn^8}{2}+n^9$

4). $99^5 = (100-1)^5 = 100^5-5\,.\,100^4\cdot 1+10\,.\,100^3\,.\,1^2-10\,.\,100^2\,.\,1^3+5\,.\,100^1\,.\,1^4-1^5$

Die Glieder, in welchen eine **negative** Grösse in einer **ungeraden** Potenz als Faktor vorkommt, werden **negativ**, alle übrigen **positiv**.

$= 10000000000-500000000+10000000-100000+500-1$

$= 9509900499$

5). $101^6 = (100+1)^6 = 100^6+6\,.\,100^5\,.\,1+15\,.\,100^4\,.\,1^2+20\,.\,100^3\,.\,1^3+$

$15\,.\,100^2\,.\,1^4+6\,.\,100^1\,.\,1^5+1^6$

$= 1000000000000+60000000000+1500000000+$

$20000000+150000+600+1$

$= 1061520150601$

6). $(a+2b)^6 =$?

7). $(3a-4b)^6 =$?

8). $(a-b)^{11} =$?

9). $(1+y)^{12} =$?

10). $(2-3y)^5 =$?

11). $\left(\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b\right)^7 =$?

12). $(3a^3+6b^4c^2)^5 =$?

13). $\left(\frac{ab^2}{3c}-\frac{3c^2d}{b}\right)^4 =$?

14). $99^7 =$?

15). $999^5 =$?

16). $1001^6 =$?

17). $102^8 =$?

Erkl. 40. Hat man ein **Polynom** zu potenzieren, so braucht wohl kaum erwähnt zu werden, dass man dies dadurch bewerkstelligen kann, indem man mehrere Glieder des Polynoms als ein einziges Glied zusammenfasst und zwar so, dass die Potenzierung des gedachten Polynoms zunächst auf die Potenzierung eines Binoms zurückgeführt wird, wie in den Beweisen der Lehrsätze 14 und 15 bereits geschehen ist.

Man vergl. hiermit auch den Zusatz 3, S. 64.

z. B.:

In $(a-b+c)^4$ denke man sich:

$a-b=m$ gesetzt,

die Potenz: $(m+c)^4$ ausgeführt, alsdann für m seinen Wert $(a-b)$ substituiert und die vorkommenden Potenzen von $(a-b)$ ebenfalls ausgeführt.

Auf analoge Weise setze man:

$$\Big(\underbrace{2m-\frac{3^4}{n}+c^2-d}_{x}\Big)^6=(x-d)^6 \text{ u. s. f.}$$

10). Ueber die Differenz zweier Quadrate.

Lehrsatz 17. Multipliziert man die Summe zweier Grössen mit der Differenz derselben Grösse, so erhält man die **Differenz der Quadrate** beider Grössen.

Vorauss. Gegeben seien die Grössen: a und b

Behaupt. $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$

Beweis. Führt man die in dem Ausdrucke: $(a+b)\cdot(a-b)$ angedeutete Multiplikation nach der Erkl. 33, Seite 16, aus, so erhält man:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2+ab-ab+b^2$$

und hieraus ergibt sich nach gehöriger Reduktion, obige Behauptung:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$$

Zusatz 1. Durch Umkehrung des vorstehenden Lehrsatzes erhält man den für die Faktorenzerlegung, bezw. für Reduktionen so wichtigen Satz:

Die Differenz der Quadrate zweier Grössen kann man zerlegen in ein Produkt, bestehend aus: der Summe dieser Grössen mal der Differenz derselben, in Zeichen:

$$a^2-b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

Zusatz 2. Den im Zusatze 1 ausgesprochenen Satz kann man mit Vorteil bei der **Berechnung von Zahlenausdrücken** anwenden.

Hat man z. B.:

$$823^2-227^2$$

zu berechnen, so sind in dieser Schreibweise **zwei Multiplikationen** (Potenzierungen) und **eine Addition** erforderlich; schreibt man aber:

$$823^2-227^2 = (823+227)\,.\,(823-227)$$

so hat man nach der Schreibweise rechts **zwei Additionen** und **nur eine Multiplikation** auszuführen.

Man erhält hiernach:

$$823^2-227^2 = 1050\cdot 596$$
$$= 625800$$

Zusatz 3. Aus der mit vorstehendem Lehrsatze aufgestellten Eormel:

1). . . . $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$

folgt die weitere Formel:

2). . . . $a^2 = (a+b) \cdot (a-b) + b^2$

und diese Formel liefert ein Mittel **um die Quadrate von Zahlen rasch berechnen zu können.**

Hat man z. B.: 12^2 zu berechnen, so vertritt die Zahl 12 die Grösse a in vorstehender Formel 2).; für die Zahl b in dieser Formel wähle man nun eine solche Zahl, dass einer der Faktoren $(a+b)$ oder $(a-b)$ die Zahl 10 oder eine Potenz von 10 gibt, da sich mit einem solchen Faktor leicht multiplizieren lässt; für das zu berechnende Quadrat: 12^2 wird dies die Zahl 2 sein.

Nach vorstehender Formel 2). erhält man hiernach:

$$12^2 = (12+2).(12-2) + 2^2$$

oder: $12^2 = 14 . 10 + 4$

$12^2 = 140 + 4$

$12^2 = 144$ (siehe auch nebensteh. Beispiel).

Beispiel.

Zu berechnen sei: 97^2

In diesem Falle ist $a = 97$ und für b wähle man die Zahl 3.

Mit Hülfe nebenstehender Formel 2). erhält man:

$$97^2 = (97+3).(97-3) + 3^2$$

oder: $97^2 = 100 . 94 + 9$

$97^2 = 9400 + 9$

$97^2 = 9409$, was zu berechnen war.

Aufgabe 22. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Multiplikationen nach dem Lehrsatze 17 — und soweit es die bis dahin aufgestellten Lehrsätze zulassen — ausführen.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $(a^4 + b^3).(a^4 - b^3) = (a^4)^2 - (b^3)^2 = a^8 - b^8$

man denke sich z. B.: $a^4 = m$ und $b^3 = n$ gesetzt, alsdann erhält man: $(m+n)(m-n) = m^2 - n^2$ oder: $(a^4)^2 - (b^3)^2$

2). $(x^m + x^n).(x^m - y^n) = (x^m)^2 - (y^n)^2 = x^{2m} - y^{2n}$

3). $$\left(\frac{2a^2}{3} + \frac{4b^3}{5}\right) \cdot \left(\frac{2a^2}{3} - \frac{4b^3}{5}\right) = \left(\frac{2a^2}{3}\right)^2 - \left(\frac{4b^3}{5}\right)^2 = \frac{4a^4}{9} - \frac{16b^6}{25}$$

4). $$\Big(\underbrace{2(x+y)^3}_{a} + \underbrace{\frac{(m+n)^4}{3}}_{b}\Big) \cdot \Big(\underbrace{2(x+y)^3}_{a} - \underbrace{\frac{(m+n)^4}{3}}_{b}\Big) = \left(2(x+y)^3\right)^2 - \left(\frac{(m+n)^4}{3}\right)^2$$

$$= 4(x+y)^6 - \frac{(m+n)^8}{9}$$

$$= 4(x+y)^6 - \frac{1}{9}(m+n)^8$$

5). $(\underbrace{a^2 - 2b^3}_{m} + \underbrace{3c^4}_{n}).(\underbrace{a^2 - 2b^3}_{m} - \underbrace{3c^4}_{n}) = (a^2 - 2b^3)^2 - (3c^4)^2$. .

man fasse 2 Glieder (wie durch den Buchstaben m angedeutet ist) als ein einziges Glied zusammen, wonach man die Form: $(m+n).(m-n)$ erhält und den Lehrsatz 17 anwenden kann.

$= a^4 - 4a^2b^3 + 4b^6 - 9c^8$

die Quadratur des Binoms: $(a^2 - 2b^3)$ führe man nach dem Lehrsatze 12 aus.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

6). $(\underbrace{a^2-2ab-3ac}_{m}-\underbrace{c^2}_{n}).(\underbrace{a^2-2ab-3ac}_{m}+\underbrace{c^2}_{n}) = \ldots\ldots$

$= (a^2-2ab-3ac)^2-(c^2)^2$

$= a^4-4a^3b+4a^2b^2-6a^3c+12a^2bc+9a^2c^2-c^4$

man fasse drei Glieder, wie durch den Buchstaben m angedeutet ist, als ein einziges Glied zusammen, wonach man die Form: $(m+n).(m-n)$ erhält, dann wende man den Lehrsatz 17 und schliesslich Lehrsatz 14 an.

7). $(x^8+x^3).(x^8-x^3) = \ldots\ldots$?

8). $(a^3+b^2).(a^3-b^2) = \ldots\ldots$?

9). $(m^x+n^y).(m^x-n^y) = \ldots\ldots$?

10). $(3a^2+4b^3).(3a^2-4b^3) = \ldots$?

11). $(2x^4-3xy^2).(2x^4+3xy^2) = \ldots$?

12). $\left(\frac{2m^2}{3}+\frac{1}{2}n^3\right)\cdot\left(\frac{2m^2}{3}-\frac{1}{2}n^3\right) = \ldots$?

13). $(4a^2bc^3+3ab^2c).(4a^2bc^3-3ab^2c) =$?

14). $(2(m+n)^3+(x+y)^2).(2(m+n)^3-(x+y)^2) =$?

15). $\left(\frac{1}{2}(a-b)+\frac{2}{3}(x-y)^5\right)\cdot\left(\frac{1}{2}(a-b)-\frac{2}{3}(x-y)^5\right) =$?

16). $(a-b+c)\cdot(a-b-c) = \ldots$?

17). $(2a^2-3m+x)\cdot(2a^2-3m-x) = .$?

18). $\left(\frac{1}{2}x^2-y+\frac{2}{3}z\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-y-\frac{2}{3}z\right) =$?

19). $(a-b-c+d)\cdot(a-b-c-d) = .$?

20). $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+x^5\right)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}-x^5\right) =$?

Aufgabe 23. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten **Quadrierungen von Zahlen** nach dem in vorstehendem Zusatze 3 angegebenen Verfahren ausführen.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $17^2 = (17+3)\cdot(17-3)+3^2 \ldots\ldots$

$= 20\cdot 14+9$

$= 289$

man vergl. die im Zusatze 3, S. 71, berechneten Beispiele, berücksichtige dabei, dass die Zahl 3 **beliebig**, aber so wählbar ist, dass man eine Zahl erhält, mit welcher sich leicht multiplizieren lässt.

2). $78^2 = (78+2)\cdot(78-2)+2^2$

$= 80.76+4$

$= 6084$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
3). $103^2 = (103 - 3) \cdot (103 + 3) + 3^2$		
$= 100 \cdot 106 + 9$		
$= 10609$		
4). $323^2 = (323 - 23) \cdot (323 + 23) + 23^2$		Zur Berechnung von: 23^2 wiederhole man das Verfahren.
$= 300 \cdot 346 + (23 - 3) \cdot (23 + 3) + 3^2$		
$= 103800 + 20 \cdot 26 + 9$		
$= 103800 + 520 + 9$		
$= 104329$		
5). $579^2 = (579 + 21) \cdot (579 - 21) + 21^2$		Die Quadrierung der Zahl 21 kann man nach denselben Regeln sofort mit andeuten.
$= 600 \cdot 558 + (21 - 1) \cdot (21 + 1) + 1^2$		
$= 334800 + 440 + 1$		
$= 335241$		
6). $88^2 =$	?	
7). $105^2 =$	?	
8). $207^2 =$	?	
9). $1007^2 =$	?	
10). $443^2 =$	?	
11). $763^2 =$	?	
12). $895^2 =$	?	
13). $974^2 =$	?	
14). 513^2	?	
15). $1104^2 =$	?	

Anmerkung 5. Uebungsbeispiele für die Zusätze 1 und 2 des vorstehenden Lehrsatzes sind in den folgenden Abschnitten 11 und 12 enthalten.

11). Ueber die Zerlegung algebraischer Summen (deren Glieder Potenzen sind) in Faktoren.

Die Zerlegung **algebraischer Summen n Faktoren** bildet eine der wichtigsten Operationen, indem durch sie das Aufsuchen des grössten gemeinschaftlichen Teilers (siehe den Abschnitt 12), das Aufsuchen des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen zweier oder mehrerer

algebraischer Ausdrücke (s. Abschn. 13), das Heben von Brüchen (s. Abschn. 14) und die Reduktion gewisser algebraischer Ausdrücke (s. Abschn. 15) bewerkstelligt wird.

Man beachte hierbei folgende wichtigere Regeln:

Regeln für Faktorenzerlegung.

Regel 1. Kommen in den **sämmtlichen** Gliedern einer algebraischen Summe gemeinschaftliche Faktoren vor, so scheide man dieselben aus.

Man vergl. hierüber nebenstehendes Beispiel 1 und die Uebungsbeispiele in der Aufgabe 24.

Beispiel 1. Hat man:

$$7m^2n^3 - 14mn^2 - 21m^5n^4$$

so ist ersichtlich, dass die sämmtlichen Glieder dieser Summe die gemeinschaftlichen Faktoren: 7, m und n^2 enthalten, mithin kann schreiben:

$$7m^2n^3 - 14mn^2 - 21m^5n^4 =$$
$$7mn^2(mn - 2 + 3m^4n^2)$$

Von der Richtigkeit der ausgeführten Operation kann man sich dadurch überzeugen, wenn man nach der Erkl. 33, Seite 16, die in letzterem Ausdruck angedeutete Multiplikation ausführt.

Regel 2. Enthalten **nur einzelne** Glieder einer algebraischen Summe gemeinschaftliche Faktoren, so scheide man dieselben aus, jedoch so, dass man alsdann Glieder erhält, welche sämmtlich gemeinschaftliche Faktoren haben, indem man alsdann nach Regel 1 weiter verfahren kann. — Oft kommt es hierbei vor, dass man erst einzelne Glieder in mehrere weitere Summanden zerlegen muss, um nach der ersten Ausscheidung neue Glieder zu erhalten, welche sämmtlich gemeinschaftliche Faktoren haben.

Man vergl. hierüber nebenstehende Beispiele 2 und 3 und die Uebungsbeispiele in der Aufgabe 25.

Beispiel 2. Hat man:

$$bc - 2b^2 - ac + 2ab$$

so ersieht man, dass das 1., 2. und 3. Glied, ebenso das 3. und 4. Glied, je einen gemeinschaftlichen Faktor haben. — Nun kommt es darauf an, so auszuscheiden, dass man in den sämmtlichen neu entstehenden Gliedern einen gemeinschaftlichen Faktor erhält.

Bei einiger Uebung wird man finden, dass dies erreicht wird, wenn man aus dem 1. und 2. Gliede den Faktor: b, aus dem 3. und 4. Gliede den Faktor: $-a$ ausscheidet. Hiernach erhält man:

$$bc - 2b^2 - ac + 2ab = b\cdot(c - 2b) - a\cdot(c - 2b)$$

oder nach Regel 1:

$$bc - 2b^2 - ac + 2ab = (c - 2b)\cdot(b - a)$$

Von der Richtigkeit der ausgeführten Operation kann man sich dadurch überzeugen, wenn man nach der Erkl. 33, Seite 16, die in letzterem Ausdruck angedeutete Multiplikation ausführt.

Beispiel 3. Hat man:

$$2a^3 - 7a^2 + 8a - 4, \text{ so setze man:}$$

$$2a^3 - 7a^2 + 8a - 4 =$$
$$2a^3 - 4a^2 - 3a^2 + 6a + 2a - 4$$

denn hierdurch erhält man bei erstmaliger Ausscheidung:

$$2a^3 - 7a^2 + 8a - 4 =$$
$$a(2a^2 - 3a + 2) - 2(2a^2 - 3a + 2)$$

und schliesslich nach Regel 1:

$$2a^3 - 7a^2 + 8a - 4 = (2a^2 - 3a + 2)\cdot(a - 2)$$

Regel 3. Hat man eine algebraische Summe und man ersieht, dass dieselbe aus der **Differenz zweier Quadrate** besteht, so kann man dieselbe nach dem Zusatze 1, Seite 70, in das Produkt zerlegen, welches besteht aus der Summe der Basen mal der Differenz der Basen jener Quadrate.

Man vergl. hierüber nebenstehendes Beispiel 4 und die Uebungsbeispiele in den Aufgaben 26 und 27.

Beispiel 4. Hat man:

$$16a^2 - 9b^2$$

so ist ersichtlich, dass dieser Ausdruck die Differenz zweier Quadrate, nämlich dass:

$$16a^2 - 9b^2 = (4a)^2 - (3b)^2 \text{ ist,}$$

mithin erhält man nach nebenstehender Regel:

$$16a^2 - 9b^2 = (4a)^2 - (3b)^2 = (4a + 3b) \cdot (4a - 3b)$$

Regel 4. Hat man algebraische Summen und man ersieht, dass dieselben von der Form:

a). $a^2 \pm 2ab + b^2$

oder von den Formen:

b). . . $+a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

c). . . $-a^3 + 3a^2b \pm 3ab^2 + b^3$ sind,

so beachte man, dass nach dem Lehrsatze 12 für den Ausdruck unter a). die Formel:

1). . . $a^2 \pm 2ab + b^2 = (\pm a \pm b)^2$

und nach dem Lehrs. 13 für die Ausdrücke unter b). und c)., die Formeln:

2). $+a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$

bezw.

3). $-a^3 + 3a^2b \pm 3ab^2 + b^3 = (\pm a + b)^3$

bestehen.

Man vergl. hierüber nebenstehendes Beispiel 5 und die Uebungsbeispiele in der Aufgabe 28.

Beispiel 5. Hat man:

$$4m^2 + 12mn + 9n^2$$

so kann man hierfür entweder:

a). $(+2m)^2 + 2 \cdot (+2m) \cdot (+3n) + (+3n)^2$

oder:

b). $(-2m)^2 + 2(-2m) \cdot (-3n) + (-3n)^2$

setzen.

Aus diesen Ausdrücken erhält man nach nebenstehender Formel 1)., entweder:

$$4m^2 + 12mn + 9n^2 = (+2m)^2 + 2 \cdot (+2m) \cdot (+3n) + (+3n)^2 = (2m + 3n)^2$$

oder:

$$4m^2 + 12mn + 9n^2 = (-2m)^2 + 2 \cdot (-2m) \cdot (-3n) + (-3n)^2 = (-2m - 3n)^2$$

Man beachte hierbei, dass für solche Ausdrücke, wie:

$$4m^2 + 12mn + 9n^2$$

sowohl: $(2m + 3n)^2$, als auch:

$(-2m - 3n)^2$ gesetzt werden kann.

Analog kann man für den Ausdruck:

$$4m^2 - 12mn + 9n^2$$

sowohl: $(2m - 3n)^2$, als auch:

$(-2m + 3n)^2$ setzen.

Man vergl. hierüber den Zusatz 1, Seite 48.

Erkl. 41. Auch die mit den Lehrsätzen 14, 15 und 16 entwickelten Formeln lassen sich in analoger Weise zur Faktorenzerlegung benutzen, kommen jedoch seltener vor.

Regel 5. Hat man algebraische Summen, welche

a). aus der Summe zweier ungeraden Potenzen mit gleichen Exponenten, wie z. B.:

$$a^3 + b^3$$

b). aus der Differenz zweier ungeraden Potenzen mit gleichen Exponenten, wie z. B.:

$$a^3 - b^3$$

c). aus der Differenz zweier gera-

den Potenzen mit gleichen Exponenten, wie z. B.:

$$a^4 - b^4$$

bestehen, so beachte man die auf Seite 36 u. 37 für die Beispiele 77—89 aufgestellten Sätze 1—4:

Satz 1. Die Summe zweier ungeraden Potenzen mit gleichen Exponenten ist stets ohne Rest teilbar durch die Summe ihrer Basen.

z. B.: Dividend : Divisor = Quotient

$$\begin{array}{l|l} a^3 + b^3 & a + b \\ \hline a^3 + a^2 b & a^2 - ab + b^2 \\ - \quad - & \\ \hline -a^2 b + b^3 & \\ -a^2 b - ab^2 & \\ + \quad + & \\ \hline ab^2 + b^3 & \\ ab^2 + b^3 & \\ - \quad - & \\ \hline \end{array}$$

. . geht ohne Rest auf

mithin besteht die Formel:

1). $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$

in analoger Weise erhält man die Formel:

2). $a^5 + b^5 = (a + b) \cdot (a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - ab^3 + b^4)$

u. s. f.

Satz 2. Die Differenz zweier ungeraden Potenzen mit gleichen Exponenten ist stets ohne Rest teilbar durch die Differenz ihrer Basen.

z. B.:

$$\begin{array}{l|l} a^3 - b^3 & a - b \\ \hline a^3 - a^2 b & a^2 + ab + b^2 \\ - \quad + & \\ \hline a^2 b - b^3 & \\ a^2 b - ab^2 & \\ - \quad + & \\ \hline ab^2 - b^3 & \\ ab^2 - b^3 & \\ - \quad + & \\ \hline \end{array}$$

. . geht ohne Rest auf

mithin besteht die Formel:

3). . $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

in analoger Weise besteht die Formel:

4). $a^5 - b^5 = (a - b) \cdot (a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4)$

u. s. f.

Satz 3. Die Differenz zweier geraden Potenzen mit gleichen Exponenten ist stets ohne Rest teilbar durch die Differenz ihrer Basen.

Beispiel 6. Hat man:

$$8m^3 - x^3$$

so kann man hierfür schreiben:

$$8m^3 - x^3 = (2m)^3 - x^3$$

Setzt man nun in nebenstehender Formel 3).

für $a = 2m$ und
für $b = x$,

so erhält man:

$$8m^3 - x^3 = (2m)^3 - x^3 = (2m - x) \cdot (4m^2 + 2mx + x^2)$$

Beispiel 7. Hat man:

$$m^4 - n^4$$

so kann man entweder nach umstehender Formel 5). hierfür schreiben:

a). $m^4 - n^4 = (m - n) \cdot (m^3 + m^2 n + mn^2 + n^3)$

oder man kann nach umstehender Formel 7). hierfür schreiben:

b). $m^4 - n^4 = (m + n) . (m^3 - m^2 n + mn^2 - n^3)$

Zerlegt man nun noch die Klammerwerte:

$(m^3 + m^2 n + mn^2 + n^3)$ und
$(m^3 - m^2 n + mn^2 - n^3)$

nach der Regel 2 weiter in Faktoren, so erhält man:

$m^4 - n^4 = (m - n) \cdot [m^2 (m + n) + n^2 (m + n)]$

oder:

c). . . $m^4 - n^4 = (m - n) \cdot (m + n) \cdot (m^2 + n^2)$

ebenso erhält man:

$m^4 - n^4 = (m + n) \cdot [m^2 (m - n) + n^2 (m - n)]$

oder:

d). . . $m^4 - n^4 = (m + n) \cdot (m - n) \cdot (m^2 + n^2)$

Aus den Gleichungen unter c). und d). ersieht man, dass es ganz gleichgültig ist, ob man bei derartigen Ausdrücken, wie:

$$m^4 - n^4$$

die Formel 5 oder die Formel 7 (Seite 77) anwendet.

Zerlegt man endlich den gegeb. Ausdruck:

$$m^4 - n^4$$

nach der Regel 3, so erhält man:

$m^4 - n^4 = (m^2)^2 - (n^2)^2 = (m^2 + n^2) \cdot (m^2 - n^2)$

oder:

f). . . $m^4 - n^4 = (m^2 + n^2) \cdot (m^2 - n^2) = (m^2 + n^2) \cdot (m + n) \cdot (m - n)$

z. B.:

$$\begin{array}{l|l}
a^4 - b^4 & a - b \\ \hline
a^4 - a^3b & a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 \\
- \quad + & \\ \hline
a^3b - b^4 & \\
a^3b - a^2b^2 & \\
- \quad + & \\ \hline
a^2b^2 - b^4 & \\
a^2b^2 - ab^3 & \\
- \quad + & \\ \hline
ab^3 - b^4 & \\
ab^3 - b^4 & \\
- \quad + & \\ \hline
= \quad = & \text{geht ohne Rest auf,}
\end{array}$$

mithin besteht die Formel:

5). $a^4 - b^4 = (a-b) \cdot (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

in analoger Weise erhält man die Formel:

6). $a^6 - b^6 = (a-b) \cdot (a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$ (siehe die Erkl. 42)

u. s. f.

Satz 4. Die Differenz zweier geraden Potenzen mit gleichen Exponenten ist stets ohne Rest teilbar durch die Summe ihrer Basen.

z. B.:

$$\begin{array}{l|l}
a^4 - b^4 & a + b \\ \hline
a^4 + a^3b & a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 \\
- \quad - & \\ \hline
-a^3b - b^4 & \\
-a^3b - a^2b^2 & \\
+ \quad + & \\ \hline
a^2b^2 - b^4 & \\
a^2b^2 + ab^3 & \\
- \quad - & \\ \hline
-ab^3 - b^4 & \\
-ab^3 - b^4 & \\
+ \quad + & \\ \hline
= \quad = & \text{geht ohne Rest auf,}
\end{array}$$

mithin besteht die Formel:

7). $a^4 - b^4 = (a+b) \cdot (a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$

in analoger Weise erhält man die Formel:

8). $a^6 - b^6 = (a+b) \cdot (a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)$ (siehe die Erkl 42.)

u. s. f.

Man vergl. hierüber umstehende Beispiele 6 und 7, ebenso die Uebungsbeispiele in der Aufgabe 29 und beachte die Erkl. 42.

Erkl. 42. Da man die Differenz zweier geraden Potenzen stets in die **Differenz zweier Quadrate** zerlegen kann, so kann man auch derartige algebraische Summen mittelst der Regel 3 zerlegen, was viel rascher und sicherer ist, deshalb in Zukunft stets geschehen soll. — Man vergl. hierüber das Beispiel 7.

nämlich dasselbe Resultat, wie unter c). und d). auf viel raschere und sichere Weise. — **Man beachte deshalb bei derartigen Ausdrücken die Erklärung 42.**

Regel 6. Wird die durch:

$$(x+a)\cdot(x+b)$$

angedeutete Multiplikation ausgeführt und das Resultat nach Potenzen der Grösse x geordnet, so erhält man:

$$(x+a)\cdot(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

Hat man umgekehrt eine algebraische Summe von der Form:

$$x^2+(a+b)x+ab$$

nämlich eine solche Summe in welcher das 1ste Glied irgend eine Grösse im Quadrat, das 2te Glied aber ein Produkt ist, welches aus jener Grösse und einem anderen Faktor besteht, der sich in zwei Summanden zerlegen lässt, die miteinander multipliziert das 3te Glied ergeben, so kann man derartige algebraische Summen in Faktoren zerlegen, indem man:

1). . $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)\cdot(x+b)$

setzt.

Man vergl. hiermit nebenstehende Beispiele 8 und 9, sowie die Uebungsbeispiele in der Aufgabe 30 und die Regel 7, auch beachte man die Erkl. 43.

Beispiel 8. Hat man:

$$x^2+4x+3$$

so ist dies eine mit der in nebenstehender Regel gegebene übereinstimmende Form.

Der Faktor von x, nämlich 4, muss nach derselben in 2 solche Summanden zerlegt werden, deren Produkt gleich dem 3. Gliede ist; man wird sofort erkennen, dass diese Summanden 3 und 1 sind. Hiernach erhält man:

$$x^2+4x+3=x^2+(3+1)\cdot x+3\cdot 1$$

oder:

$$x^2+4x+3=x^2+3x+1x+3\,.\,1$$

Wendet man nun Regel 2 an, so erhält man:

$$x^2+4x+3=x(x+1)+3(x+1)$$

oder:

$$x^2+4x+3=(x+3)\cdot(x+1)$$

Man vergl. hiermit nebenstehende Formel 1). und denke sich in derselben $a=3$ und $b=1$ gesetzt.

Beispiel 9. Hat man:

$$x^2+3x-4$$

so ist dies eine mit der in nebenstehender Regel gegebene übereinstimmende Form.

Der Faktor von x, nämlich 3, muss nach derselben in zwei solche Summanden zerlegt werden, deren Produkt gleich dem 3. Gliede ist; man wird bald erkennen, dass diese Summanden: $+4$ und -1 sind. Hiernach erhält man:

$$x^2+3x-4=x^2+(4-1)x+(+4)\cdot(-1)$$

oder:

$$x^2+3x-4=x^2+4x-1x+(+4)\cdot(-1)$$

Wendet man nun Regel 2 an, so erhält man:

$$x^2+3x-4=x\cdot(x-1)+4\cdot(x-1)$$

oder:

$$x^2+3x-4=(x+4)\cdot(x-1)$$

Man vergl. hiermit nebenstehende Formel 1). und denke sich in derselben: $a=4$ und $b=-1$ gesetzt.

Regel 7. Hat man eine algebraische Summe von der Form:

$$x^2+ax+b$$

nämlich eine solche algebraische Summe, welche mit der in Regel 6 gegebenen Form (siehe auch die Beispiele 8 und 9) übereinstimmt und nur noch allgemeiner gehalten ist, und man kann nicht sofort den bei x stehenden Faktor a in zwei solcher Summanden zerlegen,

Beispiel 10. Hat man:

$$x^2+4x+3$$

so setze man:

$$x^2+4x+3=x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2+3$$

Hiernach erhält man:

$$x^2+4x+3=\left(x+\frac{4}{2}\right)^2-\frac{16}{4}+3$$

oder:

deren Produkt gleich dem 3ten Gliede b ist, so verfahre man wie folgt:

Man addiere und subtrahiere zu dem gegebenen Ausdruck das Quadrat des halben Koeffizienten von x, dann erhält man:

$$x^2 + ax + b =$$

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b$$

Da nun die 3 ersten Glieder rechts das Quadrat eines Binoms, nämlich: $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2$ vorstellen, so erhält man:

$$x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b$$

oder:

$$x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b\right]$$

Stellen nun die Buchstaben a und b solche Zahlen vor, dass: $\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b\right]$ ein Quadrat, z. B. $= m^2$ ist, so wird:

$$x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - m^2$$

und hieraus erhält man nach der Regel 3:

$$x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2} + m\right) \cdot \left(x + \frac{a}{2} - m\right)$$

Man vergl. hierüber nebenstehende Beispiele 10 und 11, die Uebungsbeispiele in der Aufgabe 31 und beachte die Erkl. 43.

Erkl. 43. Aus den Beispielen 8 und 10, bezw. aus 9 und 11 ersieht man, dass die Regeln 6 und 7 für ein und dieselben Ausdrücke angewandt werden und dass die Regel 7 sicherer aber umständlicher zum Ziele führt als Regel 6.

Die Regel 7 wird deshalb besonders in den Fällen angewandt in welchen man nicht sofort, oder wenigstens nicht leicht, den Faktor von x, nämlich a, in zwei Summanden zerlegen kann, deren Produkt gleich dem 3ten Gliede b ist.

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 1^2$$

Folglich ist nach der Regel 3:

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 2 + 1) \cdot (x + 2 - 1)$$

oder:

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 3) \cdot (x + 1)$$

Man vergl. hiermit das Resultat des Beispiels 8 und siehe die Erkl. 43.

Beispiel 11. Hat man:

$$x^2 + 3x - 4$$

so setze man:

$$x^2 + 3x - 4 = x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4$$

Hiernach erhält man:

$$x^2 + 3x - 4 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4$$

oder:

$$x^2 + 3x - 4 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4$$

$$x^2 + 3x - 4 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

$$x^2 + 3x - 4 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

Folglich ist nach der Regel 3:

$$x^2 + 3x - 4 = \left(x + \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right)$$

oder:

$$x^2 + 3x - 4 = (x + 4) \cdot (x - 1)$$

Man vergl. hiermit das Resultat des Beisp. 9 und siehe die Erkl. 43.

Regel 8. Wird die durch:

$$(ax + b) \cdot (cx + d)$$

angedeutete Multiplikation ausgeführt und nach x geordnet, so erhält man:

$$(ax + b) \cdot (cx + d) =$$
$$acx^2 + (bc + ad) \cdot x + bd$$

Hat man umgekehrt algebraische Summen von der Form:

$$acx^2 + (bc + ad)x + bd$$

nämlich eine solche Summe in welcher das 1te Glied irgend eine Grösse (x), **im Quadrat** (x^2), das 2te Glied dieselbe Grösse (x) und einen Faktor enthält, der aus der Summe zweier solcher Produkte besteht, dass jedes dieser Produkte einen Faktor enthält, der im 1ten und 3ten Gliede enthalten ist, so beachte man, dass derartige Summen nach der Formel:

$$1) \ldots acx^2 + (bc + ad) \cdot x + bd =$$
$$(ax + b) \cdot (cx + d)$$

in Faktoren zerlegt werden können.

Man vergl. hierüber nebenstehendes Beispiel 12, sowie die Uebungsbeispiele in der Aufgabe 32, Regel 9 und die Erkl. 44.

Beispiel 12. Hat man:

$$6x^2 + x - 15$$

so ist nach dem allgemeinen Beispiele in nebenstehender Regel:

$$\begin{array}{r} 6 = ac \\ -15 = bd \\ \hline 6 \cdot -15 = acbd \end{array}$$

Somit hat man das Produkt der vier in Frage kommenden Grössen a, c, b, d, mit:

$$a) \ldots \quad a \cdot b \cdot c \cdot d = 6 \cdot -15 = -90$$

für das gegebene Beispiel gefunden.

Nun müssen die Produkte bc und ad so gewählt werden, dass ihre Summe für das gegebene Beispiel $= +1$, nämlich gleich dem Faktor wird, welcher im 2. Gliede bei x steht.

Hierbei hat man jedoch zu beachten:

da das Produkt $abcd$ **negativ** ($= -90$) ist, die Summe von $bc + ad$ aber **positiv** ($= +1$) sein soll, so müssen die zu bestimmenden Produkte bc und ad **ungleiche** Vorzeichen haben, und muss das grössere dieser Produkte das Vorzeichen **plus** erhalten.

Man wird nach einiger Ueberlegung finden, dass man dementsprechend

$$bc = +10$$
$$ad = -9 \quad \text{wählen muss.}$$

Hiernach setze man:

$$6x^2 + x - 15 = 6x^2 + (10 - 9) \cdot x - 15$$

oder:

$$6x^2 + x - 15 = 6x^2 + 10x - 9x - 15$$

Wendet man Regel 2 an, so wird:

$$6x^2 + x - 15 = 2x(3x + 5) - 3(3x + 5)$$

oder:

$$6x^2 + x - 15 = (2x - 3) \cdot (3x + 5)$$

Regel 9. Hat man eine algebraische Summe von der Form:

$$ax^2 + bx + c$$

nämlich eine solche Summe, welche mit der in Regel 8 gegebenen Form (siehe auch Beisp. 12) übereinstimmt und nur

noch **allgemeiner** gehalten ist, weshalb man die bei der etwaigen Faktorenzerlegung nötigen Beziehungen zwischen den Grössen a, b und c nicht erkennen kann, so verfahre man wie folgt:

Man scheide nach der Regel 10 den Faktor, welcher bei x^2 steht aus, wonach man erhält:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Dann zerlege man den Klammerwert:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

welcher mit der durch Regel 7 bedingten Form übereinstimmt, nach dieser Regel 7 in Faktoren.

Man vergl. hiermit nebenstehendes Beispiel 13, sowie die Uebungsbeispiele in der Aufgabe 33, die Regel 8 und die Erkl. 44.

Beispiel 13. Hat man:

$$6x^2 + x - 15$$

so setze man nach der Regel 10:

$$6x^2 + x - 15 = 6\cdot\left(x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{15}{6}\right)$$

Wendet man zur Zerlegung des Klammerwerts die Regel 7 an, so erhält man:

$$6x^2 + x - 15 =$$

$$6\cdot\left(x^2 + \frac{1}{6}x + \left(\frac{1}{12}\right)^2 - \left(\frac{1}{12}\right)^2 - \frac{15}{6}\right)$$

oder:

$$6x^2 + x - 15 = 6\cdot\left[\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{1}{144} - \frac{15}{6}\right]$$

$$6x^2 + x - 15 = 6\cdot\left[\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{361}{144}\right]$$

$$6x^2 + x - 15 = 6\cdot\left[\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 - \left(\frac{19}{12}\right)^2\right]$$

Folglich ist nach Regel 3:

$$6x^2 + x - 15 =$$

$$6\cdot\left(x + \frac{1}{12} + \frac{19}{12}\right)\cdot\left(x + \frac{1}{12} - \frac{19}{12}\right)$$

oder:

$$6x^2 + x - 15 = 6\cdot\left(x + \frac{20}{12}\right)\cdot\left(x - \frac{18}{12}\right)$$

$$6x^2 + x - 15 = 6\cdot\left(x + \frac{5}{3}\right)\cdot\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Zerlegt man schliesslich noch den Faktor 6 in 2 . 3 und multipliziert den ersten Klammerwert mit 3, den zweiten mit 2, damit die Nenner 3 und 2 wegfallen, so erhält man:

$$6x^2 + x - 15 = (3x + 5)\cdot(2x - 3)$$

Man vergl. hiermit das Resultat desselben Beispiels 12 und die Erkl. 44.

Erkl. 44. Aus den Beispielen 12 und 13 ersieht man, dass die Regeln 8 und 9 für ein und dieselben Ausdrücke angewandt werden und dass die Regel 9 **sicherer** aber **umständlicher** zum Ziele führt als Regel 8.

Die Regel 9 wird deshalb besonders in den Fällen angewandt in welchen man **nicht sofort, oder wenigstens nicht leicht**, den Faktor von x, nämlich b, in die Summe zweier solcher Produkte zerlegen kann, von welchen je ein Faktor in den Grössen a und c enthalten sind.

Regel 10. Hat man eine algebraische Summe von der Form:

$$a+b$$

und man will dieselbe in Faktoren zerlegen, so denke man sich einen der Summanden (a oder b) mit dem anderen multipliziert und dividiert, alsdann lässt sich nach der Regel 1 ein gemeinschaftlicher Faktor ausscheiden.

Hiernach erhält man:

$$1)\ldots\ a+b=a+\frac{a\cdot b}{a}=a\left(1+\frac{b}{a}\right)$$

oder:

$$2)\ldots\ a+b=\frac{b\cdot a}{b}+b=b\left(\frac{a}{b}+1\right)$$

Beispiel 14. Hat man:

$$(a+b)^n$$

so kann man nach nebenstehender Regel 10 schreiben:

$$(a+b)^n=\left(a+\frac{ab}{a}\right)^n=\left(a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^n$$

$$=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$$

oder man kann auch schreiben:

$$(a+b)^n=\left(\frac{b\cdot a}{b}+b\right)^n=\left(b\left(\frac{a}{b}+1\right)\right)^n$$

$$=b^n\left(\frac{a}{b}+1\right)^n$$

Erkl. 45. Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, dass vorstehende Regeln mehrmals und in gegenseitiger Verbindung bei der Faktorenzerlegung algebraischer Summen zur Anwendung kommen können.

Erkl. 46. Es soll nicht gesagt sein, dass mit vorstehenden Regeln sämmtliche Regeln über Faktorenzerlegung aufgestellt sind, denn deren Zahl ist sozusagen unendlich. Es sind mit diesen Regeln nur die wichtigsten in der Elementarmathematik vorkommenden Regeln vorgeführt. — Die Theorie der höheren Gleichungen, die Goniometrie etc. geben weitere Mittel an die Hand, algebraische Ausdrücke in Faktoren zu zerlegen.

Anmerkung 6. Wie aus den die vorstehenden Regeln begleitenden Beispielen ersichtlich ist, gehört zur Faktorenzerlegung algebraischer Ausdrücke eine bedeutende Gewandtheit und Fertigkeit; in nachstehenden Aufgaben ist deshalb eine grosse Anzahl von Uebungsbeispielen vorgeführt, welche teilweise nach diesen Regeln in Faktoren zerlegt sind, teilweise noch zerlegt werden sollen. —

Einige besondere Fälle von Faktorenzerlegungen sind noch bei diesen Uebungsbeispielen enthalten.

Aufgabe 24. Man soll nach der auf Seite 74 angeführten **Regel 1** die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen algebraischen Summen in Faktoren zerlegen:

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $ax^2 + bx^2 - cx^2 - x^2 = x^2(a + b - c - 1)$ man beachte, dass x^2 den Faktor: 1 bei sich hat.

2). $3a^2b^6 - 6a^3b^5 + 9a^4b^4 = 3a^2b^4(b^2 - 2ab + 3a^2)$

3). $ax^n + bx^{n+1} + cx^{n+2} = x^n(a + bx + cx^2)$ man beachte, dass z. B.: $x^{n+2} = x^n . x^2$ ist, siehe Zusatz 1, Seite 16.

4). $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} = x^{n-2}(ax^2 + bx + c)$ man beachte, dass x^{n-2} als niedrigste Potenz in allen Gliedern als gemeinschaftl. Faktor enthalten ist und dass z. B.: $\frac{x^{n-1}}{x^{n-2}} = x^{n-1-(n-2)} = x^1 = x$ ist.

5). $2(a+b)^3 - 6(a+b)^2 + 8(a+b) =$

$2(a+b) \cdot ((a+b)^2 - 3(a+b) + 4)$ man beachte, dass $2.(a+b)$ ein gemeinschaftlicher Faktor aller Glieder ist.

6). $ax^3 + bx^2 + x^2 =$?

7). $2m^4 - m^4 =$?

8). $4a^2 + 12ab - 6ab^2 =$?

9). $3a^2b - 4a^3b^5 + a^2b^4 =$?

10). $6a^2b - 12ab^2 + 9a^2b^2 =$?

11). $24ab^2c - 20a^2b^2c^2 - 12b^2c =$. . ?

12). $am^x + bm^{x+1} + cm^{x+2} =$? man beachte, dass m^x ein gemeinschaftlicher Faktor ist.

13). $am^x + bm^{x+p} + cm^{x+2} =$?

14). $am^x + bm^{x-1} - cm^{x-2} =$?

15). $21a^6x^5y^n - 28a^4x^7y^{n+1} - 42a^3x^8y^{n+2} =$?

16). $6a^2(b+c) - 12a(b+c) + 9a^2(b+c) =$?

Aufgabe 25. Man soll nach der auf Seite 74 angeführten **Regel 2** die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen algebraischen Summen in Faktoren zerlegen.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $ax - 2b + 2a - bx = x(a - b) + 2(a - b)$ aus dem 1. und 4. Gliede scheide man x, aus dem 2. und 3. Gliede 2 aus.

$= (a - b) \cdot (x + 2)$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
2). $90x^2 - 25ax - 288bx + 80ab$	$= 18x(5x - 16b) - 5a(5x - 16b)$ $= (5x - 16b) \cdot (18x - 5a)$	im 2. und 3. Gliede scheide man nicht $5a$, sondern: $-5a$ aus.
3). $x^3 - 2x^2 - 2x + 2$	$= x^2(x - 2) - 2(x - 2)$ $= (x - 2) \cdot (x^2 - 2)$	
4). $12ac - 6bc - 8ab + 4b^2$	$= 2(6ac - 3bc - 4ab + 2b^2)$. . $= 2 \cdot [2a(3c - 2b) - b(3c - 2b)]$ $= 2 \cdot (3c - 2b) \cdot (2a - b)$	man scheide zunächst nach der Regel 1 den Faktor 2 aus.
5). $a^n b + b^2 + a^n c + bc$	$= a^n(b + c) + b(b + c)$ $= (b + c) \cdot (a^n + b)$	
6). $6a^3 + 7a^2 + a + 6$	$= 6a^3 - 2a^2 + 9a^2 + 4a - 3a + 6$. . $= 2a(3a^2 - a + 2) + 3(3a^2 - a + 2)$ $= (3a^2 - a + 2) . (2a + 3)$	man vergl. das Beispiel 3, S. 74.

7). $bc - 2b^2 - ac + 2ab =$?

8). $2a^2 + 7a - 4ab - 14b =$?

9). $40x^2 - 2p + 5x - 16px =$?

10). $91x^2 - 112mx + 65nx - 80mn =$. ?

11). $2a + 5a - 4b - 10b =$?

12). $x^2 - 3xy + xz - 2y^2 - 2yz =$. . ?

13). $2a^3bc + 6a^2b^2c - 10ab^3c$? man benutze erst die Regel 1.

14). $x^n y + y + x^n + 1 =$?

15). $x^{2n+1} + x^{n+1} - x^{2n+2} - x^{n+2} =$. ? man beachte, dass das 1. und 3. Glied den gemeinschaftlichen Faktor x^{2n}, das 2. und 4. Glied den gemeinschaftlichen Faktor x^n enthalten.

16). $24a^n b^n - 8b^n + 6a^n - 2 =$. . . ? man benutze erst die Regel 1.

17). $2an + 2bn + 2cn + 3an + 3bm + 3cm + a + b + c =$? man beachte, dass die 3 ersten Glieder den Faktor $2n$, die 3 folgenden Glieder den Faktor $3m$ haben, u. s. f.

18). $2a^4 - 3a^3 - 7a^2 - a - b$?

Aufgabe 26. Man soll nach der auf Seite 75 angeführten **Regel 3** die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen algebraischen Summen in Faktoren zerlegen.

Die dieser Regel 3 vorausgegangenen Regeln können hierbei, wenn dies nötig erscheint, be-·zt werden.

Uebungsbeispiele: Resultate: Andeutungen:

1). $36x^2 - \frac{9}{4}y^2 = (6x)^2 - \left(\frac{3}{2}y\right)^2 = \left(6x + \frac{3}{2}y\right) \cdot \left(6x - \frac{3}{2}y\right)$

man untersuche erst, ob man die Differenz zweier Quadrate hat, dann benutze man die Regel 3.

2). $$\frac{4a^4x^6}{b^8y^2} - \frac{9b^2y^4}{a^2x^8} = \left(\frac{2a^2x^3}{b^4y}\right)^2 - \left(\frac{3by^2}{ax^4}\right)^2$$
$$= \left(\frac{2a^2x^3}{b^4y} + \frac{3by^2}{ax^4}\right) \cdot \left(\frac{2a^2x^3}{b^4y} - \frac{3by^2}{ax^4}\right)$$

3). $(1 - x^2) = (1^2 - x^2)$

man beachte den Lehrsatz 1.

$= (1 + x) \cdot (1 - x)$

4). $(2a - 3b)^2 - 4b^2 = (2a - 3b)^2 - (2b)^2$

man beachte, dass die Basis des 1. Quadrats eine zusammengesetzte Grösse ist.

$= (2a - 3b + 2b) \cdot (2a - 3b - 2b)$. .

man beachte, dass man die einzelnen Glieder in den Klammern noch addieren kann.

$= (2a - b) \cdot (2a - 5b)$

5). $100x^2 - (7x - 2y)^2 = (10x)^2 - (7x - 2y)^2$
$= (10x + (7x - 2y)) \cdot (10x - (7x + 2y))$
$= (10x + 7x - 2y) \cdot (10x - 7x + 2y)$
$= (17x - 2y) \cdot (3x + 2y)$

wird bei einer Operation ein Klammerwert als **eine einzige** Grösse betrachtet, so muss die Klammer beibehalten werden. Durch Auflösen der inneren Klammern konnte man noch reduzieren.

6). $100x^2 - 9(7x - y)^2 = (10x)^2 - [3(7x - y)]^2$
$= (10x + 3(7x - y)) \cdot (10x - 3(7x - y))$
$= (10x + 21x - 3y) \cdot (10x - 21x + 3y)$
$= (31x - 3y) \cdot (-11x + 3y)$
$= (31x - 3y) \cdot (3y - 11x)$

bei einer algebraischen Summe (dies bezieht sich auf den 2. Klammerwert) lässt man am Anfange nicht gerne eine n e g a t i v e Grösse stehen, da ein Minuszeichen am Anfange eines Ausdrucks leicht verloren gehen kann.

7). $(a + 2b)^2 - 16(b - c)^2 = (a + 2b)^2 - [4(b - c)]^2$
$= ((a + 2b) + 4(b - c)) \cdot ((a + 2b) - 4(b - c))$
$= (a + 2b + 4b - 4c) \cdot (a + 2b - 4b + 4c)$
$= (a + 6b - 4c) \cdot (a - 2b + 4c)$

8). $(a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$
$= ((a^2 + b^2) + ab) \cdot ((a^2 + b^2) - ab)$
$= (a^2 + ab + b^2) \cdot (a^2 - ab + b^2)$

9). $a^{2x} - a^{2y} = (a^x)^2 - (a^y)^2 = (a^x + a^y) \cdot (a^x - a^y)$

10). $x^{n-p} - x^{n+p} = x^{n-p}(1^2 - (x^p)^2)$
$= x^{n-p}(1^2 - x^p)^2 = x^{n-p}(1 + x^p) \cdot (1 - x^p)$

nach der Regel 1 scheide man den Faktor: x^{n-p} aus, alsdann kann man Regel 3 anwenden.

11). $a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 + b^2) \cdot (a^2 - b^2)$
$= (a^2 + b^2) \cdot (a + b) \cdot (a - b)$

den zweiten Faktor kann man nochmals nach der Regel 3 zerlegen.

12). $(x^4 - 1) = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1)$
$= (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1^2)$
$= (x^2 + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

den zweiten Faktor kann man nochmals nach der Regel 3 zerlegen.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:

13). $(a^8 - b^8) = (a^4)^2 - (b^4)^2 = (a^4 + b^4) \cdot (a^4 - b^4)$

$= (a^4 + b^4) . ((a^2)^2 - (b^2)^2)$

$= (a^4 + b^4) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^2 - b^2)$

$= (a^4 + b^4) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a + b) \cdot (a - b)$ — in diesem Beispiel wurde die Regel 3 dreimal angewandt.

14). $a^{4x} - a^{4y} = (a^{2x})^2 - (a^{2y})^2 = (a^{2x} + a^{2y}) \cdot (a^{2x} - a^{2y})$

$= (a^{2x} + a^{2y}) \cdot ((a^x)^2 - (a^y)^2) = (a^{2x} + a^{2y}) \cdot (a^x + a^y) \cdot (a^x - a^y)$

15). $a^2 + 2ab + 2bc - c^2 = a^2 - c^2 + 2b(a + c)$ — man beachte, dass man zunächst aus dem 2. und 3. Gliede den Faktor 2 ausscheiden muss.

$= (a + c) \cdot (a - c) + 2b \cdot (a + c)$

$= (a + c) \cdot (a - c + 2b)$

16). $12a^3b - 75ab^3 = 3ab \cdot (4a^2 - 25b^2) = 3ab \cdot ((2a)^2 - (5b)^2)$

$= 3ab \cdot (2a + 5b) \cdot (2a - 5b)$

17). $a^5 - ab^4 + a^4b - b^5 = a^4(a + b) - b^4(a + b)$

$= (a + b) \cdot (a^4 - b^4) = (a + b) . ((a^2)^2 - (b^2)^2)$

$= (a + b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^2 - b^2) = (a + b) \cdot (a^2 + b^2) . (a + b) . (a - b)$

18). $(x - y) \cdot (x^2 - z^2) - (x - z) . (x^2 - y^2) = (x - y) \cdot (x + z) \cdot (x - z) - (x - z) \cdot (x + y) . (x - y)$

$= (x - y) \cdot (x - z) \cdot ((x + z) - (x + y))$

$= (x - y) \cdot (x - z) \cdot (x + z - x - y)$

$= (x - y) \cdot (x - z) \cdot (z - y)$

√ 19). $x^2 - a^2 + x - a = (x + a) . (x - a) + (x - a)$ — man beachte, dass der 2. Summand (x — a) den Faktor + 1 hat.

$= (x - a)(x + a + 1)$

20). $m^2 - n^2 =$?

21). $4a^2b^2 - c^2 =$?

22). $16a^2 - 9b^2 =$?

23). $36x^2 - 25y^2 =$?

24). $9a^2b^2 - 25y^2 =$?

25). $4m^2 - 9n^2 =$?

26). $36a^2 - 25m^2 =$?

27). $a^2y^2 - b^2z^2 =$?

28). $1764m^2 - 900n^2 =$?

29). $16x^2y^2 - 81p^2q^2r^2 =$?

30). $\frac{9x^2}{16} - \frac{16y^2}{25} =$?

31). $\frac{4m^6n^2}{x^2} - \frac{m^4n^6}{9y^2} =$?

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
32). $a^2 - 1 =$	?	
33). $25x^2 - 1 =$	?	
34). $1 - 4m^2 =$	?	
35). $\frac{9m^2}{n^4} - 1 =$	?	
36). $(a-b)^2 - x^2 =$	?	
37). $(5n - 4p)^2 - 64n^2 =$	?	
38). $81a^2 - (2a - 3x)^2 =$	?	
39). $9(5n - 4p)^2 - 64n^2 =$	?	
40). $81a^2 - 4(7x - 2y)^2 =$	?	
41). $10000x^2 - 25(7x - 3x^2)^2 =$	?	
42). $(9a + 3b)^2 - (b - c)^2 =$	?	
43). $(a+b)^2 - (a-b)^2 =$	?	
44). $(9a + 3b)^2 - 9(b - c)^2 =$	?	
45). $49(a-b)^2 - 64(m-n)^2 =$	?	
46). $9(2a - x)^2 - 4(3a - x)^2 =$	?	
47). $4(4a + 3b)^2 - 16(a - n)^2 =$	?	
48). $a^{2n} - b^{2n} =$	?	
49). $m^4 - n^4 =$	?	
50). $81x^4 - 16y^4 =$	?	
51). $\left(\frac{m}{2}\right)^4 - 1 =$	?	
52). $x^8 - y^8 =$	?	
53). $x^{4m} - y^{4n} =$	?	
54). $x^{3n+2} - x^n =$	?	man scheide zuerst den Faktor x^n aus.
55). $2 \cdot m^{5n+2} - 2 \cdot m^{3n} =$	?	
56). $3a^2b - 3b^3 - a^3 + ab^2 =$	?	aus je 2 der Summanden scheide man zuerst einen gemeinschaftlichen Faktor aus.
57). $x^4 - 0{,}16 =$	?	
58). $4abx^2 - 9ab =$	?	
59). $\frac{3}{4}m^2x - 3a^2x =$	?	
60). $4x^2 - 9 + 2ax + 3a =$	?	
61). $\frac{m^2}{4} - b^2 + \frac{cm}{2} + bc =$	?	
62). $4a^2 - 9b^2 + 10a + 15b =$	?	
63). $16a^4m - b^4m + 16a^4n - b^4n =$	?	

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:

64). $\frac{m^4}{16} - 81a^4 - \frac{m^4 a}{16} - 81a^5 = \;.\;.\;.\;?$

65). $(2a - b)\cdot(4a^2 - c^2) - (2a - c)\,.\,(4a^2 - b^2) = ?$

66). $4m^2 - 9b^2 + 2m - 3b = \;.\;.\;.\;.\;?$

67). $\frac{25a^2}{c^2} - \frac{9b^2}{4} + \frac{5a}{c} - \frac{3b}{2} = \;.\;.\;.\;?$

68). $x^8 - 1 = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$

69). $\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(a-b)\right)^2 = \;.\;.\;.\;?$

70). $\left(\frac{1}{2}(a-b) + \frac{1}{2}(b-c)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(c-a)\right)^2 = ?$

Aufgabe 27. Man soll nach der auf Seite 75 angeführten **Regel 3** (vergleiche hiermit den Zusatz 2, Seite 70) die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen Zahlenausdrücke auf die **kürzeste Art** berechnen.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:

1). $91^2 - 11^2 = (91 + 11)\cdot(91 - 11)$ man vergleiche das Beispiel im Zusatze 2, Seite 70.

$= 102\cdot 80 = 8160$

2). $\left(\frac{7}{8}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{8} + \frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{7}{8} - \frac{3}{4}\right)$

$= \left(\frac{7}{8} + \frac{6}{8}\right)\cdot\left(\frac{7}{8} - \frac{6}{8}\right)$

$= \frac{13}{8}\cdot\frac{1}{8} = \frac{13}{64}$

3). $(32{,}601)^2 - (0{,}003)^2 = (32{,}601 + 0{,}003)\cdot(32{,}601 - 0{,}003)$

$= 32{,}604\cdot 32{,}598 = ?$

4). $175^2 - 75^2 = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$

5). $284^2 - 84^2 = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$

6). $1234^2 - 234^2 = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$

7). $\left(\frac{3}{12}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$

8). $\left(\frac{2}{7}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$

9). $0{,}635^2 - 0{,}035^2 = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$

10). $3{,}435^2 - 0{,}435^2 = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$

Aufgabe 28. Man soll nach der auf Seite 75 angeführten **Regel 4** die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen algebraischen Summen in Faktoren zerlegen.

Die dieser Regel 4 vorausgegangenen Regeln können, sobald dies nötig erscheint, benutzt werden.

Uebungsbeispiele: Resultate: Andeutungen:

1). $a^2 - 2a + 1 = a^2 - 2a + 1^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 1 \cdot + 1^2$. . . man beachte, dass 1 ein Quadrat, nämlich 1^2 ist, und berücksichtige den Lehrsatz 12.

$= (a-1)^2$

$= (a-1)\cdot(a-1)$. . . nach der Definition einer Potenz.

2). $4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a)^2 + 2\cdot(2a)\cdot(3b) + (3b)^2$

$= (2a+3b)^2$

$= (2a+3b)\cdot(2a+3b)$

3). $81a^4 - 18a^2 + 1 = (9a^2)^2 - 2\cdot(9a^2)\cdot 1 + 1^2$

$= (9a^2-1)^2$ dieser Ausdruck stellt die Differenz zweier Quadrate dar, kann somit nach der Regel 3 noch weiter zerlegt werden.

$= ((3a)^2 - 1^2)^2 = ((3a+1)\cdot(3a-1))^2$

$= (3a+1)^2 . (3a-1)^2$

4). $x^3 + 4x^2 + 4x = x\cdot(x^2 + 4\cdot x + 4)$ man scheide zunächst nach Regel 1 den Faktor x aus, alsdann kann man nach Regel 4 verfahren.

$= x\cdot(x+2)^2$

$= x\cdot(x+2).(x+2)$

5). $12a^3 - 60a^2b + 75ab^2 = 3a\cdot(4a^2 - 20ab + 25b^2)$

$= 3a\cdot((2a)^2 - 2.(2a).(5b) + (5b)^2)$

$= 3a\cdot(2a-5b)^2$

$= 3a\cdot(2a-5b)\cdot(2a-5b)$

6). $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = (a+b)^2 - c^2$ bei näherer Betrachtung ersieht man, dass die 3 ersten Glieder ein Binom im Quadrat, nämlich: $(a+b)^2$ vorstellen, alsdann kann man weiter nach Regel 3 verfahren.

$= (a+b+c)\cdot(a+b-c)$

7). $a^2 - b^2 - 2bc - c^2 = a^2 - (b^2 + 2bc + c^2)$ scheidet man den 3 letzten Gliedern den Faktor: -1 aus, so erhält man für diese 3 Glieder: $(b+c)^2$ und für das ganze die Differenz zweier Quadrate.

$= a^2 - (b+c)^2$

$= (a + (b+c))\cdot(a - (b+c))$

$= (a+b+c)\cdot(a-b-c)$

8). $9x^2 - 6xy + y^2 - z^2 = (3x)^2 - 2\cdot(3x)\cdot(y) + y^2 - z^2$

$= (3x-y)^2 - z^2$

$= (3x-y-z)\cdot(3x-y+z)$

9). $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$ da man die Differenz zweier Quadrate hat, so kann man zunächst nach Regel 3 zerlegen,

$= (2bc + (b^2 + c^2 - a^2))\cdot(2bc - (b^2 + c^2 - a^2))$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
	$= (2bc + b^2 + c^2 - a^2) \cdot (2bc - b^2 - c^2 + a^2)$ $= (b^2 + 2bc + c^2 - a^2) \cdot (a^2 - (b^2 - 2bc + c^2))$ $= ((b+c)^2 - a^2) \cdot (a^2 - (b-c)^2)$ $= (b+c+a) \cdot (b+c-a) \cdot (a+b-c) \cdot (a-b+c)$	dann kann man in jeder der erhaltenen Klammern das Quadrat eines Binoms bilden, wonach man in jeder der Klammern wiederum die Differenz zweier Quadrate erhält, welche nochmals nach Regel 3 zerlegt werden können.

10). $4a^2b^2 + 8abcd + 4c^2d^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 =$. . . man verfolge aufmerksam die nebenstehende Zerlegung, dieselbe stützt sich abwechselnd auf die Regeln 4 und 3.

$$= (2ab)^2 + 2 \cdot (2ab) \cdot (2cd) + (2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$
$$= (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$
$$= (2ab + 2cd + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)) \cdot ((2ab + 2cd) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2))$$
$$= (a^2 + 2ab + b^2 - (c^2 - 2cd + d^2)) \cdot (c^2 + 2cd + d^2 - (a^2 - 2ab + b^2))$$
$$= ((a+b)^2 - (c-d)^2) \cdot ((c+d)^2 - (a-b)^2)$$
$$= ((a+b) + (c-d)) \cdot ((a+b) - (c-d)) \cdot ((c+d) + (a-b)) \cdot ((c+d) - (a-b))$$
$$= (a+b+c-d) \cdot (a+b-c+d) \cdot (a-b+c+d) \cdot (-a+b+c+d)$$

11). $x^{n+1} - 2x^n + x^{n-1} = x^{n-1} . (x^2 - 2x + 1)$ man scheide zunächst nach Regel 1 den Faktor x^{n-1} aus.

$$= x^{n-1} . (x^2 - 2 \cdot (x) \cdot 1 + 1^2)$$
$$= x^{n-1} . (x-1)^2$$
$$= x^{n-1} . (x-1) \cdot (x-1)$$

12). $x^2 + 2ax + (a^2 - b^2) = x^2 + 2ax + a^2 - b^2$ Löst man die Klammer auf, so erhält man mit den 3 ersten Gliedern ein Binom im Quadrat und schliesslich die Differenz zweier Quadrate.

$$= (x+a)^2 - b^2$$
$$= (x+a+b) \cdot (x+a-b)$$

13). $x^4 + x^2y^2 + y^4 = x^4 + x^2y^2 + x^2y^2 - x^2y^2 + y^4$. . . diese und ähnliche Ausdrücke kann man wie folgt zerlegen: Hätte man nicht x^2y^2, sondern $2 . x^2y^2$, so würde der ganze Ausdruck ein Binom im Quadrat, nämlich $= (x^2+y^2)^2$ sein. Um dies zu erhalten, addiere man $+ x^2y^2$ und $- x^2y^2$, wodurch an dem Werte des Ausdrucks nichts geändert wird. Schliesslich erhält man die Differenz zweier Quadrate.

$$= \underbrace{x^4 + 2x^2y^2 + y^2} - x^2y^2$$
$$= (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$$
$$= (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2$$
$$= (x^2 + y^2 + xy) \cdot (x^2 + y^2 - xy)$$

14). $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 - x^2 + 1$ man beachte Beispiel 8, Seite 74, und vorstehendes Beispiel 13.

$$= (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2$$
$$= (x^2 + 1)^2 - x^2$$
$$= (x^2 + 1 + x) \cdot (x^2 + 1 - x)$$
$$= (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$$

15). $x^{n+2} + x^n + x^{n-2} = x^{n-2} . (x^4 + x^2 + 1)$ man scheide zunächst den Faktor: x^{n-2} aus, dann verfahre man analog wie in dem Beispiel 13 angegeben ist.

$$= x^{n-2} . (x^4 + x^2 + x^2 - x^2 + 1)$$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

$$= x^{n-2}.(\underbrace{x^4 + 2x^2 + 1^2} - x^2)$$

$$= x^{n-2}.((x^2+1)^2 - x^2)$$

$$= x^{n-2}.(x^2+1+x)\cdot(x^2+1-x)$$

16). $4a^2 - 12ab + 9b^2 =$?

17). $a^2 + 2a + 1 =$?

18). $a^2 - 6a + 9 =$?

19). $x^2 - 2x + 1 =$?

20). $x^2 - 4x + 4 =$?

21). $4a^2b^2 - 12abc + 9c^2 =$?

22). $n^3 - 2n^2 + n =$, ?

23). $x^5 + 2x^3 + x =$?

24). $20x^2c - 60xbc + 45b^2c =$?

25). $x^n - 6x^{n-1} + 9x^{n-2} =$?

26). $4m^{n+2}n^p - 12m^{n+1}n^{p+1} + 9m^n n^{p+2} =$?

27). $a^2 - 2ab + b^2 - c^2 =$?

28). $m^2 - 2mp + p^2 - n^2 =$?

29). $a^2 - b^2 + 2bc - c^2 =$?

30). $m^2 - n^2 - 2np - p^2 =$?

31). $m^2 - n^2 + 2np - p^2 =$?

32). $4m^2n^2 - (m^2 + n^2 - p^2) =$?

33). $4p^2q^2 - (p^2 + q^2 - m^2) =$?

34). $4m^2n^2 + 8mnpq + 4p^2q^2 - (m^2 + n^2 - p^2 - q^2) =$?

35). $9x^2 - 4y^2 + 4yz - z^2 =$?

36). $(x^2 - y^2 + z^2)^2 - 4y^2z^2 =$?

Aufgabe 29. Man soll nach der auf Seite 75 und 76 angeführten **Regel 5** die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen algebraischen Summen in Faktoren zerlegen.

Die dieser Regel 5 vorausgegangenen Regeln können, sobald dies nötig erscheint, benutzt werden.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $27m^3 + n^3 = (3m)^3 + n^3$

$= (3m + n) \cdot ((3m)^2 - 3m \cdot n + n^2)$

$= (3m + n)(9m^2 - 3mn + n^2)$

man denke sich in der Formel 1, Seite 76, für dieses Beispiel: $a = 3m$ und $b = n$ gesetzt.

2). $27x^3 - 8y^3 = (3x)^3 - (2y)^3$

$= (3x - 2y) \cdot ((3x)^2 + (3x) \cdot (2y) + (2y)^2)$. .

$= (3x - 2y) \cdot (9x^2 + 6xy + 4y^2)$

man denke sich in der Formel 3, Seite 76: $a = 3x$ und $b = 2y$ gesetzt.

3). $27m^3 - 1 = (3m)^3 - 1^3$

$= (3m - 1) \cdot ((3m)^2 + 3m \cdot 1 + 1^2)$

$= (3m - 1) \cdot (9m^2 + 3m + 1)$

man denke sich in der Formel 3, Seite 76: $a = 3m$ und $b = 1$ gesetzt.

4). $x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 + y^3) \cdot (x^3 - y^3)$

$= (x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2) \cdot (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2)$

zunächst verfahre man nach Regel 3, dann wende man für den ersten Faktor: $(x^3 + y^3)$ die Formel 1, für den zweiten Faktor die Formel 3, S. 76, an.

5). $x^5 + b^5 = (x + b) \cdot (x^4 - x^3b + x^2b^2 - xb^3 + b^4)$

man denke sich in der Formel 2, Seite 76: $a = x$ gesetzt.

6). $x^5 - 1 = x^5 - 1^5$

$= (x - 1) \cdot (x^4 + x^3b + x^2b^2 + xb^3 + b^4)$. . .

man verfahre nach der Formel 4, Seite 76.

7). $a^{3x} - a^{3y} = (a^x)^3 - (a^y)^3$

$= (a^x - a^y) \cdot ((a^x)^2 + (a^x . a^y) + (a^y)^2)$

$= (a^x - a^y) \cdot (a^{2x} + a^{x+y} + a^{2y})$

man verfahre nach der Formel 3, Seite 76.

8). $x^4 + x^3 + x + 1 = x^3(x + 1) + (x + 1)$

$= (x + 1) \cdot (x^3 + 1)$

$= (x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 - x \cdot 1 + 1^2)$

$= (x + 1) \cdot (x + 1)(x^2 - x + 1)$

nach Regel 2 scheide man aus den 2 ersten Gliedern x^3 aus, dann kann man für den erhaltenen Faktor: $(x^3 + 1^3)$ die Formel 1, Seite 76, anwenden.

9). $8a^3 + b^3$?

10). $64a^3 + 125b^3 =$?

11). $27x^3 + 1 =$?

12). $1 + 8y^3 =$?

13). $8a^3 - x^3 =$?

14). $27x^3 - 64z^3 =$?

15). $125m^3 - 1 =$?

16). $1 - m^3 =$?

17). $a^6 + b^6 =$?

18). $x^6 - 1 =$?

19). $1 - m^6 =$?

20). $a^5 + b^5 =$?

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
21). $m^5 - 1 =$	 ?	
22). $1 - x^5 =$	 ?	
23). $1 + p^5 =$	 ?	
24). $m^{3x} - n^{3x} =$	 ?	
25). $x^{3m} + y^{3m} =$	 ?	
26). $am^3 + an^3 - bm^3 - bn^3 =$	 ?	
27). $m^4 + m^3 + m + 1 =$	 ?	
28). $x^4 + xy^3 + x^3y + y^4 =$	 ?	

Aufgabe 30. Man soll nach der auf Seite 78 angeführten **Regel 6** die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen algebraischen Summen in Faktoren zerlegen.

Die dieser Regel 6 vorausgegangenen Regeln können, sobald es notwendig erscheint, benutzt werden.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $x^2 + 5x + 6 = x^2 + (2 + 3) . x + 6$

$= x^2 + 2x + 3x + 2 \cdot 3$

$= x(x + 2) + 3(x + 2)$

$= (x + 3) \cdot (x + 2)$

nach der auf Seite 78 stehenden Regel muss die Zahl: $+5$ in zwei Summanden zerlegt werden, deren Produkt $= +6$ ist. Hiernach muss man: $+5$ in $2 + 3$ zerlegen.

2). $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{18} = x^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}$. . .

$= x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}$

$= x\left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(x + \frac{1}{3}\right)$

$= \left(x + \frac{1}{6}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)$

man vergl. hiermit Beisp. 1 in Aufgabe 31.

Man setze: $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, denn: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$

3). $x^2 + 3x - 10 = x^2 + (5 - 2)x + (5 \cdot -2)$

$= x^2 + 5x - 2x + 5 \cdot -2$

$= x(x + 5) - 2(x + 5)$

$= (x + 5)\ (x - 2)$

Man setze: $3 = +5 - 2$, denn: $+5 \cdot -2 = -10$

4). $x^2 + x - 6 = x^2 + (3 - 2) \cdot x + (3 \cdot -2)$

$= x^2 + 3x - 2x + 3 \cdot -2$

$= x(x + 3) - 2(x + 3)$

$= (x + 3) \cdot (x - 2)$

Man setze, da der Faktor von $x = 1$ ist: $1 = +3 - 2$, denn: $+3 \cdot -2 = -6$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
5). $x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$	$= x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{1}{2} \cdot - \frac{1}{3}\right)$. .	Man setze: $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, denn: $\frac{1}{2} \cdot - \frac{1}{3} = - \frac{1}{6}$
	$= x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \cdot - \frac{1}{3}$	
	$= x\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)$	
	$= \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)$	
6). $x^2 + 5\frac{1}{2}x - 3$	$= x^2 + \left(6 - \frac{1}{2}\right) \cdot x + \left(6 \cdot - \frac{1}{2}\right)$. . .	Man setze: $5\frac{1}{2} = 6 - \frac{1}{2}$, denn: $6 \cdot - \frac{1}{2} = -3$
	$= x^2 + 6x - \frac{1}{2}x + 6 \cdot - \frac{1}{2}$ (man vergl. hiermit das Beispiel 2 in der Aufg. 31.)	
	$= x(x + 6) - \frac{1}{2}(x + 6)$	
	$= (x + 6) \cdot (x - \frac{1}{2})$	
7). $x^2 - 5x - 24$	$= x^2 + (3 - 8) \cdot x + (3 \cdot - 8)$	Man setze: $-5 = 3 - 8$, denn: $3 \cdot - 8 = -24$
	$= x^2 + 3x - 8x + 3 \cdot - 8$	
	$= x(x + 3) - 8(x + 3)$	
	$= (x - 8) . (x + 3)$	
8). $x^2 - x - 12$	$= x^2 + (3 - 4)x + (3 \cdot - 4)$	Man setze, da der Faktor von $x = -1$ ist: $-1 = +3 - 4$, denn: $+3 \cdot - 4 = -12$
	$= x^2 + 3x - 4x + 3 \cdot - 4$	
	$= x(x + 3) - 4(x + 3)$	
	$= (x + 3) \cdot (x - 4)$	
9). $x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$	$= x^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{4} \cdot - \frac{1}{2}\right)$. . .	Man setze: $-\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$, denn: $-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$
	$= x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \cdot - \frac{1}{2}$	
	$= x\left(x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\right)$	
	$= \left(x + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$	
10). $x^2 - \frac{3}{4}xy - \frac{1}{4}y^2$	$= x^2 + \left(\frac{1}{4}y - \frac{4}{4}y\right) \cdot x + \left(\frac{1}{4}y \cdot - \frac{4}{4}y\right)$	Man setze, da der Faktor von $x = -\frac{3}{4}y$ ist: $-\frac{3}{4}y = \frac{1}{4}y - \frac{4}{4}y$, denn: $\frac{1}{4}y \cdot - \frac{4}{4}y = -\frac{1}{4}y^2$
	$= x^2 + \frac{1}{4}xy - xy + \frac{1}{4}y \cdot - y$	
	$= x\left(x + \frac{1}{4}y\right) - y\left(x + \frac{1}{4}y\right)$	
	$= \left(x + \frac{1}{4}y\right) \cdot (x - y)$	

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

11). $x^2 - 10x + 16 = x^2 + (-2 - 8) \cdot x + (-2 \cdot -8)$. . man setze:
$-10 = -2 - 8$, denn: $-2 . -8 = 16$

$$= x^2 - 2x - 8x + -2 . -8$$
$$= x(x-2) - 8(x-2)$$
$$= (x-2) \cdot (x-8)$$

12). $a^2 + 8ab + 15b^2 = a^2 + (3b + 5b) \cdot a + (3b . 5b)$. . . man setze, da der Faktor von a $= 8b$ ist:
$8b = 3b + 5b$, denn: $3b \cdot 5b = 15b^2$

$$= a^2 + 3ab + 5ab + 3b \cdot 5b$$
$$= a(a + 3b) + 5b(a + 3b)$$
$$= (a + 3b) \cdot (a + 5b)$$

13). $x^2 - (n-3)x - 3n = x^2 - nx + 3x - 3n$ Da der Faktor von x aus einer Summe besteht, deren Glieder als Faktoren in dem 3. Gliede des gegebenen Ausdrucks enthalten sind, so weiss man im voraus, dass sich solche Ausdrücke nach der Regel 6 in Faktoren zerlegen lassen.

$$= x(x-n) + 3(x-n)$$
$$= (x-n) \cdot (x+3)$$

14). $a^2 - 7ab + 10b^2 = a^2 + (-5b - 2b)a + (-5b \cdot -2b)$ man setze, da der Faktor von a $= -7b$ ist:
$-7b = -5b - 2b$, denn: $-5b \cdot -2b = 10b^2$

$$= a^2 - 5ab - 2ab - 5b \cdot -2b$$
$$= a(a - 5b) - 2b(a - 5b)$$
$$= (a - 5b) \cdot (a - 2b)$$

15). $x^4 + x^2 - 6 = y^2 + y - 6$ um die durch die Regel 6 bedingte Form zu erhalten, setze man: $x^2 = y$

$= y^2 + (3-2)y + (3 \cdot -2)$ man setze, da der Faktor von y $= 1$ ist:
$1 = +3 - 2$, denn: $+3 . -2 = -6$

$$= y^2 + 3y - 2y + 3 \cdot -2$$
$$= y(y+3) - 2(y+3)$$

$= (y+3) \cdot (y-2)$ man setze nunmehr für y den ursprünglichen Wert x^2.

$$= (x^2 + 3) \cdot (x^2 - 2)$$

16). $a^4 + 3a^3 + a^2 - 3a - 2 = a^4 + a^2 - 2 + 3a(a^2 - 1)$ man beachte, dass das 1, 3. und letzte Glied eine algebraische Summe von analoger Form wie das Beispiel 15 ist, und dass man aus dem 2. und 4. Gliede den Faktor $3a$ ausscheiden kann.

$$= a^4 + (2-1)a^2 + (2 \cdot -1) + 3a(a^2 - 1)$$
$$= a^4 + 2a^2 - a^2 + 2 \cdot -1 + 3a(a^2 - 1)$$
$$= a^2(a^2 - 1) + 2(a^2 - 1) + 3a(a^2 - 1)$$

$= (a^2 - 1)(a^2 + 3a + 2)$ den 1. Faktor kann man nach Regel 3, den zweiten Faktor nach Regel 6 weiter zerlegen.

$$= (a+1) \cdot (a-1) \cdot (a^2 + (2+1) \cdot a + (2 \cdot 1))$$
$$= (a+1) \cdot (a-1) \cdot (a^2 + 2a + a + 2 \cdot 1)$$
$$= (a+1) \cdot (a-1) \cdot (a(a+2) + (a+2))$$
$$= (a+1) \cdot (a-1) \cdot (a+2) \cdot (a+1)$$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
17). $x^2 + (a+b)\cdot x + ab =$	?	man beachte die Andeutung zu Beispiel 13.
18). $x^2 + 4x + 3 =$	?	
19). $x^2 + 8x + 15 =$	?	
20). $x^2 + 20x + 91 =$	?	
21). $x^2 + 1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} =$	?	
22). $x^2 + 12ax + 35a^2 =$	?	
23). $x^2 + 2x + \frac{3}{4} =$	?	
24). $x^2 + (a-b)\cdot x - ab =$	?	man beachte die Andeutung zu Beispiel 13.
25). $x^2 + 2x - 143 =$	?	
26). $x^2 + 7x - 120 =$	?	
27). $x^2 + 3x - 4 =$	?	
28). $x^2 + x - 12 =$	?	
29). $a^2 + 2ab - 15b^2 =$	?	
30). $x^2 + x - 2 =$	?	
31). $x^2 - (a-b)x - ab =$	?	man beachte die Andeutung zu Beispiel 13.
32). $x^2 - 7x - 60 =$	?	
33). $x^2 - x - 3 =$	?	
34). $a^2 - 3ab - 10b^2 =$	?	
35). $x^2 - (a+b)x + ab =$	?	man beachte die Andeutung zu Beispiel 13.
36). $x^2 - 11x + 24 =$	?	
37). $x^2 - 13x + 30 =$	?	
38). $x^2 - 53x + 360 =$	?	
39). $a^2 - 5a + 6 =$	?	
40). $a^2 - 6a + 8 =$	?	
41). $x^2 - (c+5)x + 5c =$	?	
42). $a^2 - 7ab + 12b^2 =$	?	
43). $m^2 - 7mn + 10n^2 =$	?	
44). $a^4 + a^2 - 6 =$	?	
45). $x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 =$	?	

Aufgabe 31. Man soll nach der auf Seite 78 vorgeführten **Regel 7** die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen algebraischen Summen in Faktoren zerlegen.

Die dieser Regel vorausgegangenen Regeln, ausgenommen die Regel 6, können, sobald dies nötig erscheint, benutzt werden.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{18} = x^2+\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{18}$. . . man vergl. hiermit die Beispiele 10 und 11, Seite 79.

$$= \left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{18}\right)$$

$$= \left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{144}$$

$$= \left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{12}\right)^2$$

$$= \left(x+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right)$$

$= \left(x+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{6}\right)$ man vergl. hiermit das Resultat in dem Beispiel 2 auf Seite 93.

2). $x^2+5\frac{1}{2}x-3 = x^2+\frac{11}{2}x+\left(\frac{11}{4}\right)^2-\left(\frac{11}{4}\right)^2-3$

$$= \left(x+\frac{11}{4}\right)^2-\left(\left(\frac{11}{4}\right)^2+3\right)$$

$$= \left(x+\frac{11}{4}\right)^2-\frac{169}{16}$$

$$= \left(x+\frac{11}{4}\right)^2-\left(\frac{13}{4}\right)^2$$

$$= \left(x+\frac{11}{4}+\frac{13}{4}\right)\cdot\left(x+\frac{11}{4}-\frac{13}{4}\right)$$

$= \left(x+6\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)$ man vergl. hiermit das Resultat in dem Beispiel 6 auf Seite 94.

3). $x^2-2ax-(a^2-b^2) = x^2-2ax+\left(\frac{2a}{2}\right)^2-\left(\frac{2a}{2}\right)^2-(a^2-b^2)$

$$= (x-a)^2-[a^2-(a^2-b^2)]$$

$$= (x-a)^2-[a^2-a^2+b^2]$$

$$= (x-a)^2-b^2$$

$$= (x-a+b).(x-a-b)$$

Erkl. 47. Durch Vergleichung der Beispiele 1 und 2 dieser Aufgabe mit den Beispielen 2 und 6 der Aufgabe 30 ersieht man, dass in den Fällen in welchen die Koeffizienten von x Brüche etc. sind die Regel 7 leichter zum Ziele führt.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

4). $x^2 + \frac{12}{35}x + \frac{1}{24} = \ldots\ldots\ldots\ ?$

5). $x^2 + \frac{5}{12}x + \frac{1}{24} = \ldots\ldots\ldots\ ?$

6). $x^2 - \frac{1}{12}x - \frac{5}{8} = \ldots\ldots\ldots\ ?$

7). $x^2 - \frac{27}{20}x + \frac{9}{20} = \ldots\ldots\ldots\ ?$

8). $x^2 + 2ax + (a^2 - b^2) = \ldots\ldots\ ?$

9). $x^2 - 2mx + (m^2 - n^2) = \ldots\ldots\ ?$

10). $x^2 - 2nx - (m^2 - n^2) = \ldots\ldots\ ?$

(zu 8)–10).) Diese Beispiele sollen analog dem Beispiel 3 gelöst werden, man kann dieselben auch auf einfachere Weise lösen, wenn man die Klammern auflöst und dann Regel 4 und 3 benutzt.

Aufgabe 32. Man soll nach der auf Seite 80 angegebenen **Regel 8** die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen algebraischen Summen in Faktoren zerlegen.

Die dieser Regel 8 vorausgegangenen Regeln können, sobald dies nötig erscheint, benutzt werden.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $15x^2 + 2x - 8 = 15x^2 + (12 - 10)x - 8$

$= 15x^2 + 12x - 10x - 8$

$= 3x(5x + 4) - 2(5x + 4)$

$= (5x + 4) \cdot (3x - 2)$

In diesem Beispiel ist nach der in Regel 8 aufgestellten Formel:

$a . c = 15$

$b . d = -8,$

mithin ist:

$a . c . b . d = 15 . -8 = -120$

Da ferner:

$b . c + a . d = +2$

sein soll, so findet man:

$b . c = +12$ und

$a . d = -10$

Man setze hiernach für 2, nämlich für den Faktor der bei x steht:

$2 = +12 - 10$, denn:

$+12 . -10 = -120 = 15 . -8$

2). $30x^2 - 2x - 12 = 30x^2 + (18 - 20)x - 12$

$= 30x^2 + 18x - 20x - 12$

$= 6x(5x + 3) - 4(5x + 3)$

$= (5x + 3) \cdot (6x - 4)$

Da, analog dem Beispiel 1:

$30 . -12 = -360$ ist,

so hat man dieses neue Produkt: -360 in zwei solcher Faktoren zu zerlegen, deren Summe $= -2$, nämlich gleich dem Faktor von x ist.

Hiernach setze man:

$-2 = 18 - 20$, denn:

$18 . -20 = -360 = 30 . -12$

3). $6x^2 + 5x + 1 = 6x^2 + (2 + 3)x + 1$

$= 6x^2 + 2x + 3x + 1$

$= 2x(3x + 1) + (3x + 1)$

$= (3x + 1) \cdot (2x + 1)$

Da, analog dem vorigen Beispiele:

$6 . +1 = 6$ ist,

so zerlege man dieses neue Produkt in zwei solcher Faktoren, dass deren Summe $= +5$ ist:

Hiernach setze man:

$5 = 2 + 3$, denn:

$2 . 3 = 6$

Uebungsbeispiele: Resultate: Andeutungen:

4). $6x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{1}{6} = 6x^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right)x - \frac{1}{6}$

$= 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$

$= 3x\left(2x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(2x + \frac{1}{2}\right)$

$= \left(2x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(3x - \frac{1}{3}\right)$

Da: $6 \cdot -\frac{1}{6} = -1$ ist, so setze man: $\frac{5}{6} = \frac{3}{2} - \frac{2}{3}$, denn: $\frac{3}{2} \cdot -\frac{2}{3} = -1$

5). $6a^2 - 13ab + 6b^2 = 6a^2 + (-9b - 4b) \cdot a + 6b^2$.

$= 6a^2 - 9ab - 4ab + 6b^2$

$= 3a(2a - 3b) - 2b(2a - 3b)$

$= (2a - 3b) \cdot (3a - 2b)$

Da: $6 \cdot 6b^2 = 36b^2$ ist, so setze man: $-13b = -9b - 4b$, denn: $-9b \cdot -4b = 36b^2$

6). $5b^4 - 6b^2c^2 + c^4 = 5b^4 + (-5c^2 - c^2)b^2 + c^4$. . .

$= 5b^4 - 5c^2b^2 - c^2b^2 + c^4$

$= 5b^2(b^2 - c^2) - c^2(b^2 - c^2)$

$= (b^2 - c^2) \cdot (5b^2 - c^2)$

$= (b + c) \cdot (b - c) \cdot (5b^2 - c^2)$

Man denke sich: $b^2 = x$ gesetzt, dann ist: $b^4 = x^2$ und man hat die für die Regel 8 vorgeschriebene Form und kann deshalb weiter wie vorhin verfahren: Da nun: $5 \cdot c^4 = 5c^4$ ist, so setze man: $-6c^2 = -5c^2 - c^2$, denn: $-5c^2 \cdot -c^2 = 5c^4$
Den Faktor $(b^2 - c^2)$ konnte man noch nach Regel 3 weiter zerlegen.

7). $12x^2y^2 - 7xyz - 10z^2 = 12x^2y^2 + (8yz - 15yz) \cdot x - 10z^2$. .

$= 12x^2y^2 + 8yz \cdot x - 15yz \cdot x - 10z^2$

$= 4xy(3xy + 2z) - 5z(3xy + 2z)$

$= (3xy + 2z) \cdot (4xy - 5z)$

Man muss $12y^2$ als den Faktor von x^2 und $-7yz$ als den Faktor von x betrachten.
Da nun: $12y^2 \cdot -10z^2 = -120y^2z^2$ ist, so setzt man: $-7yz = 8yz - 15yz$, denn: $8yz \cdot -15yz = -120y^2z^2$

8). $6x^{n+2} + 13x^n + 6x^{n-2} = x^{n-2} \cdot (6x^4 + 13x^2 + 6)$. .

$= x^{n-2} \cdot (6x^4 + (4 + 9) \cdot x^2 + 6)$

$= x^{n-2} \cdot (6x^4 + 4x^2 + 9x^2 + 6)$

$= x^{n-2} \cdot (2x^2(3x^2 + 2) + 3(3x^2 + 2))$

$= x^{n-2} \cdot (3x^2 + 2) \cdot (2x^2 + 3)$

Man scheide zunächst den Faktor x^{n-2} aus, dann zerlege man den erhaltenen Klammerwert nach der Regel 8.
Da: $6 \cdot 6 = 36$, so setze man: $13 = 9 + 4$, denn: $9 \cdot 4 = 36$

9). $a^3x^2 + (ab - a^2b^2)x \cdot y - b^3y^2 =$

$= a^3x^2 + ab\,xy - a^2b^2xy - b^3y^2$

$= ax(a^2x + by) - b^2y(a^2x + by)$

$= (a^2x + by) \cdot (ax - b^2y)$

Da in diesem Beispiele: $a^3 \cdot -b^3y^2 = -a^3b^3y^2$ ist und der Faktor von x, nämlich: $(ab - a^2b^2)y$ sich in die 2 Summanden: aby und $-a^2b^2y$ zerlegen lässt, deren Produkt $= -a^3b^2y^2$ ist, so muss sich dieser Ausdruck in Faktoren zerlegen lassen, sobald man die Klammer auflöst.

10). $8x^2 + 28x + 12 =$?

11). $8x^2 - 20x - 12 =$?

12). $8x^2 - 28x + 12 =$?

13). $8x^2 + 4x - 12 =$?

14). $6x^2 + x - 15 =$?

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen
15). $15x^2+8x+1=$	 ?	
16). $15x^2-8x+1=$	 ?	
17). $15x^2-2x-1=$	 ?	
18). $6x^2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}=$	 ?	
19). $5x^2+\frac{19}{15}x-\frac{2}{15}=$	 ?	
20). $2n^2+3n+1=$	 ?	
21). $15x^2+bx-6b^2=$	 ?	
22). $5x^4-18x^2b^2+9b^4=$	 ?	
23). $6b^2x^2-5bcx-6c^2=$	 ?	
24). $6y^2x^2+yzx-15z^2=$	 ?	
25). $12x^8+14x^7-10x^6=$	 ?	
26). $3x^{p+2}-10x^p+3x^{p-2}=$	. . . ?	man vergl. hiermit das Beispiel 8.

Aufgabe 33. Man soll nach der auf Seite 80 vorgeführten **Regel 9** die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen algebraischen Summen in Faktoren zerlegen.

Die sämmtlichen aufgestellten Regeln, ausgenommen die Regel 8, können, sobald dies nötig erscheint, benutzt werden.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen.**

1). $15x^2+2x-8=15\cdot\left(x^2+\frac{2}{15}x-\frac{8}{15}\right)$ Führt man die angedeutete Multiplikation aus, so erhält man den ursprünglichen Ausdruck wieder. — Man siehe auch Regel 10.

$$=15.\left(x^2+\frac{2}{15}x+\left(\frac{2}{2.15}\right)^2-\left(\frac{2}{2\cdot15}\right)^2-\frac{8}{15}\right)$$

$$=15\cdot\left(x^2+\frac{2}{15}x+\left(\frac{1}{15}\right)^2-\left(\left(\frac{1}{15}\right)^2+\frac{8}{15}\right)\right)$$

$$=15.\left(\left(x+\frac{1}{15}\right)^2-\frac{121}{15.15}\right)$$

$$=15.\left(\left(x+\frac{1}{15}\right)^2-\left(\frac{11}{15}\right)^2\right)$$

$$=15.\left(x+\frac{1}{15}+\frac{11}{15}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{15}-\frac{11}{15}\right)$$

$$=15.\left(x+\frac{12}{15}\right)\cdot\left(x-\frac{10}{15}\right)$$

$$=15.\left(x+\frac{4}{5}\right)\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)$$ Um die Nenner 5 und 3 in den Klammern wegzuschaffen, zerlege man den Faktor 15 in 3.5, multipliziere alsdann den 1ten Klammerwert mit 5, den 2ten mit 3.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
	$= (5x+4)\cdot(3x-2)$	Man vergl. das Resultat mit dem Resultate desselben Beispiels 1, Seite 98; beachte dabei die Erkl. 44, Seite 81.
2). $6x^2+\frac{5}{6}x-\frac{1}{6}$	$= 6\,.\left(x^2+\frac{5}{36}x-\frac{1}{36}\right)$	
	$= 6\,.\left(x^2+\frac{5}{36}x+\left(\frac{5}{2.36}\right)^2-\left(\frac{5}{2.36}\right)^2-\frac{1}{36}\right)$	
	$= 6\,.\left[\left(x+\frac{5}{2.36}\right)^2-\left(\left(\frac{5}{2.36}\right)^2+\frac{1}{36}\right)\right]$	
	$= 6\,.\left[\left(x+\frac{5}{72}\right)^2-\frac{169}{4.36.36}\right]$	
	$= 6\,.\left[\left(x+\frac{5}{72}\right)^2-\left(\frac{13}{2.6.6}\right)^2\right]$	
	$= 6\,.\left[\left(x+\frac{5}{72}\right)^2-\left(\frac{13}{72}\right)^2\right]$	
	$= 6\,.\left(x+\frac{5}{72}+\frac{13}{72}\right)\cdot\left(x+\frac{5}{72}-\frac{13}{72}\right)$	
	$= 6\,.\left(x+\frac{18}{72}\right)\cdot\left(x-\frac{8}{72}\right)$	
	$= 6\,.\left(x+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{9}\right)$	Den Faktor 6 zerlege man in 2.3 und multipliziere die erste Klammer mit 2, die zweite Klammer mit 3.
	$= \left(2x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(3x-\frac{1}{3}\right)$	Das Resultat vergl. man mit dem Resultat desselben Beispiels 4, Seite 99, beachte dabei die Erkl. 44, Seite 81.
3). $6a^2-13ab+6b^2 =$	 ?	Es muss dasselbe Resultat herauskommen, wie in dem Beispiel 5, Seite 99.
4). $5b^4-6b^2c^2+c^4 =$	 ?	ist mit dem Beispiel 6, S. 99, identisch.
5). $5x^2+\frac{19}{15}x-\frac{2}{15} =$	 ?	
6). $6b^2x^2-5bcx-6c^2 =$	 ?	Man scheide zuerst den Faktor $6b^2$ nach Regel 10 aus.
7). $6y^2x^2+yzx-15z^2 =$	. . . ?	

Anmerkung 7. Weitere Beispiele über Faktorenzerlegung, auch solche in welchen die Regel 10, Seite 82, benutzt wird, sind in nachstehenden Abschnitten enthalten.

12). Ueber das Aufsuchen des grössten gemeinschaftlichen Teilers zweier oder mehrerer algebraischen Summen.

Bei dem Aufsuchen des **grössten gemeinschaftlichen Teilers** zweier oder mehrerer algebraischen Summen — das ist der grösste gemeinschaftliche Faktor, welcher in diesen Summen enthalten ist, — beachte man folgende Regeln:

Regel 1.

Sind die gegebenen Ausdrücke solche algebraische Summen, welche sich auf leichte und **sichere** Weise in Faktoren zerlegen lassen, so zerlege man jede der Summen in ihre Faktoren und untersuche dann, welche und wieviele dieser Faktoren in jeder der Summen enthalten sind. Das Produkt dieser Faktoren ist das gesuchte grösste gemeinschaftliche Mass.

Man siehe nebenstehende Beispiele 1 und 2, die gelösten Uebungsbeispiele in der Aufgabe 34 und die Erkl. 48.

Beispiel 1. Man soll das grösste gemeinschaftliche Mass zwischen den Summen:

$$2a^3 - 7a^2 + 8a - 4$$
$$a^2 - 5a + 6$$

finden. Nach den Regeln der Faktorenzerlegung erhält man für den 1ten Ausdruck:

1). $2a^3 - 7a^2 + 8a - 4 = (a-2) \cdot (2a^2 - 3a + 2)$

(siehe das Beispiel 3, Seite 74)

Für den 2ten Ausdruck erhält man nach der Regel 7, Seite 78:

2). . . $a^2 - 5a + 6 = (a-3) \cdot (a-2)$

Aus den Produkten unter 1). und 2). ist ersichtlich, dass der grösste gemeinschaftliche Faktor (Teiler, oder das grösste gemeinschaftliche Maas) der gegebenen Ausdrücke

$= (a-2)$ ist.

Beispiel 2. Gegeben seien die Ausdrücke:

$$x^2 - 5x + 6$$
$$x^2 - 3x - 10$$

Zerlegt man dieselben in Faktoren, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 = (x-3) \cdot (x-2) \\ x^2 - 7x + 10 = (x-2) \cdot (x-5) \end{array}\right\} \text{nach der Regel 7, Seite 78.}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass der grösste gemeinschaftliche Teiler der beiden gegebenen Ausdrücke

$= (x-2)$ ist.

Regel 2.

Sind die gegebenen Ausdrücke solche algebraische Summen, welche sich **nicht** auf leichte und **sichere** Weise in Faktoren zerlegen lassen, so verfahre man genau so, wie bei dem Aufsuchen des grössten gemeinschaftl. Teilers zweier Zahlen. — Siehe das Kapitel: **Die Teilbarkeit der Zahlen.** —

Hiernach ordne man nach der Erkl. 37, Seite 27, die beiden gegebenen

Beispiel 3. Man soll nach nebenstehender Regel 2 das grösste gemeinschaftliche Mass zwischen den algebr. Summen:

$$2a^3 - 7a^2 + 8a - 4$$
$$a^2 - 5a + 6$$

finden.

Die beiden gegebenen algebraischen Summen sind geordnet und auch die ersten Glieder durch einander teilbar. Da ferner der zweite Ausdruck der minderwertige ist, so verfahre man, wie folgt:

algebr. Summen (etwaige allen Gliedern der einen oder der anderen Summe gemeinschaftliche Faktoren scheide man vorher aus) und dividiere mit der kleineren Summe in die grössere. Sollte hierbei das 1te Glied des Divisors in das 1te Glied des Dividenden nicht aufgehen, so multipliziere man den Dividenden mit einer solchen Zahl, dass dies stattfindet.

Geht die Division beider Summen auf, so ist der Divisor selbst das grösste gemeinschaftliche Mass; findet dies nicht statt, so dividiere man den erhaltenen Rest, nachdem geordnet ist, in den vorhergehenden Divisor. Hierbei hat man jedoch wie vorhin zu beachten, dass das erste Glied des neuen Divisors in das erste Glied des neuen Dividenden ohne Rest aufgehen muss, und dass, wenn dies nicht der Fall ist, man den Dividenden mit einer solchen Zahl zu multiplizieren hat, dass dies stattfindet. Fährt man auf diese Weise fort, bis die Division einmal aufgeht, so ist der letzte Divisor das gesuchte gemeinschaftliche Mass der gegebenen algebraischen Summen.

Nebensteh. Beispiele 3 u. 4, die Uebungsbeispiele in der Aufgabe 35 geben hierüber weiteren Aufschluss.

$$\begin{array}{r|l}
\overbrace{2a^3 - 7a^2 + 8a - 4}^{\text{Dividend}} & \overbrace{a^2 - 5a + 6}^{\text{Divisor}} \\
2a^3 - 10a^2 + 12a & \underbrace{2a + 3}_{\text{Quotient}} \\
- \quad + \quad - & \\
\hline
+ 3a^2 - 4a - 4 & \\
+ 3a^2 - 15a + 18 & \\
- \quad + \quad - & \\
\hline
11a - 22 \; \ldots \text{ Rest.} &
\end{array}$$

Nun müsste man die Division:

$$\begin{array}{r|l}
\overbrace{a^2 - 5a + 6}^{\text{neuer Dividend}} & \overbrace{11a - 22}^{\text{neuer Divisor}}
\end{array}$$

ausführen, da jedoch $11a$ in a^2 nicht ohne Rest enthalten ist, so multipliziere man den neuen Dividenden mit 11 oder was dasselbe ist, man dividiere in diesem Beispiel den neuen Divisor mit 11. Hiernach erhält man:

$$\begin{array}{r|l}
\overbrace{a^2 - 5a + 6}^{\text{neuer Dividend}} & \overbrace{a - 2}^{\text{neuer Divisor}} \\
a^2 - 2a & \underbrace{a - 3}_{\text{Quotient}} \\
- \quad + & \\
\hline
- 3a + 6 & \\
- 3a + 6 & \\
+ \quad - & \\
\hline
= \quad = \text{ Rest} = 0 &
\end{array}$$

somit ist nach nebenstehender Regel der letzte Divisor, nämlich:

$$(a - 2)$$

das grösste gemeinschaftliche Mass.

Man vergl. hiermit das Resultat desselben vorstehenden Beispiels 1 und beachte die Erkl. 48.

Beispiel 4. Gegeben seien die Ausdrücke:

$$x^2 - 5x + 6$$
$$x^2 + 3x - 10$$

Da der erste Ausdruck der minderwertige ist, so verfährt man nach nebenstehender Regel 2, wie folgt:

$$\begin{array}{r|l}
\overbrace{x^2 + 3x - 10}^{\text{Dividend}} & \overbrace{x^2 - 5x + 6}^{\text{Divisor}} \\
x^2 - 5x + 6 & \underbrace{1}_{\text{Quotient}} \\
- \quad + \quad - & \\
\hline
8x - 16 \; \ldots \text{ Rest} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
\overbrace{x^2 - 5x + 6}^{\text{n. Dividend}} & \overbrace{8x - 16}^{\text{n. Divisor}}
\end{array}$$

Da in dieser Division das erste Glied des Divisors in das erste Glied des Dividenden nicht aufgeht, so multipliziere man den Dividenden mit 8, oder was hier vorteilhafter ist, man dividiere den Divisor mit 8. Hiernach erhält man:

$$\begin{array}{l|l} \overbrace{x^2 - 5x + 6}^{\text{Dividend}} & \overbrace{x - 2}^{\text{Divisor}} \\ x^2 - 2x & \underbrace{x - 3}_{\text{Quotient}} \\ - \quad + & \\ \hline \quad - 3x + 6 & \\ \quad - 3x + 6 & \\ \hline \quad = \quad = & \text{Rest} = 0 \end{array}$$

Da hiermit die Division aufgeht, so ist nach der Regel 2 der letzte Divisor, nämlich:

$$(x - 2)$$

das gesuchte grösste gemeinschaftliche Mass.

Man vergl. hiermit das Resultat desselben Beispiels 2 und beachte die Erkl. 48.

Erkl. 48. Aus den nebenstehenden Beispielen 1 und 3, bezw. aus den Beispielen 1 und 4 ersieht man, dass in den Fällen, in welchen man auf leichte und **sichere** Weise die gegebenen Ausdrücke in Faktoren zerlegen kann, die **Regel 1** vorzuziehen ist, dass hingegen in denjenigen Fällen in welchen die gegebenen Ausdrücke **nicht mit Sicherheit** in Faktoren zerlegt werden können, die **Regel 2** benutzt werden muss.

Man siehe die Uebungsbeispiele in den Aufgaben 34 und 35.

Aufgabe 34. Man soll nach der auf Seite 102 vorgeführten **Regel 1** das **grösste gemeinschaftliche Mass** der in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen algebr. Summen bestimmen.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). Das grösste gemeinschaftl. Mass zwischen:

$x^2 - 4$ und $\quad x^2 - 4 = (x + 2) \cdot (x - 2)$. . nach Regel 3, Seite 75.

$x^2 + x - 6$ zu bestimmen. $\quad x^2 + x - 6 = (x - 2) \cdot (x + 3)$. . „ „ 6, „ 78.

mithin ist: $(x - 2)$ das gr. gemeinschaftl. Mass.

2). Ebenso, von:

$$\begin{cases} x^2 - (a + c)\,x + ac = x^2 - ax - cx + ac = x(x - a) - c(x - a) = (x - a) \cdot (x - c) \\ x^2 - (a - d)\,x - ad = x^2 - ax + dx - ad = x(x - a) + d(x - a) = (x - a) \cdot (x + d) \end{cases}$$

mithin ist: $(x - a)$ das gr. gemeinschaftl. Mass.

3). Ebenso, von:

$$\begin{cases} x^2 - y^2z^2 = (x + yz) \cdot (x - yz) \quad \text{. nach Regel 3, Seite 75.} \\ x^2 + 2xyz + y^2z^2 = x^2 + 2 \cdot (yz) \cdot x + (yz)^2 = (x + yz)^2 = (x + yz) \cdot (x + yz) \quad \text{nach Regel 4, Seite 75.} \end{cases}$$

mithin ist: $(x + yz)$ das gr. gemeinschaftl. Mass.

4). Ebenso, von:

$$\begin{cases} 6a^4 - 5a^2 - 1 = 6a^4 - 6a^2 + a^2 - 1 = 6a^2(a^2 - 1) + (a^2 - 1) \quad \text{analog dem Beisp. 3, S. 74.} \\ \qquad = (a^2 - 1) \cdot (6a^2 + 1) \\ \qquad = (a + 1) \cdot (a - 1) \cdot (6a^2 + 1) \\ 3a^2 - 3 = 3(a^2 - 1) = 3 \cdot (a + 1) \cdot (a - 1) \quad \text{. . . . man beachte Regel 1, S. 74 und „ 3, „ 75.} \\ 5a^3 - 4a - 1 = 5a^3 - 5a + a - 1 = 5a(a^2 - 1) + (a - 1) \quad \text{analog dem Beispiel 3, S. 74.} \\ \qquad = 5a(a + 1) \cdot (a - 1) + (a - 1) \\ \qquad = (a - 1) \cdot [5a(a + 1) + 1] \quad \text{u. s. f.} \end{cases}$$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
5). Ebenso, von: $\left.\begin{matrix} 12x^2+5x-3 \\ 6x^2+x-1 \end{matrix}\right\}$	$= \ldots\ldots\ ? \ldots$	man beachte die Regel 8, Seite 80.
6). Ebenso, von: $\left.\begin{matrix} x^2+1\frac{1}{2}x-4\frac{1}{2} \\ x^2+3\frac{1}{2}x-7\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$	$= \ldots\ldots\ ? \ldots$	man beachte die Regel 6, Seite 78 oder besser „ „ 7, „ 78.
7). Ebenso, von: $\left.\begin{matrix} a^4-y^2 \\ a^3+(a+1)ay+y^2 \end{matrix}\right\}$	$= \ldots\ldots\ ?$	a^4-y^2: man beachte die Regel 3, Seite 75. $a^3+(a+1)ay+y^2$: „ „ „ „ 2, „ 74.
8). Ebenso, von: $\left.\begin{matrix} a^3(b^2+2bc+c^2)-a^2b(2b^2+3bc+c^2)+ab^3(b+c) \\ a^2(b^2-c^2)-ab(2b^2+bc-c^2)+b^3(b+c) \end{matrix}\right\}$	$= ?$	beide Ausdrücke haben den gemeinschaftlichen Faktor $(b+c)$ und den weiteren gemeinsch. Faktor $(a-b)$, mithin ist der gesuchte Teiler: $(b+c).(a-b)$
9). Ebenso, von: $\left.\begin{matrix} ab^2c^2-a+bc^2-c \\ b^2c^2-1 \end{matrix}\right\}$	$= \ldots\ldots\ ?$	$ab^2c^2-a+bc^2-c$: man scheide aus den 2 ersten Gliedern a, aus den 2 letzten Gliedern c aus, wende dann Regel 3, Seite 75, an, u. s. f. b^2c^2-1: man benutze die Regel 3, Seite 75.
10). Ebenso, von: $\left.\begin{matrix} 9a^2-x^2 \\ 9a^2-6ax+x^2 \end{matrix}\right\}$	$= \ldots\ldots\ ?$	$9a^2-x^2$: man benutze die Regel 3, Seite 75, $9a^2-6ax+x^2$: man benutze die Regel 4, Seite 75.

Aufgabe 35. Man soll nach der auf S. 102 angeführten **Regel 2** das grösste gemeinschaftliche Mass der in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen algebr. Summen bestimmen.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). Das grösste gemeinschaftl. Mass zwischen: $6x^3+13x^2+15x-25$ und $2x^3+4x^2+4x-10$ zu bestimmen.		Da der zweite Ausdruck der minderwertige ist, so dividiere man denselben in den ersten und verfahre weiter nach der auf S. 102 angeführten Regel 2, wie nachstehend angedeutet ist:

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

$$\begin{array}{rrrr|l} \multicolumn{4}{c|}{\text{Dividend}} & \text{Divisor} \\ 6x^3 + 13x^2 & + 15x & - 25 & & 2x^3 + 4x^2 + 4x - 10 \\ 6x^3 + 12x^2 & + 12x & - 30 & & 3 \ (\text{Quotient}) \\ - \quad - & - & + & & \\ \hline x^2 & + 3x & + 5 & \text{Rest.} & \end{array}$$

Nun dividiere man den erhaltenen Rest in den vorhergehenden Divisor, wie folgt:

$$\begin{array}{rrrr|l} \multicolumn{4}{c|}{\text{Dividend}} & \text{Divisor} \\ 2x^3 + 4x^2 & + 4x & - 10 & & x^2 + 3x + 5 \\ 2x^3 + 6x^2 & + 10x & & & 2x - 2 \ (\text{Quotient}) \\ - \quad - & - & & & \\ \hline - 2x^2 & - 6x & - 10 & & \\ - 2x^2 & - 6x & - 10 & & \\ + & + & + & & \\ \hline & & & \text{Rest} = 0 & \end{array}$$

. . Da die Division hier aufgeht, so ist der letzte Divisor, nämlich:

$(x^2 + 3x + 5)$ das gesuchte grösste gemeinsch. Mass.

2). Ebenso, von:

$3x^5 - x^4 - 3x + 1$

$3x^4 + x^3 + x^2 + x - 2$ Da der zweite Ausdruck der minderwertige ist, so verfahre man, wie folgt:

$$\begin{array}{rrrrrr|l} \multicolumn{6}{c|}{\text{Dividend}} & \text{Divisor} \\ 3x^5 - x^4 & & & & - 3x & + 1 & 3x^4 + x^3 + x^2 + x - 2 \\ 3x^5 + x^4 & + x^3 & + x^2 & & - 2x & & x - 2 \ (\text{Quotient}) \\ - \quad - & - & - & & + & & \\ \hline 2x^4 & - x^3 & - x^2 & & - x & + 1 & \\ & & & & & \cdot 3 & \\ \hline - 6x^4 & - 3x^3 & - 3x^2 & & - 3x & + 3 & \\ - 6x^4 & - 2x^3 & - 2x^2 & & - 2x & + 4 & \\ + & + & + & & + & - & \\ \hline & - x^3 & - x^2 & & - x & - 1 & \end{array}$$

. . . Da in diesen Rest noch weiter dividiert werden muss, indem die Division noch nicht vollständig erschöpft ist, das erste Glied des Divisors aber nicht vollständig in dem 1. Gliede des Restes enthalten ist, so multipliziere man den Rest mit 3 (s. Regel 2, S. 102).

Nun dividiere man den erhaltenen Rest, nachdem man die Minuszeichen durch Multiplikation mit -1 daraus entfernt hat (was übrigens durchaus nicht nötig ist), in den vorhergehenden Divisor, wie folgt:

$$\begin{array}{rrrrr|l} \multicolumn{5}{c|}{\text{Dividend}} & \text{Divisor} \\ 3x^4 & + x^3 & + x^2 & + x & - 2 & x^3 + x^2 + x + 1 \\ 3x^4 & + 3x^3 & + 3x^2 & + 3x & & 3x - 2 \ (\text{Quotient}) \\ - & - & - & - & & \\ \hline & - 2x^3 & - 2x^2 & - 2x & - 2 & \\ & - 2x^3 & - 2x^2 & - 2x & - 2 & \\ & + & + & + & + & \\ \hline & & & & \text{Rest} = 0 & \end{array}$$

. . . Da die Division hier aufgeht, so ist der letzte Divisor, nämlich:

$(x^3 + x^2 + x + 1)$ das gesuchte grösste gemeinsch. Mass.

3). Ebenso, von:

$$\left.\begin{array}{l} a^7 - 3a^4 - 4a^3 - 3a^2 - a \\ a^6 - a^4 - 2a^3 - 3a^2 - 2a - 1 \end{array}\right\}$$

. Die in vorstehenden Beispielen vollständig ausgeführten Opera-

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:

tionen sind für dieses Beispiel, wie folgt angedeutet:

$$\frac{a^7 - 3a^4 - 4a^3 - 3a^2 - a}{a^6 - a^4 - 2a^3 - 3a^2 - 2a - 1} = a + \frac{a^5 - a^4 - a^3 - a^2}{a^6 - a^4 - 2a^3 - 3a^2 - 2a - 1}$$

$$\frac{a^6 - a^4 - 2a^3 - 3a^2 - 2a - 1}{a^5 - a^4 - a^3 - a^2} = a + 1 + \frac{a^4 - 2a^2 - 2a - 1}{a^5 - a^4 - a^3 - a^2}$$

$$\frac{a^5 - a^4 - a^3 - a^2}{a^4 - 2a^2 - 2a - 1} = a - 1 + \frac{a^3 - a^2 - a - 1}{a^4 - 2a - 2a - 1}$$

$$\frac{a^4 - 2a^2 - 2a - 1}{a^3 - a^2 - a - 1} = a + 1.$$ Da hier die Division aufgeht, so ist der letzte Divisor, nämlich:

$(a^3 - a^2 - a - 1)$ das grösste gemeinschaftliche Mass.

4). Ebenso, von:

$$\left.\begin{matrix} 2m^6 + 2m^5 - 3m^4 - 5m^3 - 14m^2 - 7m \\ 2m^5 + 2m^4 - 5m^3 - 5m^2 - 7m - 7 \end{matrix}\right\} \quad \ldots .$$

Die für dieses Beispiel notwendigen Operationen sind, wie folgt angedeutet:

$$\frac{2m^6 + 2m^5 - 3m^4 - 5m^3 - 14m^2 - 7m}{2m^5 + 2m^4 - 5m^3 - 5m^2 - 7m - 7} =$$

$$m + \frac{2m^4 - 7m^2}{2m^5 + 2m^4 - 5m^3 - 5m^2 - 7m - 7} =$$

$$\frac{m^2(2m^2 - 7)}{2m^5 + 2m^4 - 5m^3 - 5m^2 - 7m - 7}$$

Haben nun diese beiden Ausdrücke einen gemeinschaftl. Faktor; so kann dies nur der Faktor

$(2m^2 - 7)$

sein, denn der andere Faktor m^2 des ersten Ausdrucks ist nicht auch ein Faktor des zweiten Ausdrucks. Untersucht man nun durch Division, ob: $(2m^2 - 7)$ in dem zweiten Ausdruck (dem Nenner des letzten Bruches) enthalten ist, so findet man, dass dies stattfindet, mithin ist:

$(2m^2 - 7)$ das gesuchte grösste gemeinschaftl. Mass.

5). Ebenso, von:

$$\left.\begin{matrix} x^3 - 6x^2 + 32 \\ x^2 - 4x \end{matrix}\right\} = \ldots\ldots ?$$

6). Ebenso, von:

$$\left.\begin{matrix} x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x \\ x^3 - 3x^2 + 4x - 2 \end{matrix}\right\} = \ldots ?$$

7). Ebenso, von:

$$\left.\begin{matrix} 6m^3 + 17m^2n + mn^2 - 10n^3 \\ 6m^4 - 22m^3n + 9m^2n^2 + 11mn^3 - 6n^4 \end{matrix}\right\} = ?$$

8). Ebenso, von:

$$\left.\begin{matrix} x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 \\ x^3 - 3x^2 - 6x + 8 \end{matrix}\right\} = \ldots ?$$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
9). Ebenso, von: $\left.\begin{matrix} x^4+4x^3-9x^2-16x+20 \\ x^3-2x^2-23x+60 \end{matrix}\right\} = \ldots$	?	
10). Ebenso, von: $\left.\begin{matrix} x^4-10x^3+35x^2-50x+24 \\ x^3-8x^2+17x-10 \end{matrix}\right\} = \ldots$	?	
11). Ebenso, von: $\left.\begin{matrix} x^6-14x^4+12x^3+49x^2-84x+36 \\ x^6-14x^4+49x^2-36 \end{matrix}\right\} =$	?	
12). Ebenso, von: $\left.\begin{matrix} 2x^6-x^5-5x^3-5x^2-x \\ 2x^5-x^4-2x^3-2x^2-4x-1 \end{matrix}\right\} = \ldots$	?	ist analog dem Beispiel 4
13). Ebenso, von: $\left.\begin{matrix} x^6+4x^5-3x^4-16x^3+11x^2+12x-9 \\ 6x^5+20x^4-12x^3-48x^2+22x+12 \end{matrix}\right\} =$	?	
14). Ebenso, von: $\left.\begin{matrix} x^5+5x^4+8x^3+x^2-8x-7 \\ x^4+5x^3+7x^2-3x-10 \end{matrix}\right\} = \ldots$	?	
15). Ebenso, von: $\left.\begin{matrix} x^4-yx^3-7y^2x^2+y^3x+6y^4 \\ 2x^3-9yx^2+7y^2x+6y^3 \end{matrix}\right\} = \ldots$	?	
16). Ebenso, von: $\left.\begin{matrix} x^4+2ax^3-3a^2x^2-8a^3x-4a^4 \\ x^4-a^4 \end{matrix}\right\} = \ldots$	?	

13). Ueber Reduktionen mittelst dem Heben von Brüchen (Quotienten), deren Zähler und Nenner aus algebraischen Summen bestehen.

Hat man Brüche (Quotienten), deren Zähler und Nenner aus algebraischen Summen bestehen und man will dieselben **reduzieren**, d. h. auf eine einfachere Form bringen, so beachte man folgende Regeln:

Regel 1.

Sind Zähler und Nenner solche algebraische Summen, welche sich auf leichte und sichere Weise in Faktoren zerlegen lassen, so führe man dies aus und hebe mit den im Zähler und Nenner auftretenden etwaigen gleichen Faktoren.

Beispiel 1. Der Ausdruck:

$$\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}$$

sei zu reduzieren.

Durch Zerlegung in Faktoren erhält man:

Man siehe nebenstehendes Beispiel 1, die Uebungsbeispiele in der Aufgabe 36 und die Erkl. 49.

$$\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2} = \frac{(x+y)\cdot(x-y)}{(x-y)\cdot(x-y)}$$

mithin ist:

$$\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2} = \frac{x+y}{x-y}$$

Regel 2.

Sind Zähler und Nenner solche algebraische Summen, welche sich **nicht** auf leichte und sichere Weise in Faktoren zerlegen lassen, so suche man nach der Regel 2, Seite 102, den grössten gemeinschaftlichen Teiler beider Summen und hebe mit demselben den gegebenen Bruch.

Man siehe nebenstehendes Beispiel 2, die Uebungsbeispiele in der Aufgabe 37 und die Erkl. 49.

Beispiel 2. Der Ausdruck:

$$\frac{a^7-3a^4-4a^3-3a^2-a}{a^6-a^4-2a^3-3a^2-2a-1}$$

sei zu reduzieren:

Man suche zwischen Zähler und Nenner den grössten gemeinschaftlichen Teiler, derselbe ist nach dem Beispiel 3, Seite 106 $=$

$$(a^3-a^2-a-1)$$

Dividiert man nun Zähler und Nenner des gegebenen Bruches nach der auf Seite 27 gegegebenen Erkl. 37, so erhält man:

$$\frac{a^7-3a^4-4a^3-3a^2-a}{a^6-a^4-2a^3-3a^2-2a-1} =$$

$$\frac{(a^7-3a^4-4a^3-3a^2-a):(a^3-a^2-a-1)}{(a^6-a^4-2a^3-3a^2-2a-1):(a^3-a^2-a-1)} =$$

$$\frac{a^4+a^3+2a^2+a}{a^3+a^2+a+1}$$

Erkl. 49. Aus nebenstehenden Beispielen 1 und 2 ist ersichtlich, dass in den Fällen in welchen man auf leichte und sichere Weise die Zähler und Nenner in Faktoren zerlegen kann, die **Regel 1** vorzuziehen ist, dass hingegen in denjenigen Fällen in welchen Zähler und Nenner nicht mit Sicherheit in Faktoren zerlegt werden können, die **Regel 2** benutzt werden muss.

Man vergleiche die Uebungsbeispiele in den Aufgaben 36 und 37.

Aufgabe 36. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen Brüche nach vorstehender **Regel 1** reduzieren.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen**

1). $\frac{a^2-2ab}{ab-2b^2} = \frac{a(a-2b)}{b(a-2b)} = \ldots\ldots \frac{a}{b}$

2). $\frac{ac^3-bc^5-c^7}{3bc^2+c^4} = \frac{c^2(ac-bc^3-c^5)}{c^2(3b+c^2)} = \frac{ac-bc^3-c^5}{3b+c^2}$

3). $\frac{a^2+ab}{a^2-ab} = \frac{a(a+b)}{a(a-b)} = \ldots\ldots \frac{a+b}{a-b}$

4). $\frac{7a^2b-7ab^2}{7a^2c-7ac^2} = \frac{7ab(a-b)}{7ac(a-c)} = \frac{b(a-b)}{c(a-c)}$

5). $\frac{x+x^2}{x+1} = \frac{x(x+1)}{(x+1)} = \ldots\ldots x$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

6). $\dfrac{3a^4c+5a^3bc-2a^3c^2}{2ab^2c^2-3a^2b^2c-5ab^3c} = \dfrac{a^3c(3a+5b-2c)}{ab^2c(2c-3a-5b)}$. . . man scheide im Nenner noch den Faktor: — 1 aus.

$= \dfrac{a^3c(3a+5b-2c}{-ab^2c(3a+5b-2c)}$

$= \dfrac{a^3c}{-ab^2c} = -\dfrac{a^2}{b^2}$ man beachte die Erkl. 34, Seite 26.

7). $\dfrac{a^2-ax+a-x}{a^2-ax-a+x} = \dfrac{a(a-x)+(a-x)}{a(a-x)-(a-x)} = \dfrac{(a+1)\cdot(a-x)}{(a-1)\cdot(a-x)} = \dfrac{a+1}{a-1}$

8). $\dfrac{2a^2c^2-3a^2b^2-2b^2c^2+3b^4}{3a^2c^2+2b^4-2a^2b^2-3b^2c^2} = \dfrac{2c^2(a^2-b^2)-3b^2(a^2-b^2)}{3c^2(a^2-b^2)-2b^2(a^2-b^2)} = \dfrac{(2c^2-3b^2).(a^2-b^2)}{(3c^2-2b^2)\cdot(a^2-b^2)}$

$= \dfrac{2c^2-3b^2}{3c^2-2b^2}$

9). $\dfrac{ax+x^2}{3bx-cx} =$?

10). $\dfrac{10a^2-2ab}{15ab-3b^2} =$?

11). $\dfrac{14a^2-7ab}{10ax-5bx} =$?

12). $\dfrac{5x^2+x}{5x^2-x} =$

13). $\dfrac{3a^3b-5ab^2}{5bcd-3acd} =$?

14). $\dfrac{3x^2y-4xy^2}{3x^2y+4xy^2} =$?

15). $\dfrac{2m^2+4mn}{3mn+6n^2} =$?

16). $\dfrac{2a^2b+2ab^2-2abc}{3bc^2-3b^2c-3abc} =$?

17). $\dfrac{a^3-2a^2b+3a^2c}{abc-2b^2c+3bc} =$?

18). $\dfrac{21a^3b^2c-9ab^3c^2}{15a^3b^2c+3a^5b^4c^2} =$?

19). $\dfrac{21a^5b^5c^3-35a^5b^3c^5-49a^3b^5c^5}{35a^2b^4c^6-15a^4b^4c^4+25a^4b^2c^6} =$. . .

20). $\dfrac{ac+bd+ad+bc}{ab+b^2+2ac+2bc} =$?

21). $\dfrac{6m^2-3n-2m^4+m^2n}{9m^2-3p^2-3m^4+m^2p^2} =$. . . ?

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

22). $\frac{a^2-1}{ab+b} = \frac{(a+1)\cdot(a-1)}{b\cdot(a+1)} = \frac{a-1}{b}$

23). $\frac{5a^2+5ax}{a^2-x^2} = \frac{5a\cdot(a+x)}{(a+x)\cdot(a-x)} = \frac{5a}{a-x}$

24). $\frac{x^2+x}{x^2-1} = \frac{x\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{x}{x-1}$

25). $\frac{a^2x-ax^2}{x^2-a^2} = \frac{ax\cdot(a-x)}{(x+a)\cdot(x-a)} = \frac{-ax\,.\,(x-a)}{(x+a)\cdot(x-a)}$. . . um im Zähler und Nenner gleiche Faktoren zu erhalten, musste man im Zähler noch den Faktor: —1 ausscheiden.

$= \frac{-ax}{x+a} = \frac{ax}{a-x}$

26). $\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2} = \frac{(a^2+b^2)\cdot(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)} = a^2-b^2$

27). $\frac{(a^2-x^2)^2-(x^2-b^2)^2}{(a^2-y^2)^2-(y^2-b^2)^2} = \frac{[(a^2-x^2)+(x^2-b^2)]\cdot[(a^2-x^2)-(x^2-b^2)]}{[(a^2-y^2)+(y^2-b^2)]\cdot[(a^2-y^2)-(y^2-b^2)]}$

$= \frac{(a^2-x^2+x^2-b^2)\cdot(a^2-x^2-x^2+b^2)}{(a^2-y^2+y^2-b^2)\cdot(a^2-y^2-y^2+b^2)}$

$= \frac{(a^2-b^2)\cdot(a^2-2x^2+b^2)}{(a^2-b^2)\cdot(a^2-2y^2+b^2)}$

$= \frac{a^2-2x^2+b^2}{a^2-2y^2+b^2}$

28). $\frac{a^{n+1}-a^{n-1}}{a^{p+1}-a^{p-1}} = \frac{a^{n-1}\,.\,(a^2-1)}{a^{p-1}\,.\,(a^2-1)} = \frac{a^{n-1}}{a^{p-1}} = a^{n-1-(p-1)} = a^{n-p}$

29). $\frac{x^{n+2}y^{n-2}-x^{n-2}y^{n+2}}{x^{n+1}y^{n-1}-x^{n-1}y^{n+1}} = \frac{x^{n-2}y^{n-2}\,.\,(x^4-y^4)}{x^{n-1}y^{n-1}\,.\,(x^2-y^2)} = \frac{x^{n-2}y^{n-2}\,.\,(x^2+y^2)\cdot(x^2-y^2)}{x^{n-1}y^{n-1}\,.\,(x^2-y^2)}$

$= \frac{x^2+y^2}{xy}$

30). $\frac{a^3+(1+a)ay+y^2}{a^4-y^2} = \frac{a^3+ay+a^2y+y^2}{(a^2+y)\cdot(a^2-y)} = \frac{a(a^2+y)+y(a^2+y)}{(a^2+y)\cdot(a^2-y)} = \frac{(a+y)\,.\,(a^2+y)}{(a^2+y)\,.\,(a^2-y)}$

$= \frac{a+y}{a^2-y}$

31). $\frac{a^3-a^2x}{a^2-x^2} =$?

32). $\frac{a^2-b^2}{a^2-ab} =$?

33). $\frac{x-x^2}{x-1} =$?

34). $\frac{a^4-b^4}{a^2-b^2} =$?

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:

35). $\frac{a^5b^2 - a^2b^6}{a^5b^3 + a^3b^5} = \ldots\ldots\ldots ?$

36). $\frac{a^6b^2 - a^2b^6}{a^5b^3 + a^3b^5} = \ldots\ldots\ldots ?$

37). $\frac{(a^2 + ab)^2 - (ab + b^2)^2}{(a^2 - ab)^2 - (ab - b^2)^2} = \ldots\ldots ?$

38). $\frac{a^{x+2} - a^{x-2}}{a^{n+1} - a^{n-1}} = \ldots\ldots\ldots ?$

39). $\frac{a^{n+x}b^{n-x} - a^{n-x}b^{n+x}}{a^{p+x}b^{p-x} - a^{p-x}b^{p+x}} = \ldots ?$

40). $\frac{a^2 - b^2 - ac + bc}{ab + ac + b^2 - c^2} = \ldots\ldots ?$ im Zähler und Nenner fasse man je 2 Glieder zusammen und zerlege dieselben.

41). $\frac{a^2 + 2a + 1}{a^2 - 1} = \frac{a^2 + 2a + 1^2}{a^2 - 1^2} = \frac{(a+1)^2}{(a+1)\cdot(a-1)} = \frac{(a+1)\cdot(a+1)}{(a+1)\cdot(a-1)} = \frac{a+1}{a-1}$

42). $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} = \frac{(x+3)\cdot(x-3)}{(x-3)^2} = \frac{x+3}{x-3}$

43). $\frac{(x-y)^2}{(y-x)^2} = \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2} = 1$ man beachte den Zusatz 1, Seite 48.

44). $\frac{(a^2 + ab)^2 - (ab + b^2)^2}{(a^2 - ab)^2 - (ab - b^2)^2} = \frac{[(a^2+ab) + (ab+b^2)]\cdot[(a^2+ab) - (ab+b^2)]}{[(a^2-ab) + (ab-b^2)]\cdot[(a^2-ab) - (ab-b^2)]}$

$$= \frac{(a^2 + 2ab + b^2)\cdot(a^2 - b^2)}{(a^2 - b^2)\cdot(a^2 - 2ab + b^2)} = \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$$

45). $\frac{a^2 - b^2 + c^2 + 2ac}{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc} = \frac{(a^2 + 2ac + c^2) - b^2}{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}$ man fasse im Zähler u. Nenner diejenigen Glieder zusammen, welche ein Binom im Quadrat bilden.

$$= \frac{(a+c)^2 - b^2}{a^2 - (b-c)^2} = \frac{(a+c+b)\cdot(a+c-b)}{(a+b-c)\cdot(a-b+c)}$$

$$= \frac{a+b+c}{a+b-c}$$

46). $\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}{a^2 - b^2 - c^2 - 2bc} = \frac{(a+b+c)^2}{a^2 - (b^2 + 2bc + c^2)}$.. man beachte, dass der Zähler ein Trinom im Quadrat ist, siehe Lehrs. 14, Seite 54. Den Nenner zerlege man, wie in dem Beisp. 45.

$$= \frac{(a+b+c)\cdot(a+b+c)}{a^2 - (b+c)^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)\cdot(a+b+c)}{(a+b+c)\cdot(a-b-c)}$$

$$= \frac{a+b+c}{a-b-c}$$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
47). $\frac{(x+1)^2}{x^2-1}$	$= \ldots\ldots\ldots\ldots ?$	
48). $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$	$= \ldots\ldots\ldots\ldots ?$	
49). $\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}$	$= \ldots\ldots\ldots\ldots ?$	
50). $\frac{m^2-2mn+n^2}{n^2-m^2}$	$= \ldots\ldots\ldots ?$	
51). $\frac{n^3-2n^2}{n^2-4n+4}$	$= \ldots\ldots\ldots\ldots ?$	
52). $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$	$= \ldots\ldots\ldots\ldots ?$	
53). $\frac{n^2+2n+1}{n^2-1}$	$= \ldots\ldots\ldots\ldots ?$	
54). $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$	$= \ldots\ldots\ldots ?$	
55). $\frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{a^2-b^2+2bc-c^2}$	$= \ldots\ldots\ldots ?$	

56). $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} = \frac{(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)}{(a^2+ab+b^2)} = a-b$. . . man beachte die Regel 5, Seite 75.

57). $$\frac{a^4b+ab^4}{a^3b^2+a^2b^3} = \frac{ab\,(a^3+b^3)}{a^2b^2(a+b)} = \frac{ab\cdot(a+b).(a^2-ab+b^2)}{a^2b^2.(a+b)} = \frac{a^2-ab+b^2}{ab}$$

58). $$\frac{(a^3+b^3)\cdot(a^2+ab+b^2)}{(a^3-b^3)\cdot(a^2-ab+b^2)} = \frac{(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)\cdot(a^2+ab+b^2)}{(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)\cdot(a^2-ab+b^2)} = \frac{a+b}{a-b}$$

59). $$\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} = \frac{(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)}{(a+b)\cdot(a-b)} = \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

60). $$\frac{a^4-b^4}{a^3+b^3} = \frac{(a^2+b^2)\cdot(a^2-b^2)}{(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)} = \frac{(a^2+b^2)\cdot(a+b)\cdot(a-b)}{(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)} = \frac{(a^2+b^2).(a-b)}{a^2-ab+b^2}$$

61). $\frac{a^4+b^4}{a^3+b^8}$ ist nicht reduzierbar, da sich die Summe zweier geraden Potenzen nicht in Faktoren zerlegen lässt.

62). $$\frac{a^3-b^3}{a^2-2ab+b^2} = \frac{(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)}{(a-b)^2} = \frac{a^2+ab+b^2}{a-b}$$

Uebungsbeispiele: | **Resultate:** | **Andeutungen:**

63). $$\frac{x^3y^3-z^6}{(xy-z^2)^2}=\frac{(xy)^3-(z^2)^3}{(xy-z^2)^2}=\frac{(xy-z^2)\cdot(x^2y^2+xyz^2+z^4)}{(xy-z^2)\cdot(xy-z^2)}$$
$$=\frac{x^2y^2+xyz^2+z^4}{xy-z^2}$$

. . . man beachte, dass der Zähler die **Differenz zweier Kuben** ist und setze daher in der Formel: $(a^3-b^3)=(a-b).(a^2+ab+b^2)$
$a=x.y$ und
$b=z^2$

64). $$\frac{a^3b^3+c^3x^3}{a^2b^2-c^2x^2}=\frac{(ab)^3+(cx)^3}{(ab)^2-(cx)^2}=\frac{(ab+cx)\cdot(a^2b^2-ab\cdot cx+c^2x^2)}{(ab+cx)(ab-cx)}$$
$$=\frac{a^2b^2-abcx+c^2x^2}{ab-cx}$$

. . . zur Zerlegung des Zählers setze man in der Formel:
$(a^3+b^3)=(a+b).(a^2-ab+b^2)$
$a=ab$
$b=cx$
Zur Zerlegung des Nenners setze man in der Formel:
$a^2-b^2=(a+b).(a-b)$
$a=ab$ und
$b=cx$

65). $$\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{(x+y)\cdot(x^3+y^3)}=\frac{x^4+2x^2y^2-x^2y^2+y^4}{(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2)}$$
$$=\frac{(x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2}{(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2)}$$
$$=\frac{(x^2+y^2)^2-x^2y^2}{(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2)}$$
$$=\frac{(x^2+y^2+xy)\cdot(x^2+y^2-xy)}{(x+y)^2.(x^2+y^2-xy)}$$
$$=\frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)^2}$$

. . . den Zähler zerlege man nach dem Beispiel 13, Seite 90.

66). $$\frac{a^4+ab(a^2+b^2)+b^4}{a^4+a^2b^2+b^4}=\frac{a^4+a^3b+ab^3+b^4}{a^4+a^2b^2+b^4}=\frac{a^3(a+b)+b^3(a+b)}{a^4+a^2b^2+b^4}$$
$$=\frac{(a+b)\cdot(a^3+b^3)}{a^4+a^2b^2+b^4}$$

. nun verfahre man weiter wie in dem Beispiel 65; was in jenem Beispiel für den Zähler galt, gilt hier für den Nenner u. umgekehrt.

67). $$\frac{a^6-b^6}{a^4+a^2b^2+b^4}=\frac{(a^2)^3-(b^2)^3}{a^4+a^2b^2+b^4}=\frac{(a^2-b^2)\cdot(a^4+a^2b^2+b^4)}{a^4+a^2b^2+b^4}$$
$$=a^2-b^2$$

. . . man zerlege den Zähler nach der Formel:
$a^3-b^3=(a-b).(a^2+ab+b^2)$
indem man in dieser Formel
$a=a^2$ und
$b=b^2$ setzt.

68). $$\frac{x^{n+2}+x^n+x^{n-2}}{x^{p+2}-x^{p+1}-x^{p-1}+x^{p-2}}=\frac{x^{n-2}.(x^4+x^2+1)}{x^{p-2}.(x^4-x^3-x+1)}$$
$$=\frac{x^{n-2}.(x^2+1+x).(x^2+1-x)}{x^{p-2}.(x^3(x-1)-(x-1))}$$
$$=\frac{x^{n-2}.(x^2+x+1)\cdot(x^2-x+1)}{x^{p-2}.(x^3-1).(x-1)}$$
$$=\frac{x^{n-2}.(x^2+x+1).(x^2-x+1)}{x^{p-2}.(x-1).(x^2+x+1).(x-1)}$$

. . . den Zähler zerlege man weiter nach dem Beispiel 14, Seite 90.

. . . den Faktor (x^3-1) im Nenner zerlege man nach der Formel:
$(a^3-b^3)=(a-b).(a^2+ab+b^2)$
indem man:
$a=x$ und
$b=1$ setzt.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:

$$= \frac{x^{n-2}\,.\,(x^2-x+1)}{x^{p-2}\,.\,(x-1)\,.\,(x-1)} = \frac{x^{n-2-(p-2)}\,.\,(x^2-x+1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^{n-p}\,.\,(x^2-x+1)}{(x-1)^2}$$

69). $\frac{x^3y^3+z^3}{x^5y^5+z^5} = \frac{(xy)^3+z^3}{(xy)^5+z^5}$

$$= \frac{(xy+z)\cdot(x^2y^2-xyz+z^2)}{(xy+z)\cdot(x^4y^4-x^3y^3z+x^2y^2z^2-xyz^3+z^4)}$$

$$= \frac{x^2y^2-xyz+z^2}{x^4y^4-x^3y^3z+x^2y^2z^2-xyz^3+z^4}$$

den Zähler zerlege man nach der Formel:
$a^3+b^3=(a+b)\,.\,(a^2-ab+b^2)$
indem man:
$a=x\,.\,y$ und $b=z$ setzt.
Den Nenner zerlege man nach dem Beispiel 5, Seite 92:
$x^5+b^5=(x+b)\,.\,(x^4-x^3b+x^2b^2-xb^3+b^4)$
indem man:
$x=x\,.\,y$ und $b=z$ setzt.

70). $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$ = ... ?

71). $\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}$ = ... ?

72). $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$ = ... ?

(zu 71 und 72:) man vergl. die Anmerkung zu Beispiel 61.

73). $\frac{a^5b^2-a^2b^5}{a^4b^3-a^3b^4}$ = ... ?

74). $\frac{a^3-x^3}{(a-x)^2}$ = ... ?

75). $\frac{m^4-n^4}{m^3+n^3}$ = ... ?

76). $\frac{a^3+b^3}{a^2+2ab+b^2}$ = ... ?

77). $\frac{m^3n^3-p^3}{(mn-p)^2}$ = ... ?

78). $\frac{a^3b^3-c^6}{a^2b^2-2abc^2+c^4}$ = ... ?

79). $\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{(x-y)\cdot(x^3-y^3)}$ = ... ?

80). $\frac{x^4-y^4}{(x+y)\cdot(x^3-y^3)}$ = ... ?

81). $\frac{(a+b)\cdot(a^3-b^3)}{(a-b)\cdot(a^3+b^3)}$ = ... ?

82). $\frac{x^6+y^6}{x^4-x^2y^2+y^4}$ = ... ?

Uebungsbeispiele:	**Resultate:**	**Andeutungen:**

83). $\dfrac{m^4 + mn(m^2 + n^2) + n^4}{m^4 + m^2n^2 + n^4} = \;\ldots\;?$

84). $\dfrac{n^{x+2} + n^x + n^{x-2}}{n^{y+2} - n^{y+1} - n^{y-1} + n^{y-2}} = \;\ldots\;?$

85). $\dfrac{m^3p^3 + q^3}{m^5p^5 + q^5} = \;\ldots\ldots\;?$

86). $\dfrac{x^{n+2} - 2x^n + x^{n-2}}{x^{n+2} - x^{n+1} + x^{n-1} - x^{n-2}} = \;\ldots\;?$

87). $\dfrac{x^2 - (a+b)x + ab}{x^2 + (c-a)x - ac} = \dfrac{x^2 - ax - bx + ab}{x^2 + cx - ax - ac}$ man beachte die Regel 6, Seite 78.

$$= \frac{x(x-a) - b(x-a)}{x(x+c) - a(x+c)} = \frac{(x-b).(x-a)}{(x-a)\cdot(x+c)} = \frac{x-b}{x+c}$$

88). $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 15} = \dfrac{x^2 - (3+4).x + 12}{x^2 - (3+5)\cdot x + 15}$ man zerlege Zähler und Nenner nach der Regel 6, Seite 78, oder nach der Regel 7, Seite 78.

$$= \frac{x^2 - 3x - 4x + 12}{x^2 - 3x - 5x + 15}$$

$$= \frac{x(x-3) - 4(x-3)}{x(x-3) - 5(x-3)} = \frac{(x-3)\cdot(x-4)}{(x-3)\cdot(x-5)} = \frac{x-4}{x-5}$$

89). $\dfrac{x^2 - x - 20}{x^2 + x - 30} = \dfrac{x^2 + (4-5)\cdot x - 20}{x^2 + (6-5)x - 30} = \dfrac{x^2 + 4x - 5x - 20}{x^2 + 6x - 5x - 30}$

$$= \frac{x(x+4) - 5(x+4)}{x(x+6) - 5(5+6)} = \frac{(x+4)\cdot(x-5)}{(x+6)\cdot(x-5)} = \frac{x+4}{x+6}$$

90). $\dfrac{a^2 - 9ab + 14b^2}{a^2 - ab - 2b^2} = \dfrac{a^2 + (-7b - 2b)\cdot a + 14b^2}{a^2 + (b - 2b)\cdot a - 2b^2} = \dfrac{a^2 - 7ab - 2ab + 14b^2}{a^2 + ab - 2ab - 2b^2}$

$$= \frac{a(a-7b) - 2b(a-7b)}{a(a+b) - 2b.(a+b)} = \frac{(a-7b)\cdot(a-2b)}{(a+b)\cdot(a-2b)} = \frac{a-7b}{a+b}$$

91). $\dfrac{x^2y^2 - 6xyz + 9z^2}{5x^3y^2 + 5x^2yz - 60xz^2} = \dfrac{(xy)^2 - 6z(xy) + 9z^2}{5x(x^2y^2 + xyz - 12z^2)}$

$$= \frac{(xy)^2 - (3z+3z).xy + 9z^2}{5x\cdot((xy)^2 + z(xy) - 12z^2)}$$

$$= \frac{(xy)^2 - (3z+3z).xy + 9z^2}{5x.((xy)^2 + (4z-3z)\cdot(xy) - 12z^2)}$$

$$= \frac{x^2y^2 - 3zxy - 3zxy + 9z^2}{5x(x^2y^2 + 4zxy - 3zxy - 12z^2)}$$

$$= \frac{xy(xy-3z) - 3z(xy-3z)}{5x\cdot(xy(xy+4z) - 3z(xy+4z))}$$

man verfahre nach der Regel 6, Seite 78, indem man in der für diese Regel bestimmten Form:

$x^2 + (a+b)x + ab$

bei Zerlegung des Zählers für:

$x^2 = (xy)^2$
$x = (xy)$
$(a+b) = 6z$
$a.b = 9z^2$ gesetzt denkt.

In analoger Weise zerlege man den Nenner.

Den Zähler hätte man auch als ein Binom im Quadrat betrachten können.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

$$= \frac{(xy-3z)\cdot(xy-3z)}{5x\cdot(xy+4z)\cdot(xy-3z)} = \frac{xy-3z}{5x(xy+4z)}$$

92). $\frac{x^n - x^{n+1} - 2x^{n-2}}{x^p - 2x^{p-1} - 3x^{p-2}} = \frac{x^{n-2}.(x^2-x-2)}{x^{p-2}.(x^2-2x-3)} = \frac{x^{n-2}.(x^2+(-2+1)\cdot x-2)}{x^{p-2}.(x^2+(1-3)\cdot x-3)}$

$$= \frac{x^{n-2}.(x^2-2x+x-2)}{x^{p-2}.(x^2+x-3x-3)} = \frac{x^{n-2}.[x(x-2)+(x-2)]}{x^{p-2}.[x(x+1)-3(x+1)]}$$

$$= \frac{x^{n-2}.(x-2)\cdot(x+1)}{x^{p-2}.(x+1)\cdot(x-3)} = \frac{x^{n-2-(p-2)}.(x-2)}{(x-3)}$$

$$= \frac{x^{n-p}.(x-2)}{x-3}$$

93). $\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6} = \ldots\ldots\ldots ?$

94). $\frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \ldots\ldots\ldots ?$

95). $\frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6} = \ldots\ldots\ldots ?$

96). $\frac{x^2-7x+12}{x^2+2x-15} = \ldots\ldots\ldots ?$

97). $\frac{m^2+2bm+15b^2}{m^2+7bm+10b^2} = \ldots\ldots ?$

98). $\frac{a^2-3ab-4b^2}{a^2-7ab+12b^2} = \ldots\ldots ?$

99). $\frac{a^2b^2-5abc+6c^2}{a^2b^2+abc-12c^2} = \ldots\ldots ?$

100). $\frac{m^2n^2-5mnp+6p^2}{4m^2n^2+12mnp-40p^2} = \ldots ?$

101). $\frac{x^n+x^{n-1}-2x^{n-2}}{x^p+2x^{p-1}-3x^{p-2}} = \ldots\ldots ?$

102). $\frac{15x^2+2x-8}{30x^2-38x+12} = \frac{15x^2+(12-10)x-8}{30x^2-(18+20)x+12} \ldots$ man zerlege Zähler und Nenner nach der Regel 8 (oder nach der Regel 9), Seite 80.

$$= \frac{15x^2+12x-10x-8}{30x^2-18x-20x+12}$$

$$= \frac{5x(3x-2)-4(3x-2)}{10x(3x-2)-6(3x-2)}$$

$$= \frac{(3x-2)\cdot(5x-4)}{(3x-2)\cdot(10x-6)} = \frac{5x-4}{10x-6}$$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
103). $\frac{2x^3+3x^2+x}{x^3-x^2-2x}$	$= \frac{x\cdot(2x^2+3x+1)}{x\cdot(x^2-x-2)} = \frac{2x^2+(2+1)\cdot x+1}{x^2+(1-2)x-2} = \frac{2x^2+2x+x+1}{x^2+x-2x-2} = \frac{x(2x+1)+(2x+1)}{x(x+1)-2(x+1)} = \frac{(x+1)\cdot(2x+1)}{(x+1)\cdot(x-2)} = \frac{2x+1}{x-2}$	. . . nachdem man mit x gehoben hat, zerlege man den Zähler nach der Regel 8, Seite 80, den Nenner nach der Regel 6, Seite 78.
104). $\frac{2a^2-ab-3b^2}{2a^2-5ab+3b^2}$	$= \frac{2a^2+(2b-3b)\cdot a-3b^2}{2a^2+(-2b-3b)a+3b^2} = \frac{2a^2+2ab-3ab-3b^2}{2a^2-2ab-3ab+3b^2} = \frac{a(2a-3b)+b(2a-3b)}{a(2a-3b)-b(2a-3b)} = \frac{(2a-3b)\cdot(a+b)}{(2a-3b)\cdot(a-b)} = \frac{a+b}{a-b}$	
105). $\frac{3x^{n+1}-10x^n+3x^{n-1}}{3x^{n+1}-8x^n-3x^{n-1}}$	$= \frac{x^{n-1}.(3x^2-10x+3)}{x^{n-1}.(3x^2-8x-3)}$	. . . nun hebe man mit x^{n-1} und zerlege die Klammerwerte, wie in den vorhergehenden Beispielen angegeben ist, nach der Regel 8, Seite 80.
106). $\frac{10x^2+14x-12}{15x^2+16x-15}$	$= \ldots\ldots ?$	
107). $\frac{12a^2-14a-10}{8a^2-8a-6}$	$= \ldots\ldots ?$	
108). $\frac{2x^3+5x^2-12x}{7x^3+25x^2-12x}$	$= \ldots\ldots ?$	
109). $\frac{4a^2-7ab+3b^2}{5a^2-3ab-2b^2}$	$= \ldots\ldots ?$	
110). $\frac{3x^{n+1}-10x^n+3x^{n-1}}{3x^{n+1}-8x^n-3x^{n-1}}$	$= \ldots ?$	

Aufgabe 37. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen Brüche nach der auf Seite 109 angeführten **Regel 2** reduzieren.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $\frac{2x^3-x^2+2x+5}{3x^3-x^2+3x+7}$	$= \frac{(2x^3-x^2+2x+5):(x+1)}{(3x^3-x^2+3x+7):(x+1)} = \frac{2x^2-3x+5}{3x^2-4x+7}$	. . . Sucht man nach der auf Seite 102 angeführten Regel 2 den grössten gemeinschaftlichen Teiler beider algebr. Summen, so findet man hierfür: $(x+1)$. Alsdann dividiere man Zähler und Nenner mit diesem grössten gemeinschaftlichen Teiler: $(x+1)$.
2). $\frac{x^4+x^3-2x+8}{2x^4+3x^3-9x+4}$	$= \frac{(x^4+x^3-2x+8):(x^2+3x+4)}{(2x^4+3x^3-9x+4):(x^2+3x+4)} = \frac{x^2-2x+2}{2x^2-3x+1}$	. . . Sucht man den grössten gemeinschaftlichen Teiler zwischen Zähler und Nenner, so findet man hierfür: (x^2+3x+4).

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
3). $\frac{6x^4-5x^3-20x^2+1}{4x^4-17x^2-10x+1} = \ldots.$	?	
4). $\frac{2x^3+3x^2+4x-3}{6x^3+5x^2+6x-5} = \ldots..$	?	
5). $\frac{9x^3+53x^2-9x-18}{x^2+11x+30} = \ldots.$	?	
6). $\frac{1-4x^3+3x^4}{(1-x)^2} = \frac{1-4x^3+3x^4}{1-2x+x^2} =$	?	

14). Ueber das Aufsuchen des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen zweier oder mehrerer algebr. Summen.

Bei dem Aufsuchen des **kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen** zweier oder mehrerer algebr. Summen — d. i. der kleinste Ausdruck in welchem diese Summen als Faktoren enthalten sind — beachte man folgende Regeln:

Regel 1.

Sind die gegebenen Ausdrücke solche algebraische Summen, welche sich auf leichte und **sichere** Weise in Faktoren zerlegen lassen, so zerlege man jede der Summen in ihre Faktoren, alsdann ist das Produkt, welches aus den höchsten Potenzen aller der erhaltenen Faktoren gebildet werden kann, das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Man siehe nebenstehendes Beispiel 1, die gelösten Uebungsbeispiele in der Aufgabe 38 und die Erkl. 50.

Beispiel 1. Man soll das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zwischen den Summen:

$$a^2-b^2$$

$$a^2+2ab+b^2 \text{ bestimmen.}$$

Nach den Regeln der Faktorenzerlegung erhält man:

$$a^2-b^2 = (a+b).(a-b)$$

$$a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$$

Da der Faktor $(a+b)$ in dem Faktor $(a+b)^2$ enthalten ist, so ist:

$$(a+b)^2.(a-b)$$

das gesuchte kleinste gemeinschaftl. Vielfache.

Regel 2.

Sind die gegebenen algebraischen Ausdrücke solche algebraische Summen, welche sich **nicht** auf leichte und **sichere** Weise in Faktoren zerlegen lassen, so suche man nach der auf Seite 102 angeführten Regel 2 den grössten gemeinschaftlichen Teiler dieser Summen, dividiere mit demselben in irgend eine der gegebenen Summen, alsdann ist das Produkt aus diesem somit erhaltenen Quo-

Beispiel 2. Man soll das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zwischen den Summen:

$$2a^3-7a^2+8a-4$$

$$a^2-5a+6 \text{ bestimmen.}$$

Nach dem Beispiel 3, S. 102, ist der grösste gemeinschaftliche Teiler dieser algebraischen Summen $= (a-2)$.

Dividiert man mit demselben in einen, z. B. in den zweiten der gegebenen Ausdrücke, wie folgt:

tienten und der anderen der gegebenen Summe das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Man siehe nebenstehendes Beispiel 2, die gelösten Uebungsbeispiele in der Aufgabe 39 und die Erkl. 50.

$$\begin{array}{rl} a^2 - 5a + 6 & | \; a - 2 \\ a^2 - 2a & | \; a - 3 \\ - \quad + & \\ \hline - 3a + 6 & \\ - 3a + 6 & \\ + \quad - & \\ \hline = \quad = & \end{array}$$

so erhält man zum Quotienten: $(a - 3)$, mithin ist das Produkt:

$$(a - 3) \cdot (2a^3 - 7a^2 + 8a - a)$$

das gesuchte kleinste gemeinschaftl. Vielfache, denn die erste der gegebenen Summen ist direkt in dem gefundenen Ausdruck enthalten, während die zweite der gegebenen Summen deshalb in dem gefundenen Ausdruck enthalten ist, weil sie nach der vorausgegangenen Division in das Produkt:

$$(a - 3) \cdot (a - 2)$$

zerlegt werden kann, der erste dieser Faktoren aber in dem gefundenen Ausdruck direkt, und der zweite dieser Faktoren als grösstes gemeinschaftliches Mass in der 1ten der gegebenen Summe, bezw. in dem 2ten Klammerwert des gefundenen Ausdrucks enthalten ist.

Erkl. 50. Aus den nebenstehenden Beispielen 1 und 2 ersieht man, dass in den Fällen, in welchen man auf leichte und **sichere** Weise die gegebenen Ausdrücke in Faktoren zerlegen kann, die **Regel 1** vorzuziehen ist, dass hingegen in denjenigen Fällen in welchen die gegebenen Ausdrücke **nicht mit Sicherheit** in Faktoren zerlegt werden können, die **Regel 2** benutzt werden muss.

Man siehe die Uebungsbeispiele in den Aufgaben 38 und 39.

Aufgabe 38. Man soll nach der vorstehenden **Regel 1** das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen algebr. Summen bestimmen.

Uebungsbeispiele: | **Resultate:** | **Andeutungen:**

1). Das kleinste gemeinschaftl. Vielfache von:

$3a - 3b$ $3a - 3b = 3 . (a - b)$

$5ac + 5bc$ und . . . $5ac + 5bc = 5c . (a + b)$. . . dies erhält man durch Zerlegung in Faktoren.

$a^2 d - b^2 d$ zu bestimmen. $a^2 d - b^2 d = d(a + b) . (a - b)$

mithin ist:

$3 . 5c . d(a + b) . (a - b)$ oder:

$15cd(a^2 - b^2)$ das gesuchte kleinste gemeinsch. Vielfache.

2). Ebenso, von:

$a^3 - a^2 - a + 1$. . . $a^3 - a^2 - a + 1 = a^2(a - 1) - (a - 1) = (a - 1) . (a^2 - 1) =$

und $(a - 1) . (a + 1) . (a - 1) = (a - 1)^2 . (a + 1)$

$a^3 - a^2 + a - 1$. . . $a^3 - a^2 + a - 1 = a^2(a - 1) + (a - 1) = (a - 1)(a^2 + 1)$

mithin ist:

$(a - 1)^2 . (a + 1) . (a^2 + 1)$ oder, wenn die angedeuteten Multiplikationen ausgeführt werden:

$a^5 - a^4 - a + 1$ das gesuchte kleinste gemeinsch. Vielfache.

3). Ebenso, von:

$x^3 + 8$ und . . . $x^3 + 8 = (x^3 + 2^3) = (x + 2)(x^2 - 2 \cdot x + 2^2)$ man beachte Regel 5, S. 75.

$x^4 - 16$ $x^4 - 16 = ((x^2)^2 - 4^2) = (x^2 + 4) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$

mithin ist:

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
	$(x+2).(x^2-2x+2^2).(x^2+4).(x-2)$	oder, wenn die angedeuteten Multiplikationen ausgeführt werden:
	$x^6-2x^5+4x^4-16x^2+32x-64$	das ges. kl. gemeinsch. Vielfache.

4). Ebenso, von:

$$\left.\begin{array}{l}3a^2-3ab\\4a^2-2ab\\3a^2-ab\\24a^2-6ab\end{array}\right\} = \ldots\ldots ?$$

5). Ebenso, von:

$$\left.\begin{array}{l}mn-n^2\\5mn-10n^2\\m^2-3mn+2n^2\end{array}\right\} = \ldots\ldots ?$$

. Zerlege man nach Regel 6, Seite 78.

6). Ebenso, von:

$$\left.\begin{array}{l}2x+6y\\xz-2xv+3yz-6yv\\2z-4v\end{array}\right\} = \ldots ?$$

7). Ebenso, von:

$$\left.\begin{array}{l}ad-a-bd+b\\2ac+ab-2bc-b^2\\2cd+bd-2c-b\end{array}\right\} = \ldots ?$$

8). Ebenso, von:

$$\left.\begin{array}{l}3a^2+a-2\\3a^2+5a+2\\9a^3+9a^2-4a-4\end{array}\right\} = \ldots\ldots ?$$

. Die 2 ersten Summen zerlege man nach Regel 8, Seite 80.

9). Ebenso, von:

$$\left.\begin{array}{l}x^2+2x-3\\2xy+6y\\2x-2\end{array}\right\} = \ldots\ldots ?$$

Aufgabe 39. Man soll nach der auf Seite 119 angegebenen **Regel 2** das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen algebraischen Summen bestimmen.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). Das kleinste gemeinsch. Vielfache von: $6x^3+13x^2+15x-25$ und $2x^3+4x^2+4x-10$ zu bestimmen.		Nach dem Beispiele 1, Seite 105, ist der grösste gemeinschaftliche Teiler zwischen den gegebenen Summen $= (x^2+3x+5)$ Dividiert man mit demselben in eine der gegebenen Summen, z. B. in die erste, so erhält man zum Quotienten: $(6x-5)$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

mithin ist nach Regel 2, S. 119, das Produkt aus diesem Quotienten und der zweiten der gegebenen Summen, nämlich:

$(6x-5)\cdot(2x^3+4x^2+4x-10)$ das kleinste gemeinsch. Vielfache.

2). Ebenso, von:

$$\left.\begin{matrix} x^4+x^3-2x+8 \\ 2x^4+3x^3-9x+4 \end{matrix}\right\} = \ldots ?$$

3). Ebenso, von:

$$\left.\begin{matrix} 6x^4-5x^3-20x^2+1 \\ 4x^4-17x^2-10x+1 \end{matrix}\right\} = \ldots ?$$

4). Ebenso, von:

$$\frac{2x^3+3x^2+4x-3}{6x^3+5x^2+6x-5} = \ldots ?$$

5). Ebenso, von:

$$\frac{9x^3+53x^2-9x-18}{x^2+11x+30} = \ldots ?$$

15). Ueber Reduktionen mittelst der Vereinigung (Addition) von Brüchen.

Hat man algebraische Summen, deren Glieder sämmtlich oder auch nur teilweise **aus Brüchen** (Quotienten) bestehen und man will derartige Summen **reduzieren**, d. h. auf eine einfachere Form bringen, so beachte man folgende Regel:

Regel.

Man bringe die in einer algebraischen Summe vorkommenden Brüche (Quotienten) — auch die etwaigen vorkommenden Ausdrücke, welche keine Nenner (Divisoren) enthalten — **auf gleiche Benennung**, indem man den Generalnenner, d. i. das **kleinste gemeinschaftliche Vielfache** sämmtlicher Nenner, sucht und jedes der Glieder der gegebenen Summe mit dem Quotienten multipliziert und dividiert, welchen man erhält, wenn man mit dem Nenner des betreffenden Gliedes in das kleinste gemeinschaftliche Vielfache dividiert; alsdann addiere man die somit erhaltenen Brüche und vereinfache was sich nach früheren Regeln und Beispielen vereinfachen lässt.

Man siehe nebenst. Beispiele 1 u. 2 und die gelösten Uebungsbeispiele in der Aufgabe 40.

Beispiel 1. Der Ausdruck:

$$\frac{3a+2b}{a}+\frac{2a^2-2b^2}{ab}-\frac{2a+b}{b}$$

sei zu reduzieren.

Der Generalnenner, d. i. das kleinste gemeinschaftliche Vielfache sämmtlicher Nenner, ist $= ab$; bringt man die Glieder der gegebenen Summe auf diese Benennung, so erhält man:

$$\frac{3a+2b}{a}+\frac{2a^2-2b^2}{ab}-\frac{2a+b}{b} =$$

$$\frac{(3a+2b)\cdot b}{ab}+\frac{2a^2-2b^2}{ab}-\frac{(2a+b)a}{ab} =$$

$$\frac{(3a+2b)b+2a^2-2b^2-(2a+b)a}{ab} =$$

$$\frac{3ab+2b^2+2a^2-2b^2-2a^2-ab}{ab} =$$

$$\frac{2ab}{ab} = 2$$

Beispiel 2. Der Ausdruck:

$$\frac{9}{10x-20}-\frac{26}{15x+45}+\frac{5}{6x}$$

sei zu reduzieren.

Zerlegt man die Nenner des gegebenen Ausdrucks in Faktoren, so erhält man:

$$\frac{9}{10x-20}-\frac{26}{15x+45}+\frac{5}{6x}=\frac{9}{10(x-2)}-\frac{26}{15(x+3)}+\frac{5}{6x}$$

Hieraus ersieht man, dass nach den im Abschnitte 14 aufgestellten Regeln der Generalnenner, bezw. das **kleinste gemeinschaftliche Vielfache** sämmtlicher Nenner =

$$30x(x-2)\cdot(x+3)$$

ist; multipliziert man nun Zähler und Nenner jedes Gliedes der gegebenen algebr. Summe mit demjenigen Quotienten, welchen man erhält, wenn man den Nenner des betreffenden Gliedes in vorstehenden Generalnenner:

$$30x\,.\,(x-2)\,.\,(x+3)$$

dividiert, so wird:

Erkl. 51. Steht vor einem Bruch, dessen Zähler ein Aggregat ist, ein Minuszeichen und der Bruchstrich fällt weg (wie bei der Addition von Brüchen mit gleichen Nennern), so müssen die Vorzeichen im Zähler — analog wie bei dem Auflösen von Klammern vor welchen ein Minuszeichen steht — **gewechselt**, oder es muss der Zähler in eine Klammer eingeschlossen werden.

$$\frac{9}{10x-20}-\frac{26}{15x+45}+\frac{5}{6x}=\frac{9\,.\,3x\,.\,(x+3)}{(10x-20)\,.\,3x\,.\,(x+3)}-\frac{26\,.\,2x\,.\,(x-2)}{(15x+45)\,.\,2x\,.\,(x-2)}+\frac{5\,.\,5\,.\,(x-2)\,.\,(x+3)}{6\,.\,x\,.\,5(x-2)\,.\,(x+3)}$$

oder:

$$=\frac{27x^2+81x}{30x^3+30x^2-180x}-\frac{52x^2-104x}{30x^3+30x^2-180x}+\frac{25x^2+25x-150}{30x^3+30x^2-180x}$$

$$=\frac{27x^2+81x-52x^2+104x+25x^2+25x-150}{30x^3+30x^2-180x}\quad \text{(siehe Erkl. 51)}$$

$$=\frac{210x-150}{30x^3+30x^2-180x}=\frac{30(7x-5)}{30(x^3+x^2-6x)}=\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}$$

Aufgabe 40. Man soll nach der vorstehenden Regel (Seite 122) die nachstehenden Uebungsbeispiele **reduzieren.**

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $\frac{a}{b^2}+a=\frac{a}{b^2}+\frac{ab^2}{b^2}=\frac{a+ab^2}{b^2}=\frac{a(1+b^2)}{a}$

2). $\frac{5x}{3y}-\frac{2}{9xy}+\frac{5y}{6x}=\frac{5x\,.\,6x}{18xy}-\frac{2\,.\,2}{18xy}+\frac{5y\,.\,3y}{18xy}=\frac{30x^2-4+15y^2}{18xy}$ Generalnenner ist: $18xy$

3). $\frac{3a}{5b^2}+\frac{c}{4a}+h=\frac{3a\,.\,4a}{20ab^2}+\frac{c\,.\,5b^2}{20ab^2}+\frac{h\,.\,20ab^2}{20ab^2}$ Generalnenner ist: $20ab^2$

$=\frac{12a^2+5b^2c+20ab^2h}{20ab^2}$

4). $\frac{a-b}{a}+\frac{a^2(b+1)+b^2(a+1)}{ab}-\frac{a+b}{b}=\frac{(a-b)b}{ab}+\frac{a^2(b+1)+b^2(a+1)}{ab}-\frac{(a+b)a}{ab}$

Generalnenner ist: ab

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

$$= \frac{(a-b)\,b + a^2(b+1) + b^2(a+1) - (a+b)\,a}{ab}$$

$$= \frac{ab - b^2 + a^2b + a^2 + ab^2 + b^2 - a^2 - ab}{ab} = \frac{a^2b + ab^2}{ab} = \frac{ab(a+b)}{ab}$$

$$= a + b$$

5). $$\frac{a^2 + 5b^3 - 7c^4}{15} + \frac{3a^2 - 7b^3 + 5c^4}{20} - \frac{2a^2 - b^3 + 5c^4}{30} =$$

$$= \frac{(a^2 + 5b^3 - 7c^4).4}{60} + \frac{(3a^2 - 7b^3 + 5c^4).3}{60} - \frac{(2a^2 - b^3 + 5c^4).2}{60}$$

Generalnenner ist: 60.

$$= \frac{4a^2 + 20b^3 - 28c^4 + 9a^2 - 21b^3 + 15c^4 - 4a^2 + 2b^3 - 10c^4}{60}$$

man beachte die Erkl. 51

$$= \frac{9a^2 + b^3 - 23c^4}{60}$$

6). $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} - \frac{c}{ab} = \ldots\ldots\ldots ?$

7). $\frac{1}{2a} - \frac{2}{3b} + \frac{3}{3a} = \ldots\ldots\ldots ?$

8). $\frac{m}{2n} + \frac{n}{3m} + \frac{3}{5m} = \ldots\ldots\ldots ?$

9). $\frac{2a}{3bc} + \frac{5df}{8b^2c} - \frac{deg}{ab^2c^2} = \ldots\ldots ?$

10). $\frac{c}{2ab} + \frac{4a}{21bc} - \frac{5b}{4ac} = \ldots\ldots ?$

11). $\frac{a^2d}{3b^7c^3} - \frac{3ad}{2b^4c^2} - \frac{b^2}{cd} = \ldots\ldots ?$

12). $\frac{x-2y}{8y} - \frac{2x-y}{12y} = \ldots\ldots ?$

13). $\frac{3m+2n}{m} + \frac{2m^2-2n^2}{mn} - \frac{2m+3n}{n} = ?$

14). $\frac{x^2}{y^2} + 1 + \frac{y^2}{x^2} = \ldots\ldots\ldots ?$

15). $\frac{x^3}{y} + xy + \frac{y^3}{x} = \ldots\ldots\ldots ?$

16). $\frac{x^2}{y^p} - \frac{y^p}{x^n} = \ldots\ldots\ldots ?$

17). $\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} = \ldots\ldots\ldots ?$

18). $\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} = \ldots\ldots\ldots ?$

19). $\frac{3x^2-2y^3}{3} - \frac{4y^3+2x^2}{4} + \frac{22y^3-9x^2}{15} = ?$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

20). $$\frac{8}{3x-6}+\frac{1}{3x+3}=\frac{8}{3(x-2)}+\frac{1}{3(x+1)}=\frac{8(x+1)}{3(x-2).(x+1)}+\frac{1.(x-2)}{3(x+1).(x-2)}$$

Generalnenner ist: $3(x-2).(x+1)$

$$=\frac{8x+8+x-2}{3(x^2-x-2)}=\frac{9x+6}{3(x^2-x-2)}=\frac{3x+2}{x^2-x-2}$$

21). $$\frac{3}{x-1}-\frac{5}{x-2}+\frac{3}{x-3}=\frac{3.(x-2).(x-3)}{(x-1).(x-2).(x-3)}-\frac{5.(x-1).(x-3)}{(x-2).(x-1).(x-3)}+\frac{3.(x-1).(x-2)}{(x-3).(x-1).(x-2)}$$

Generalnenner ist: $(x-1).(x-2).(x-3)$

$$=\frac{3x^2-15x+18-5x^2+20x-15+3x^2-9x+6}{(x-1).(x-2).(x-3)}$$ (man beachte die Erkl. 51)

$$=\frac{x^2-4x+9}{x^3-6x^2+11x-6}$$

22). $$\frac{x^2}{3y^2}-\frac{x^2y^2}{3y^4-x^4}+\frac{x^6}{9y^6-3x^4y^2}+x=\frac{x^2}{3y^2}-\frac{x^2y^2}{3y^4-x^4}+\frac{x^6}{3y^2(3y^4-x^4)}+x$$

Generalnenner ist. $3y^2(3y^4-x^4)$

$$=\frac{x^2.(3y^4-x^4)-x^2y^2.3y^2+x^6+x.3y^2.(3y^4-x^4)}{3y^2.(3y^4-x^4)}$$

$$=\frac{3x^2y^4-x^6-3x^2y^4+x^6+9xy^6-3x^5y^2}{3y^2(3y^4-x^4)}$$

$$=\frac{9xy^6-3x^5y^2}{3y^2(3y^4-x^4)}=\frac{3xy^4-x^5}{3y^4-x^4}$$ nachdem mit: $3y^2$ gehoben wurde.

$$=\frac{x.(3y^4-x^4)}{3y^4-x^4}=x$$ nachdem man im Zähler x ausgeschieden und nochmals mit: $(3y^4-x^4)$ gehoben hat.

23). $$\frac{b+c}{(a-b).(a-c)}+\frac{a+c}{(b-c).(b-a)}+\frac{a+b}{(c-a).(c-b)}=$$

$$=\frac{b+c}{(a-b).(a-c)}+\frac{a+c}{(a-b).(c-b)}+\frac{-(a+b)}{(a-c).(c-b)}$$

$$=\frac{(b+c).(c-b)+(a+c).(a-c)-(a+b).(a-b)}{(a-b).(a-c).(c-b)}$$

$$=\frac{(c+b).(c-b)+(a+c).(a-c)-(a+b).(a-b)}{(a-b).(a-c).(c-b)}$$

$$=\frac{c^2-b^2+a^2-c^2-a^2+b^2}{(a-b).(a-c).(c-b)}$$

. . . um in den Nennern so viel wie möglich gleiche Faktoren zu erhalten, wurde in dem 2. Faktor des Nenners des 2. Gliedes der Faktor: -1 ausgeschieden und der 1. Faktor dieses Nenners damit multipliziert, ferner wurde der Zähler des dritten Quotienten und der erste Faktor im Nenner dieses Quotienten mit: -1 multipliziert. Hiernach kommen in sämmtlichen Nennern nur die Faktoren: $(a-b)$, $(a-c)$ und $(c-b)$ vor, der Generalnenner ist somit $=(a-b).(a-c).(c-b)$

$$=\frac{0}{(a-b).(a-c).(c-b)}=0$$ Null durch jede endliche Zahl dividiert, gibt Null.

24). $$\frac{5a}{6b}-\frac{10a^2-17ab}{12ab-6b^2}=\;.\;.\;.\;.\;.\;?$$

25). $$\frac{2m}{m^2+2mn}+\frac{m}{2mn+4n^2}=\;.\;.\;.\;?$$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

26). $\frac{3}{x} - \frac{1}{2+2x} + \frac{1}{1-3x} = \quad . \; . \; . \; ?$

27). $\frac{5}{x-3} + \frac{5}{x+3} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = ?$

28). $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1} - \frac{5}{x+2} = \quad . \; . \; . \; ?$

29). $\frac{1}{3a^2-3ab} - \frac{5}{4a^2-2ab} + \frac{5}{3a^2-ab} - \frac{17}{24a^2-6ab} = ?$

30). $\frac{2a-1}{2a-b} + \frac{b^2-2a}{b^2-2ab} - \frac{2b^2-a}{2b^2-ab} = \; . \; . \; ?$

31). $\frac{2}{(m-1)^3} + \frac{1}{(m-1)^2} + \frac{2}{m-1} - \frac{1}{m} = ?$

32). $\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab-cd)} + 1 = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2+2(ab-cd)}{2(ab-cd)}$. . . den Summand 1 bringe man unter die Benennung: $2(ab-cd)$

$= \frac{a^2+b^2-c^2-d^2+2ab-2cd}{2(ab-cd)}$. . . je drei Glieder im Zähler bilden ein Binom im Quadrat.

$= \frac{(a+b)^2-(c+d)^2}{2(ab-cd)} = \frac{((a+b)+(c+d)).((a+b)-(c+d))}{2(ab-cd)}$

$= \frac{(a+b+c+d)\cdot(a+b-c-d)}{2(ab-cd)}$

33). $1 - \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} = \quad . \; . \; . \; . \; ?$

34). $1 - \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab-cd)} = \quad . \; . \; . \; . \; ?$

35). $\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x}{1-x^2} - \frac{1-x}{1-x^2}$ Der Generalnenner ist: $(1-x).(1-x)$ bezw. $= 1^2 - x^2 = 1 - x^2$

$= \frac{1+x-1+x}{1-x^2} - \frac{2x}{1-x}$ man beachte auch die Erkl. 51.

36). $\frac{3a}{3a-b} - \frac{3ab}{9a^2-b^2} = \frac{3a(3a+b)}{9a^2-b^2} - \frac{3ab}{9a^2-b^2}$ Der Generalnenner ist: $9a^2-b^2$, denn: $(9a^2-b^2) = (3a+b).(3a-b)$ folglich ist: $3a-b$ in dem Ausdruck $9a^2-b^2$ enthalten.

$= \frac{9a^2+3ab-3ab}{9a^2-b^2} = \frac{9a^2}{9a^2-b^2}$

37). $\frac{b-1}{a-b} + \frac{1}{a+b} - \frac{ab^2-b^3+2a^2b-2ab}{a^3-ab^2}$ Der Generalnenner ist: a^3-ab^2, denn: $a^3-ab^2 = a(a^2-b^2) = a.(a+b).(a-b)$ und in letzterem Ausdruck sind sämmtliche Nenner enthalten.

$= \frac{(b-1).a.(a+b)}{(a-b).a.(a+b)} + \frac{1.a.(a-b)}{(a+b).a.(a-b)} - \frac{ab^2-b^3+2a^2b-2ab}{a.(a^2-b^2)}$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

$$= \frac{a^2b - a^2 + ab^2 - ab + a^2 - ab - ab - ab^2 + b^3 - 2a^2b + 2ab}{a\,.\,(a+b)\,.\,(a-b)}$$

$$= \frac{-a^2b + b^3}{a\,.\,(a^2 - b^2)} = \frac{-b\,.\,(a^2 - b^2)}{a\,.\,(a^2 - b^2)} = -\frac{b}{a}$$

38). $\frac{5}{3x-9} - \frac{8}{5x-15} = \frac{5}{3.(x-3)} - \frac{8}{5.(x-3)} = \frac{5\,.\,5}{3.(x-3).5} - \frac{8\,.\,3}{5.(x-3).3}$

$$= \frac{25 - 24}{15\,.\,(x-3)} = \frac{1}{15\,(x-3)}$$

39). $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \ldots\ldots ?$

40). $\frac{m}{m+n} + \frac{n}{m-n} = \ldots\ldots ?$

41). $\frac{5n}{m+5n} - \frac{m}{m-5n} = \ldots\ldots ?$

42). $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} = \ldots\ldots ?$

43). $\frac{ax}{a^2 - x^2} - \frac{a-x}{a+x} = \ldots\ldots ?$

44). $\frac{2b}{a-1} - \frac{b}{a^2-1} = \ldots\ldots ?$

45). $\frac{2a}{a+b} - \frac{a^2}{a^2-b^2} + \frac{b}{a-b} = \ldots ?$

46). $\frac{a^2}{ab+b^2} + \frac{b^2}{a^2-ab} - \frac{2ab+b^2-a^2}{a^2-b^2} = ?$

47). $\frac{x^2+x+2}{x+x^2} - \frac{x}{1-x^2} + \frac{x+1}{1-x} = \ldots ?$

48). $\frac{2x-3}{3x-3} - \frac{3x-1}{4x+4} + \frac{x+2}{x^2-1} = \ldots ?$

49). $\frac{1}{x-1} - \frac{4}{1-x} - \frac{8}{1+x} + \frac{3x+7}{x^2-1} = . ?$

50). $\frac{a^2 - ab + b^2}{2\,.\,b\,.\,(a-b)} - \frac{a^2 + ab + b^2}{2\,.\,b\,.\,(a+b)} = \ldots ?$

51). $\frac{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}{2\,.\,(a+b)\,.\,a^3} + \frac{a^3 - a^2b + ab^2 - b^3}{2\,.\,(a-b)\,.\,a^3} = ?$

52). $\frac{5x+4}{x-2} - \frac{3x-2}{x-3} - \frac{x^2-2x-17}{x^2-5x+6}$ Zerlegt man den Nenner des dritten Quotienten nach der auf Seite 78 angeführten Regel 6 in Faktoren, so erhält man:

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)\,.\,(x-3)$

und hieraus ersieht man, dass $(x-2)\,.\,(x-3)$ der Generalnenner ist.

$$= \frac{(5x+4).(x-3)}{(x-2).(x-3)} - \frac{(3x-2).(x-2)}{(x-3).(x-2)} - \frac{x^2-2x-17}{(x-2)\cdot(x-3)}$$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:

$$= \frac{5x^2+4x-15x-12-3x^2+2x+6x-4-x^2+2x+17}{(x-2)\cdot(x-3)}$$ (man beachte die Erkl. 51)

$$= \frac{x^2-x+1}{x^2-5x+6}$$

53). $\frac{8}{2x-3}+\frac{5}{3-2x}+\frac{3x-4}{2x^2-x-3}$ Zerlegt man den Nenner des 3ten Quotienten nach der auf Seite 80 angeführten Regel 8 in Faktoren, so erhält man:
$2x^2-x-3 = 2x^2+(2-3)x-3 = (2x-3).(x+1)$
Hieraus ersieht man, dass: $(2x-3).(x+1)$ der Generalnenner ist, indem sowohl $(2x-3)$ als auch $(3-2x)$ darin enthalten ist.

$$= \frac{8.(x+1)}{(2x-3).(x+1)}+\frac{-5.(x+1)}{(2x-3).(x+1)}+\frac{3x-4}{(2x-3).(x+1)}$$

$$= \frac{8x+8-5x-5+3x-4}{(2x-3).(x+1)} = \frac{6x-1}{2x^2-x-3}$$

54). $\dfrac{a+b-\dfrac{2(a+2b)}{3}}{a-b-\dfrac{2(a-2b)}{3}} = \dfrac{\dfrac{3(a+b)-2(a+2b)}{3}}{\dfrac{3(a-b)-2(a-2b)}{3}}$ man bringe die Glieder im Zähler und ebenso die Glieder im Nenner unter gleiche Benennung.

$$= \frac{3(a+b)-2(a+2b)}{3(a-b)-2(a-2b)} = \frac{3a+3b-2a-4b}{3a-3b-2a+4b}$$

$$= \frac{a-b}{a+b}$$

55). $\left(\frac{z+x}{x}-\frac{2x}{x-z}\right)\cdot\frac{x-z}{z^2+x^2} = \frac{(x+z)(x-z)-2x^2}{x(x-z)}\cdot\frac{x-z}{z^2+x^2}$. . . man addiere zuerst die Quotienten in der Klammer.

$$= \frac{x^2-z^2-2x^2}{x.(x-z)}\cdot\frac{x-z}{z^2+x^2}$$

$$= \frac{-(x^2+z^2).(x-z)}{x(x-z).(x^2+z^2)} = -\frac{1}{x}$$

56). $\frac{x-2}{x^2-x+1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1} = ?$. . Der Generalnenner ist gleich dem Produkt bestehend aus sämmtlichen Nennern.

57). $\frac{x-2}{x^2-5x+6}+\frac{x-2}{x^2-9x+14} = . . ?$ man verfahre nach vorstehendem Beispiel 52.

58). $\frac{3x-2}{x^2-6x-6}-\frac{5x-3}{x^2+x-12} = . . ?$

59). $\frac{5x-2}{x^2-3x-4}+\frac{2x+1}{x^2-x-12}-\frac{3x-1}{x^2+x-20} = ?$

60). $\frac{x-1}{x^2-7x+10}-\frac{x-2}{x^2-9x+14}-\frac{x-3}{x^2-12x+35} = ?$

61). $\frac{x}{x^2-1}-\frac{x^2+x-1}{x^3-x^2+x-1}+\frac{x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}-\frac{x^3}{x^4-1} = ?$ Zerlegt man sämmtliche Nenner in Faktoren (die Nenner des 2. und 3. Quotienten, indem man aus je 2 Gliedern derselben einen Faktor ausscheidet), so erhält man als Generalnenner:
$(x^2+1).(x^2-1)$ oder: (x^4-1)

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
62). $\frac{x-4}{2x-1}-\frac{3x-5}{x+2}+\frac{5x^2+9x+14}{2x^2+3x-2}=$	?	man verfahre nach vorstehendem Beispiel 53.
63). $\frac{x-y+\frac{2xy}{x-y}}{x+y-\frac{2xy}{x+y}}=$	 ?	man verfahre nach vorstehendem Beispiel 54.
64). $\left(1+\frac{b}{2a+b}\right):\left(1-\frac{b}{2a+b}\right)=$	. . ?	man bringe zuerst in jeder der Klammern die Summanden unter gleiche Benennung, dann dividiere man die erhaltenen neuen Quotienten, indem man den Divisorbruch umdreht und multipliziert, bezw. hebt.
65). $\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2=$	 ?	man führe die angedeuteten Potenzierungen aus (bei den Nennern ist die vollständige Ausführung nicht nötig), dann addiere man die erhaltenen Quotienten.

66). $\frac{bc}{(a+b)(a+b+c)}+\frac{ac}{(a+b)\cdot(a+b+c)}+\frac{bc}{(a+c)\cdot(a+b+c)}+$

$\frac{ab}{(a+c)(a+b+c)}+\frac{ac}{(b+c)\cdot(a+b+c)}+\frac{ab}{(b+c)\cdot(a+b+c)}=$? . . . man addiere zunächst je 2 der Quotienten, welche gleiche Nenner haben.

67). $\frac{my-n}{y^2+(m+n+p)y+(m+n)p}-\frac{ny+m}{m^2+2mn+n^2-y^2}=$? . . man zerlege zur Bestimmung des Generalnenners die Nenner in Faktoren, beim 1. Nenner betrachte man $(m+n)$ als eine Grösse, beim 2. Nenner beachte man, dass ein Binom im Quadrat in demselben enthalten ist.

68). $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{x}{(x-2)^4}+\frac{2x-1}{x^2+2x+3}+\frac{3x-1}{(x^2+2x+3)^2}+\frac{x-2}{(x^2+2x+3)^3}=$?

C. Das Potenzieren mit dem Exponenten Null.

In dem Zusatz 1, Seite 26, wurde bereits gezeigt, dass Potenzen mit dem Exponenten **Null**,

z. B.: a^0

vorkommen und dass auch einer solchen Potenz einen Sinn beiwohnt, obgleich sie nach der gegebenen Definition einer Potenz (siehe die Antworten der Fragen 1, 2 und 8, Seite 1 und 5) eigentlich nicht denkbar ist, denn dieser Definition entsprechend würde z. B.: a^0 heissen:

„a soll Null mal mit sich selbst multipliziert werden“

was sich nicht veranschaulichen lässt.

Um mit solchen, sogenannten **Null-Potenzen** rechnen zu können, beachte man folgende Lehrsätze:

Lehrsatz 18. Jede Potenz mit dem Exponenten Null ist $= 1$.

Man vergleiche hiermit die mit dem Lehrsatze 27 aufgestellten Relationen: Nr. 7, 12 und 17.

Erkl. 52. Die Zahl 0 wird dargestellt durch die Differenz zweier gleichen Grössen — siehe das erste Kapitel der Buchstabenrechnung und zwar den Abschnitt, welcher über die **Null und die negativen Zahlen** handelt.

Vorauss. Gegeben sei die Potenz: a^0

Behaupt. $a^0 = 1$

Beweis.

$a^0 = a^{m-m}$ (siehe Erkl. 52)

$a^0 = \frac{a^m}{a^m}$ (siehe Zusatz 4, Seite 24)

$a^0 = 1$ (siehe Lehrsatz 10, S. 25).

Zusatz 1. Nach vorstehendem Lehrsatz kann man die Zahleneinheit als Symbol der 0^{ten} Potenz irgend einer endlichen Zahl betrachten.

Lehrsatz 19. Sämmtliche für **ganze positive** Exponenten aufgestellten Lehrsätze — **ausgenommen** der Lehrsatz 2, Seite 7 (vergl. hierüber die im Lehrsatz 27 aufgestellte Relation Nr. 7) und die Lehrsätze 12 bis 17, welche nur für **ganz bestimmte** Exponenten entwickelt wurden — gelten auch für Potenzen mit dem Exponenten **Null.**

Man vergl. hiermit den Lehrsatz 27.

Vorauss. a, b und c seien **von Null** verschiedene endliche Zahlen, n sei eine ganze positive Zahl.

Behaupt. 1). . . $1^0 = 1$ (Lehrs. 1, Seite 7),

2). $(-a)^0 = 1$ („ 3, „ 8),

3). $a^n . a^0 = a^{n+0}$ („ 6, „ 15), Umkehr.: $a^{n+0} = a^n . a^0$

4). $a^0 . b^0 = (ab)^0$ („ 7, „ 16), „ $(ab)^0 = a^0 . b^0$ (Lehrs. 4, Seite 9)

5). $a^n : a^0 = a^{n-0}$ („ 8, „ 22), „ $a^{n-0} = \frac{a^n}{a^0}$

6). $a^0 : b^0 = \left(\frac{a}{b}\right)^0$ („ 9, „ 24), „ $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = \frac{a^0}{b^0}$ (Lehrs. 5, Seite 10)

7). $a^0 : a^0 = 1$ („ 10, „ 25),

8). a). $(a^0)^0 = a^{0.0}$, b). $(a^0)^n = a^{0.n}$ („ 11, „ 41), „ $a^{0.0} = (a^0)^0$, $a^{0.n} = (a^0)^n = (a^n)^0$

Beweis. 1). . . $1^0 = 1^{m-m} = \frac{1^m}{1^m} = \frac{1}{1} = 1$ (s. Erkl. 52 u. Zus. 4, S. 24)

2). $(-a)^0 = (-a)^{m-m} = \frac{(-a)^m}{(-a)^m} = 1$ (siehe Lehrs. 10, Seite 25)

3). $a^n . a^0 = a^n . 1 = a^n = a^{n+0}$ (siehe Lehrs. 18 und Erkl. 53)

Erkl. 53. Eine Zahl (Grösse) bleibt unverändert, wenn man **Null** zu derselben addiert oder davon subtrahiert.

Erkl. 54. Ein Produkt ist $= 0$, wenn ein Faktor desselben $= 0$ ist, so ist z. B.:

$$n \, . \, 0 = 0$$

4). $a^0 . b^0 = 1 . 1 = 1 = (ab)^0$ (nach Lehrs. 18)

5). $a^n : a^0 = a^n : 1 = a^n = a^{n-0}$ (siehe Erkl. 53)

6). $a^0 : b^0 = 1 : 1 = 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^0$ (nach Lehrs. 18)

7). $a^0 : a^0 = 1 : 1 = 1$

8). a). $(a^0)^0 = 1^0 = 1 = a^0 = a^{0 \cdot 0}$

b). $(a^0)^n = (1)^n = 1 = a^0 = a^{0 \cdot n}$ (s. Erkl. 54).

Aufgabe 41. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Potenzierungen nach den vorstehenden Lehrsätzen ausführen.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $b^0 . c^0 = 1 . 1 =$	1	nach Lehrs. 18.
oder: $= (b . c)^0 =$	1	nach Lehrs. 4, Seite 9, und nach Lehrs. 19.
2). $\left(\frac{m}{n}\right)^0 =$	1	nach Lehrs. 18.
oder: $= \frac{m^0}{n^0} = \frac{1}{1} =$	1	nach Lehrs. 5, Seite 10, und nach Lehrs. 19.
3). $3a^0 + 4b^0 = 3 . 1 + 4 . 1 = 3 + 4 =$	7	
4) $(x^n)^0 =$	1	nach Lehrs. 18, wenn man x^n als Basis betrachtet.
oder: $= x^{n . 0} = x^0 =$	1	nach Lehrs. 11, Seite 41, und nach Lehrs. 19.
5). $\left(-\frac{x . y}{4}\right)^0 =$	1	nach Lehrs. 18, wenn man: $-\frac{x . y}{4}$ als Basis betrachtet.
oder: $= \left(\frac{-x . y}{4}\right)^0 = \frac{(-x)^0 . y^0}{4^0} = \frac{1.1}{1} =$	1	nach den Lehrsätzen 4, 5 u. 19.

6). $x^0 = \ldots \ldots$?

7). $d^0 . e^0 = \ldots \ldots$?

8). $a^0 . x^0 = \ldots \ldots$?

9). $m^0 . n^0 . p^0 = \ldots \ldots$?

10). $a^4 . a^0 = \ldots \ldots$?

11). $3a^0 = \ldots \ldots$?

12). $1^x . 1^0 = \ldots \ldots$?

13). $3a^0 . 4b^0 = \ldots \ldots$?

14). $\frac{x^0}{y^0} = \ldots \ldots$?

Uebungsbeispiele:	**Resultate:**	**Andeutungen:**
15). $\frac{x^5}{z^0} =$	?	
16). $\frac{1}{a^0} =$	?	
17). $\frac{1}{a^0} + \frac{1}{b^0} + \frac{1}{c^0} =$	?	
18). $(x \,.\, y)^0 =$		
19). $(-m)^0 =$	?	
20). $\left(-\frac{3}{4}a\right)^0 =$	?	
21). $\left(-\frac{x \,.\, y}{n}\right)^0 =$		
22). $(a+b)^0 =$	?	
23). $(a-b)^0 =$	?	
24). $(a+b+c)^0 =$	?	
25). $(a+b-c)^0 =$	?	
26). $4 \cdot (a-b)^0 =$	?	
27). $7^0\,(m-n) =$	?	
28). $x^0 \,.\, (a-b)^0 =$	?	
29). $(m^0)^0 =$	?	
30). $(n^0)^x =$	?	
31). $(y^x)^0 =$	?	
32). $(a^4)^0 =$	?	
33). $((m^4)^0)^2 =$	?	
34). $((x^0)^0)^0 =$	?	
35). $(((-ab)^0)^2)^0 =$	?	
36). $\frac{a^0 \,.\, b \,.\, m^0}{c \,.\, d^0} =$	?	

37). $a^0 + b^0 c^0 - (m^0 : n^0) - (x^0)^y + (abc)^0 - \left(\frac{c}{d}\right)^0 + (c^0)^0 =$?

D. Das Potenzieren mit ganzen negativen Exponenten.

In dem Zusatz 3, Seite 23, wurde bereits gezeigt, dass Potenzen mit **negativen** ganzen Exponenten,

z. B.: a^{-2}

vorkommen und dass auch einer solchen Potenz einen Sinn beiwohnen muss (in-

dem sie das Resultat der Division zweier anderen gleichbasigen Potenzen ist) obgleich eine Potenz mit negativem Exponenten nach der gegebenen Definition einer Potenz (siehe die Antw. der Fragen 1, 2 u. 8, Seite 1 u. 5) eigentlich nicht denkbar ist, denn dieser Definition entsprechend würde z. B.: a^{-2} heissen:

„a soll **minus**-zweimal mit sich selbst multipliziert werden"

was sich nicht veranschaulichen lässt.

Um mit derartigen, sogenannten **Minus-Potenzen** rechnen zu können, beachte man folgende Lehrsätze:

Lehrsatz 20. Jede Potenz mit **negativem** Exponenten ist gleich einem Bruch, dessen Zähler Eins und dessen Nenner dieselbe Potenz **aber mit positivem** Exponenten ist.

Dieser Lehrsatz wird auch oft in allgemeinerer Weise wie folgt ausgedrückt:

Jede Potenz mit **negativem** Exponenten ist gleich dem **reciproken** Wert (siehe Erkl. 55) derselben Potenz mit positivem Exponenten, oder:

Jede Potenz mit **negativem** Exponenten ist gleich dem **reciproken Wert der Basis** dieser Potenz potenziert mit demselben aber positivem Exponenten.

Erkl. 55. Unter dem **reciproken** Wert einer Grösse (einer Zahl, eines Ausdrucks) versteht man diejenige Grösse (diejenige Zahl, denjenigen Ausdruck), welcher mit ersterer multipliziert $= 1$ ist. So sind z. B.:

$\frac{1}{3}$ und 3

$\frac{1}{a}$ und a

a^n und $\frac{1}{a^n}$

reciproke Ausdrücke, denn nach der Definition ist:

$$\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

$$\frac{1}{a} \cdot a = 1$$

$$a^n \cdot \frac{1}{a^n} = 1$$

Vorauss. Gegeben seien die Ausdrücke:

$$a^{-n} \text{ und } \frac{1}{a^{-n}}$$

Behaupt. 1). $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ oder:

2). $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

3). $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

Beweis.

1). $a^{-n} = a^{0-n}$

$$a^{-n} = \frac{a^0}{a^n} \text{ (siehe Zusatz 4, S. 24)}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ (siehe Lehrsatz 18),}$$

was zu beweisen war.

2). $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, nach der Behaupt. 1.

$$a^{-n} = \frac{1^n}{a^n} \text{ (siehe Lehrsatz 1, S. 7)}$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \text{ (s. Lehrsatz 9, S. 24)}$$

was zu beweisen war.

3). $\frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{a^n}}$, nach der Behaupt. 1.

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n$$ (denn eine Zahl (hier 1) wird mit einem Bruche $\left(\frac{1}{a^n}\right)$ dividiert, indem man diesen Bruch umkehrt und multipliziert).

Da:

$$a^n = \frac{a^n}{1} = \frac{a^n}{1^n} = \left(\frac{a}{1}\right)^n \text{ ist,}$$

so kann man auch schreiben:

$$\frac{1}{a^{-n}} = \left(\frac{a}{1}\right)^n = a^n$$

was zu beweisen war.

Zusatz 1. Mit vorstehendem Lehrsatz ist die Bedeutung des Symbols:

$$a^{-n}$$

auf den in Antw. der Frage 1, Seite 1, gegebenen Potenzbegriff zurückgeführt, indem hiernach z. B.: a^{-3} oder:

> a soll in die **minus-dritte** Potenz erhoben (mit minus drei potenziert) werden,

nichts anderes heisst, als: $\frac{1}{a}$ soll dreimal mit sich selbst multipliziert werden.

$$a^{-3} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a}\right)^3$$

siehe Behauptung 2 in dem Beweise zu dem Lehrsatz 20.

Zusatz 2. Der Begriff „**Potenz**" ist mittelst den Lehrsätzen 18 und 20 nunmehr dahin erweitert, dass die Exponenten nicht allein ganze positive, sondern auch **ganze negative** Zahlen und **Nulle** sein können.

Zusatz 3. Durch Umkehrung des Lehrsatzes 20 erhält man den weiteren Satz:

> „Jede Potenz mit positivem Exponenten ist gleich dem reciproken Wert dieser Potenz aber mit negativem Exponenten."

z. B.:

$$\frac{1}{a^3} = a^{-3}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^3 = \left(\frac{a}{1}\right)^{-3} = a^{-3}$$

$$a^3 = \left(\frac{1}{a}\right)^{-3} = \frac{1}{a^{-3}}$$

Lehrsatz 21. Kommen im Zähler und Nenner eines Bruches Faktoren mit **negativen** Exponenten vor, so kann man letztere dadurch beseitigen, dass man solche Faktoren aus dem Zähler in den Nenner und umgekehrt versetzt, dann aber die Vorzeichen derjenigen Exponenten, welche den versetzten Faktoren angehören, in die entgegengesetzten verwandelt.

Vorauss. Gegeben sei der Ausdruck:

$$\frac{3^{-1} a^{-4} b^3 c^{-5} (m-n)^{-1}}{2^{-5} x^{-2} d^7 y^{-4}}$$

Behaupt.

$$\frac{3^{-1} a^{-4} b^3 c^{-5} (m-n)^{-1}}{2^{-5} x^{-2} d^7 y^{-4}} = \frac{2^5 b^3 x^2 y^4}{3a^4 c^5 d^7 (m-n)}$$

Beweis. Zerlegt man den gegebenen Ausdruck, wie folgt in Faktoren:

$$\frac{3^{-1} a^{-4} b^3 c^{-5} (m-n)^{-1}}{2^{-5} x^{-2} d^7 y^{-4}} = \frac{3^{-1}}{1} \cdot \frac{a^{-4}}{1} \cdot \frac{b^3}{1} \cdot \frac{c^{-5}}{1} \cdot \frac{(m-n)^{-1}}{1} \cdot \frac{1}{2^{-5}} \cdot \frac{1}{x^{-2}} \cdot \frac{1}{d^7} \cdot \frac{1}{y^{-4}}$$

so erhält man nach dem Lehrsatz 20:

$$\frac{3^{-1} a^{-4} b^3 c^{-5} (m-n)^{-1}}{2^{-5} x^{-2} d^7 y^{-4}} = \frac{1}{3^1} \cdot \frac{1}{a^4} \cdot \frac{b^3}{1} \cdot \frac{1}{c^5} \cdot \frac{1}{(m-n)^1} \cdot \frac{2^5}{1} \cdot \frac{x^2}{1} \cdot \frac{1}{d^7} \cdot \frac{y^4}{1}$$

oder:

$$= \frac{b^3 . 2^5 . x^2 . y^4}{3 . a^4 . c^5 . (m-n) . d^7} = \frac{2^5 b^3 x^2 y^4}{3 a^4 c^5 d^7 (m-n)}$$

Lehrsatz 22. Sämmtliche für **ganze positive** Exponenten aufgestellten Lehrsätze — **ausgenommen** der Lehrsatz 2, Seite 7 (vergl. hierüber die in dem Lehrsatz 27 aufgestellte Relation Nr. 7) und die Lehrsätze 12—17, welche nur für **ganz bestimmte** Exponenten hergeleitet wurden — gelten auch für Potenzen mit **ganzen negativen** Exponenten.

Vorauss. a, b und c seien von Null verschiedene endliche Zahlen.

Behaupt. 1). . . $1^{-n} = 1$ (Lehrs. 1, Seite 7)

2). a). $(-a)^{-2n} = a^{-2n}$
b). $(-a)^{-(2n+1)} = -a^{-(2n+1)}$ („ 3, „ 18)

3). a). $a^{-x} . a^y = a^{-x+y}$
b). $a^{-x} . a^{-y} = a^{-x-y}$ (Lehrs. 6, Seite 15), Umkehr.: $a^{-x+y} = a^{-x} . a^y$, $a^{-x-y} = a^{-x} . a^{-y}$

4). . . $a^{-x} . b^{-x} = (a . b)^{-x}$ („ 7, „ 16), „ $(ab)^{-x} = a^{-x} . b^{-x}$ (Lehrsatz 4, Seite 9)

5). a). $a^{-x} : a^y = a^{-x-y}$
b). $a^{-x} : a^{-y} = a^{-x-(-y)}$ („ 8, „ 22), „ $a^{-x-y} = a^{-x} : a^y$, $a^{-x-(-y)} = a^{-x} : a^{-y}$

6). $a^{-x} : b^{-x} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-x}$ (Lehrs. 9, Seite 24) Umkehr.: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{a^{-x}}{b^{-x}}$ (Lehrsatz 5 Seite 10)

7). $a^{-x} : a^{-x} = 1$ (Lehrs. 10, Seite 25)

8). a). $(a^{x})^{-y} = a^{x.-y}$
b). $(a^{-x})^{-y} = a^{-x.-y}$
c). $((a^{-x})^{-y})^{z} = a^{-x.-y.z}$
(Lehrs. 11, Seite 41) Umkehr.: $a^{x.-y} = (a^{x})^{-y} = (a^{-y})^{x}$
$a^{-x.-y} = (a^{-x})^{-y} = (a^{-y})^{-x}$
u. s. f.

Beweis. 1). . . $1^{-n} = \frac{1}{1^{n}} = \frac{1}{1} = 1$ (siehe die Lehrsätze 20 u. 1)

2). a). $(-a)^{-2n} = \frac{1}{(-a)^{2n}} = \frac{1}{a^{2n}} = a^{-2n}$ (siehe die Lehrsätze 20 und 3, die Erkl. 8, S. 3, und den Zusatz 3, S. 134)

b). $(-a)^{-(2n+1)} = \frac{1}{(-a)^{(2n+1)}} = \frac{1}{-a^{(2n+1)}} = -a^{-(2n+1)}$
(s. die Lehrs. 20 u. 3, die Erkl. 9, Seite 3, und den Zusatz 3, S. 134)

3). a). $a^{-x} . a^{y} = \frac{1}{a^{x}} . a^{y} = \frac{a^{y}}{a^{x}} = a^{y-x} = a^{-x+y}$
(siehe die Lehrsätze 20 und 8)

b). $a^{-x} . a^{-y} = \frac{1}{a^{x}} \cdot \frac{1}{a^{y}} = \frac{1}{a^{x+y}} = a^{-(x+y)} = a^{-x-y}$
(siehe die Lehrsätze 20 u. 6 und den Zusatz 3, Seite 134)

4). . . $a^{-x} . b^{-x} = \frac{1}{a^{x}} \cdot \frac{1}{b^{x}} = \frac{1}{(ab)^{x}} = (ab)^{-x}$
(siehe die Lehrsätze 20 u. 7 und den Zusatz 3, Seite 134)

5). a). $a^{-x} : a^{y} = \frac{1}{a^{x}} : a^{y} = \frac{1}{a^{x} . a^{y}} = \frac{1}{a^{x+y}} = a^{-(x+y)} = a^{-x-y}$
(siehe die Lehrsätze 20 u. 6 und den Zusatz 3, Seite 134)

b). $a^{-x} : a^{-y} = \frac{1}{a^{x}} : \frac{1}{a^{y}} = \frac{a^{y}}{a^{x}} = a^{y-x} = a^{-x+y} = a^{-x-(-y)}$
(siehe die Lehrsätze 20 und 8)

6). . . $a^{-x} : b^{-x} = \frac{1}{a^{x}} : \frac{1}{b^{x}} = \frac{b^{x}}{a^{x}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{x} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-x}$
(siehe die Lehrsätze 20 u. 9 und den Zusatz 3, Seite 134)

7). . . $a^{-x} : a^{-x} = \frac{1}{a^{x}} : \frac{1}{a^{x}} = \frac{a^{x}}{a^{x}} = 1$ (s. die Lehrs. 20 u. 10)

8). a). $(a^{x})^{-y} = \frac{1}{(a^{x})^{y}} = \frac{1}{a^{xy}} = a^{-xy} = a^{x.-y}$
(siehe die Lehrsätze 20 u. 11 und den Zusatz 3, Seite 134)

$$\text{b). } (a^{-x})^{-y} = \left(\frac{1}{a^x}\right)^{-y} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^x}\right)^y} = \frac{1}{\frac{1^y}{a^{xy}}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{xy}}}$$

$$= a^{xy} = a^{-x \cdot -y} \quad \text{(siehe die Lehrs. 20, 5 u. 11)}$$

$$\text{c). } \left((a^{-x})^{-y}\right)^z = \left(a^{-x \cdot -y}\right)^z = a^{-x \cdot -y \cdot -z}$$

(mit Benutzung des vorhergehenden Beweises unter b).

Zusatz 1. Da nach vorstehendem Lehrsatze die früheren für ganze positive Exponenten aufgestellten Lehrsätze 1, 3 bis incl. 11 allgemein für **ganze** Exponenten gelten, so lassen sich jene Sätze nunmehr in allgemeinerer Form fassen. — Dem Studierenden bleibt es überlassen, dies zur Uebung auszuführen.

Aufgabe 42. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen vorkommenden **negativen** Exponenten mit Hülfe des Lehrsatzes 20, bezw. mit Hülfe des Lehrsatzes 21 beseitigen.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $x^{-n} =$	$\frac{1}{x^n}$	
2). $\frac{1}{x^{-n}} =$	x^n	
3). $\left(\frac{5}{a}\right)^{-3} =$	$\left(\frac{a}{5}\right)^3$	
4). $\frac{m^{-7}}{n^{-3}} =$	$\frac{n^3}{m^7}$	
5). $5a^{-3}b^4c^{-2} =$	$\frac{5b^4}{a^3c^2}$	
6). $4m^{-x}(y+2)^{-3}n^4 =$. . .	$\frac{4n^4}{m^x(y+2)^3}$	
7). $2x^{-4}+3x^{-3}-5x^{-2}+6x^{-1}+20x^0 =$	$\frac{2}{x^4}+\frac{3}{x^3}-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x}+20$. . .	man beachte, dass x^0 nach Lehrs. 18 = 1 ist.

8). $m^{-3} =$?

9). $\frac{3}{b^{-4}} =$?

10). $\left(\frac{1}{x}\right)^{-n} =$?

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
11). $\left(\frac{m}{x}\right)^{-n} =$	?	
12). $\frac{a^{-x}}{b^{-y}} =$	?	
13). $\frac{x^{-3}y^{-m}}{a^{-4}b^{-n}} =$	?	
14). $\frac{2a^{-2}b^{-1}c^{5}}{3x^{3}y^{-5}z^{-2}} =$	?	
15). $\frac{a^{-2}b^{3}}{x^{4}y^{-5}} =$	?	
16). $\frac{ab^{-4}}{x^{-1}} =$	?	
17). $\frac{2x^{-1}y^{-1}z^{-2}}{5ab^{-1}c^{-2}} =$	?	
18). $\frac{n^{-8}c^{5}p^{-10}q^{-r}}{x^{-3}y^{-1}d^{-6}z} =$	?	
19). $\frac{3^{-2}a^{2}x^{-4}(c+d)^{-3}}{4^{-3}c^{-8}f^{-5}} =$	?	
20). $\frac{m}{x^{-4}}+\frac{n}{x^{-3}}+\frac{p}{x^{-2}}+\frac{q}{x^{-1}}+\frac{r}{x^{0}} =$	?	

Aufgabe 43. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Operationen mittelst des Lehrsatzes 22 ausführen, alsdann die in den erhaltenen Resultaten etwa vorkommenden n e g a t i v e n Exponenten mittelst des Lehrsatzes 21 beseitigen.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $1^{-m} =$	1	siehe Lehrs. 1, Seite 7, und Zusatz 1, Seite 134.
2). $(-1)^{-2} = +1^{-2} =$	1	siehe Lehrs. 3, Seite 8, und Zusatz 1, Seite 134.
3). $(-a)^{-3} = -a^{-3} =$	$-\frac{1}{a^{3}}$	siehe Lehrs. 3, Seite 8, und Zusatz 1, Seite 134.
4). $3a^{-7}b^{6}c^{-5}.\,5a^{3}b^{-9}c^{7} = 15a^{-4}b^{-3}c^{2} =$	$\frac{15c^{2}}{a^{4}b^{3}}$. . .	man benutze zuerst den Lehrs. 6 und den Zusatz 1, Seite 134, dann den Lehrs. 21.

5). $3(a^{2}-b)^{-4}.\,2(a^{2}-b)^{-5}.\,4(a^{2}-b)^{2} = 24(a^{2}-b)^{-4-5+2}$

$$= 24(a^{2}-b)^{-7} = \frac{24}{(a^{2}-b)^{7}}$$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:

6). $(-7a^{-3}b^{-2}) \cdot (-4a^2b^{-1}) \cdot (-a^2b^2x^{-1}) = -28a^{-3+2+2}b^{-2-1+2}x^{-1}$

$= -28a^{+1}b^{-1}x^{-1} = -\frac{28a}{bx}$

7). $(ax^{-4} + bx^{-3} + cx^{-2} + dx^{-1} + e) \cdot x^4$ man benutze die Erkl. 32, Seite 16.

$= ax^0 + bx^1 + cx^2 + dx^3 + ex^4$. . man berücksichtige Lehrs. 18, S. 130.

$= a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$

8). $(a^{-6}b^{-3} - a^{-7}b^{-5}) \cdot (a^{-2}b + a^{-3}b^{-1})$ man benutze die Erkl. 33, Seite 16.

$= a^{-6-2}b^{-3+1} - a^{-7-2}b^{-5+1} + a^{-6-3}b^{-3-1} - a^{-7-3}b^{-5-1}$

$= a^{-8}b^{-2} - a^{-9}b^{-4} + a^{-9}b^{-4} - a^{-10}b^{-6}$. . Die gleichen entgegengesetzten Glieder fallen weg.

$= a^{-8}b^{-2} - a^{-10}b^{-6} = \frac{1}{a^8b^2} - \frac{1}{a^{10}b^6}$

9). $(a - x)^3 \cdot (x - a)^{-2} = (a - x)^3 \cdot (a - x)^{-2}$ um Potenzen mit gleichen Basen zu erhalten, beachte man den Zusatz 1, Seite 48, derselbe gilt auch für negative Exponenten, denn:

$= (a - x)^{3-2} = (a - x)$

$(a - x)^{-2} = \frac{1}{(a-x)^2} = \frac{1}{(x-a)^2} = (x - a)^{-2}$

10). $1^{-25} =$?

11). $(-m)^{-2} =$?

12). $(-a)^{-3} =$?

13). $(-1)^{-5} =$?

14). $(-1)^{-4} =$?

15). $a^9 \cdot a^{-5} =$?

16). $a^0 \cdot a^{-7} =$? man beachte auch den Lehrs. 18.

17). $b^{-4} \cdot b^{-7} =$?

18). $x^m \cdot x^{-n} =$?

19). $y^m \cdot y^{-5} =$?

20). $x^{n+3} \cdot x^{-5} =$?

21). $8a^{-4} \cdot 3a^3 =$?

22). $a^{-7}x \cdot a^5x^{-2} =$?

23). $a^{-6}b^{-7}c^{-10}a^{-4}b^2c^5 =$?

24). $5ax^{-6} \cdot \frac{1}{2}bx^2 =$?

25). $3^{-2}a^{-5}b^2c^{-8} \cdot 3^2a^5b^{-2}c^8 =$. . . ?

26). $\frac{3}{2}x^5y^4 \cdot \frac{5}{6}x^{-2}y \cdot \frac{4}{3}xy^{-6} =$. . . ?

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

27). $\frac{2}{3} a^{-4} b^5 c^{-1} \cdot \frac{4}{5} a^2 b^{-8} c^3 \cdot \frac{15}{8} a^{-3} b^2 c^{-2} \ldots = ?$

28). $\left(-3\frac{1}{3} a^{-5} b^2 c^{-n}\right) \cdot \left(-2\frac{2}{5} a^4 b^{-3} c^{n-1}\right) = ?$

29). $3\frac{1}{2} a^{-m} b^{-x} c^{y} \cdot \left(-\frac{5}{7} a^{n-1} b^{x-2} c^{2-y}\right) = ?$

30). $(5m^8 n^{-7} - 6m^{-4} n^8 + 15am^{-7} n^{-2}) \cdot 3m^2 n^{-5} p^6 = ?$

31). $(5a^2 + 2b^{-2}) \cdot (3a - 4b^{-2}) = \ldots ?$

32). $(8x^{-2} - 5x^{-3} + 3) \cdot (3x^{-2} + 4x^{-3} - 5) = ?$

33). $(2a + 3a^{-1} + 1) \cdot (2a + 3a^{-1} + 5) = ?$

34). $(2a^{-1} b^2 - 3a^{-4} b^{-2} + 5ab^{-1}) . (3a^{-2} b^{-3} - 2a^{-1} b^{-1}) = ?$

35). $(a^{-1} b^{-2} c^{-3})^2 = \ldots ? \ldots$ man benutze zuerst den Lehrsatz 4 unter Zugrundelegung des Zusatzes 1, Seite 137.

36). $(a - x)^{-4} . (x - a)^5 = \ldots ? \ldots$ siehe die Andeutung zu Beispiel 9.

37). $\frac{a^{-5}}{a^{11}} = a^{-5-11} = a^{-16} = \ldots \frac{1}{a^{16}} \ldots$ man benutze zuerst den Lehrsatz 8, Seite 22, unter Zugrundelegung des Zusatzes 1, Seite 137.

38). $\frac{x^{-5}}{x^{-12}} = x^{-5-(-12)} = x^{-5+12} = x^7$

39). $\frac{b^{n-5}}{b^{-3}} = b^{n-5-(-3)} = b^{n-5+3} = b^{n-2}$

40). $\frac{x^{-n}}{x^{n-2}} = x^{-n-(n-2)} = x^{-n-n+2} = x^{-2n+2} = \frac{1}{x^{2n-2}}$

41). $\frac{-7a}{a^{-7}} = -7 . a^{1-(-7)} = -7 . a^{1+7} = -7a^8 \ldots$ man beachte auch die Erkl. 34, S. 26.

42). $\frac{(a-x)^{-5}}{(a-x)^{-3}} = (a-x)^{-5-(-3)} = (a-x)^{-5+3} = (a-x)^{-2} = \frac{1}{(a-x)^2}$

43). $(x-y)^{-2} : (y-x)^{-1} = (y-x)^{-2} : (y-x)^{-1} = (y-x)^{-2-(-1)}$
$= (y-x)^{-2+1} = (y-x)^{-1} = \frac{1}{y-x}$... um Potenzen mit gleichen Basen zu erhalten, beachte man die Andeutung zu Beispiel 9.

44). $(a-x)^n : (x-a)^{-3} = (x-a)^n : (x-a)^{-3} = (x-a)^{n-(-3)}$
$= (x-a)^{n+3}$... Dies Beispiel ist nur auf diese Weise auszuführen, d. h. man erhält nur dann Potenzen mit gleichen Basen, wenn n eine **gerade** Zahl vorstellt, siehe die Andeutung zu Beisp. 9, bezw. den Zusatz 1, S. 48.

45). $\frac{54x^5 y^{-7} z^4}{42x^{-1} y^{-8} z^{-4}} = \frac{9x^{5-(-1)} y^{-7-(-8)} z^{4-(-4)}}{7.1.1.1}$
$= \frac{9x^6 y^1 z^8}{7} = \frac{9}{7} x^6 y z^8$... Die angedeutete Division führt man am besten aus vermittelst dem Heben, und zwar hebe man zwei gleichbasige Potenzen stets mit derjenigen Potenz, welche den kleinsten positiven oder den grössten negativen Exponenten hat, wonach die negativen Exponenten sofort wegfallen.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:

46). $\frac{21x^{-1}y^5z^{-3}}{35x^{-2}y^6z^{-4}} = \frac{3x^{-1-(-2)}.\,1\,.z^{-3-(-4)}}{5y^{6-5}} = \frac{3x^1.z^1}{5y^1} = \frac{3xz}{5y}$

47). $\frac{3}{4}x^{-3} : \frac{1}{8}x^3 = \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{1}\cdot\frac{x^{-3}}{x^3} = \frac{6.1}{x^{3-(-3)}} = \frac{6}{x^6}$. . . man dividiere zuerst die Koeffizienten, dann die Potenzen.

48). $-4x^{-3}y^2 : -6xy^{-2} = \frac{-4x^{-3}y^2}{-6xy^{-2}}$

$= +\frac{2.1.y^{2-(-2)}}{3.x^{1-(-3)}} = \frac{2y^4}{3x^4}$. . man beachte die Erkl. 34, Seite 26.

49). $\frac{3}{5}x^{-n}y^nz^{-1} : \frac{6}{7}x^{2n}y^{n-2}z^{-3} =$ man dividiere zuerst die Koeffizienten, dann die Potenzen.

$= \frac{3.7}{5.6}\cdot\frac{x^{-n}y^nz^{-1}}{x^{2n}y^{n-2}z^{-3}} = \frac{7y^2z^2}{10x^{3n}}$

50). $\left(\frac{5}{2}a^{-2}b^{-3}c^{-4} + \frac{2}{3}abc^{-1} - \frac{1}{6}a^{-4}b^3c\right) : \frac{5}{6}a^{-2}b^3c^{-4}$ man beachte die Erkl. 26, Seite 26, und das Beispiel 49.

$= \frac{5.6.a^{-2}b^{-3}c^{-4}}{2.5.a^{-2}b^3c^{-4}} + \frac{2.6.abc^{-1}}{3.5.a^{-2}b^3c^{-4}} - \frac{1.6.a^{-4}b^3c}{6.5.a^{-2}b^3c^{-4}}$

$= \frac{3}{b^6} + \frac{4a^3c^3}{5b^2} - \frac{c^5}{5a^2}$

51). $(2 + 9x^2 + x^{-2}) : (x^{-1} + 3x - 2)$

$= (2.x^0 + 9x^2 + x^{-2}) : (x^{-1} + 3x - 2x^0)$

Nach der Erkl. 37, Seite 27, und nebenstehender Andeutung erhält man:

$$\begin{array}{c|c}
\overbrace{9x^2 + 2x^0 + x^{-2}}^{\text{Dividend}} & \overbrace{3x - 2x^0 + x^{-1}}^{\text{Divisor}} \\
9x^2 - 6x + 3x^0 & \underbrace{3x + 2 + x^{-1}.}_{\text{Quotient,}} \\
- \quad + \quad - & \text{oder:} \\
\hline
6x - 1.x^0 + x^{-2} & 3x + 2 + \frac{1}{x} \\
6x - 4x^0 + 2x^{-1} & \\
- \quad + \quad - & \\
\hline
3x^0 - 2x^{-1} + x^{-2} & \\
3x^0 - 2x^{-1} + x^{-2} & \\
- \quad + \quad - & \\
\hline
= \quad = \quad = &
\end{array}$$

. $\frac{3x^0}{3x} = x^{0-1} = x^{-1}$

Um die in diesem Beispiel angedeutete **Partialdivision** (Division **zusammengesetzter** Grössen) ausführen zu können, muss man zunächst nach der Erkl. 37, Seite 27, **alphabetisch**, bezw. nach Potenzen **einer und derselben** Grösse, in diesem Beispiele nach Potenzen von x ordnen. Da nun positive und negative Potenzen dieser Grösse x vorkommen, so beachte man, dass nach fallenden Potenzen von x geordnet man z. B. folgende Reihe erhält:

$x^4, x^3, x^2, x^1, x^0, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}$

Da nun $x^0 = 1$ ist, so kann man den Gliedern, welche keine Potenz von x enthalten, hier der im Dividend und Divisor vorkommenden Grösse 2, den Faktor: x^0 geben.

52). $\frac{a^8}{a^{-3}} =$?

53). $\frac{x^{-4}}{x^{-9}} =$?

Uebungsbeispiele: | **Resultate:** | **Andeutungen:**

54). $\dfrac{m^{-7}}{m^{-5}} = \ldots\ldots\ldots\ldots ?$

55). $\dfrac{x^{-8}}{-x^{8}} = \ldots\ldots\ldots\ldots ?$

56). $\dfrac{m^{-5}}{-5m} = \ldots\ldots\ldots\ldots ?$

57). $\dfrac{3a^{-3}}{-3a^{3}} = \ldots\ldots\ldots\ldots ?$

58). $\dfrac{a^{n}}{a^{n-2}} = \ldots\ldots\ldots\ldots ?$

59). $\dfrac{x^{2}}{x^{3-n}} = \ldots\ldots\ldots\ldots ?$

60). $\dfrac{(a-b)^{3}}{(a-b)^{2-n}} = \ldots\ldots\ldots\ldots ?$

61). $(x-y)^{-3} : (y-x)^{2} = \ldots\ldots ?$ man beachte die Andeutung zu Beispiel 43.

62). $(a-b)^{-3} : (a-b)^{6} = \ldots\ldots ?$

63). $(1-a)^{3} : (a-1)^{n} = \ldots\ldots ?$ man beachte die Andeutung zu Beispiel 44.

64). $\dfrac{7a^{-1}b^{-2}c^{-3}}{8a^{-2}b^{-3}c^{-4}} = \ldots\ldots\ldots ?$

65). $\dfrac{12a^{0}x^{-4}}{4a^{-1}x^{3}y^{-4}} = \ldots\ldots\ldots ?$

66). $\dfrac{18a^{-4}y^{-5}z}{24a^{-3}y^{3}z^{-1}} = \ldots\ldots\ldots ?$

67). $12x^{-7} : 6x^{3} = \ldots\ldots\ldots ?$

68). $\dfrac{2}{3}m^{3} : -\dfrac{5}{6}m^{n+3} = \ldots\ldots ?$

69). $-2a^{-1}x^{3} : -3ax^{-5} = \ldots\ldots ?$

70). $\dfrac{5}{4}a^{-4}b^{2}c^{-3} : \dfrac{3}{2}a^{-6}b^{-3}c^{2} = \ldots ?$

71). $(x^{-6} - x^{-5} + x^{-4} - x^{-3} + x^{-2}) : x^{-3} = \ldots\ldots ?$

72). $(5m^{8}n^{7} - 6m^{4}n^{8} + 15am^{-7}n^{-3}) : -3m^{2}n^{-5}p^{6} = \ldots ?$

73). $\left(4x^{-5} - \dfrac{4}{x^{4}} + 11x^{-3} + \dfrac{3}{x^{2}} + 16\right) : \left(\dfrac{2}{x^{2}} - 3x^{-1} + 4\right) = ?$ man beachte die Andeutung zu Beispiel 51.

74). $\left(\dfrac{1}{a^{-4}} - \dfrac{16}{b^{-4}}\right) : \left(a + \dfrac{2}{b^{-1}}\right) = \ldots ?$.. um besser ordnen zu können, bringe man zuerst die negativen Exponenten weg.

75). $\left(\dfrac{36b^{8}c^{-10}}{a^{-6}} - \dfrac{25a^{2}}{b^{-6}c^{4}} + \dfrac{96c^{-6}}{a^{-4}b^{-5}} - \dfrac{2304a^{6}c^{-8}}{25b^{-4}}\right) : \left(\dfrac{6a^{3}}{b^{-4}c^{5}} - \dfrac{5b^{3}}{a^{-1}c^{2}} + \dfrac{48b^{2}c^{-4}}{5a^{-3}}\right) = ?$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
76). $(a^{-2})^{-3} = a^{-2.-3} =$	a^6	man benutze den Lehrsatz 11 unter Zugrundelegung des Zusatzes 1, Seite 137.
77). $(x^{-4})^0 = x^{-4.0} = x^0 =$	1	man beachte schliesslich den Lehrs. 18, Seite 130.
78). $(-a^3)^{-4} = +(a^3)^{-4} = a^{-12} =$	$\frac{1}{a^{12}}$	man beachte den Lehrs. 3, Seite 8, und Zusatz 1, Seite 137.
79). $(-x^{-4})^{-3} = -(x^{-4})^{-3} = -x^{-4.-3} = -x^{12}$		man beachte den Lehrs. 3, Seite 8, und Zusatz 1, Seite 137.

80). $(-a^{2n-2})^2 = +(a^{2n-2})^2 = a^{(2n-2)2} = a^{4n-4}$

81). $(-x^{-3})^{2n-1} = -(x^{-3})^{2n-1} = -x^{-3(2n-1)} = -x^{-6n+3}$

$$= -x^{3-6n}$$

82). $(3x^{-2}y^3z^{-3})^{-3} = 3^{-3}x^{-2.-3}y^{3.-3}z^{-3.-3}$

$$= 3^{-3}.x^6y^{-9}z^9 = \frac{x^6z^9}{3^3y^9}$$

83). $\left(\frac{a^5b^{-4}}{x^{-1}y^2}\right)^{-3} = \frac{a^{-15}b^{12}}{x^3y^{-6}} = \frac{b^{12}y^6}{a^{15}x^3}$

84). $\left(\left(-\frac{2a^4b^{-2}}{3c^{-3}}\right)^{-1}\right)^{-2} = \left(-\frac{2a^4b^{-2}}{3c^{-3}}\right)^{-1.-2} = \left(-\frac{2a^4b^{-2}}{3c^{-3}}\right)^2$

$$= +\frac{2^2a^8b^{-4}}{3^2c^{-6}} = \frac{4a^8c^6}{9b^4}$$

85). $\left(\left((x^2-y^{-2})^{-1}\right)^3\right)^{-2} = (x^2-y^{-2})^{-1.3.-2} = (x^2-y^{-2})^6$

$$= \left(x^2-\frac{1}{y}\right)^6$$

86). $(m^{-4})^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

87). $(x^{-n})^0 = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

88). $(a^{-y})^{-4} = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

89). $(-x^2)^{-3} = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

90). $(-x^3)^{-2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

91). $(-x^{-3})^{-2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

92). $(-x^5)^{-2n} = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

93). $(-x^2)^{2n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

94). $(-x^2)^{2n-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

95). $(-x^{2n+1})^{2n} = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

96). $(3a^{-2}b^4c^{-3})^{-3} = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

97). $(x^3 y^4 z^{-5})^{-2} = \ldots\ldots\ldots$?

98). $\left(\frac{m^{-2} n^3}{a^{-3} b^{-1}}\right)^2 = \ldots\ldots\ldots$?

99). $\left(\frac{x^{-3} y}{a^3 b^{-2}}\right)^{-4} = \ldots\ldots\ldots$?

100). $\left(\frac{a^0 b^{-2} c^{-3}}{x y^3 z^{-5}}\right)^{-2} = \ldots\ldots\ldots$?

101). $\left(\frac{2 a^{-1} b^3}{5 c^2 d^{-3}}\right)^{-2} = \ldots\ldots\ldots$?

102). $((a^3)^{-2})^5 = \ldots\ldots\ldots$?

103). $((-a^3)^{-2})^5 = \ldots\ldots\ldots$

104). $\left(((m^2 n^{-3})^{-1})^{-3}\right)^4 = \ldots\ldots\ldots$?

105). $\left(\left(\left(-\frac{x^2 y^{-3} z^{-2}}{a^{-2} f^3}\right)^3\right)^{-1}\right)^2 = \ldots$?

Aufgabe 44. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen **Zahlenausdrücke** berechnen.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \ldots\ldots\ldots \frac{1}{27}$

2). $6^{-3} : 3^{-4} = \frac{6^{-3}}{3^{-4}} = \frac{3^4}{6^3} = \ldots \frac{81}{216}$

3). $0{,}4^{-3} = \left(\frac{4}{10}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8}$

4). $0{,}125^{-3} = \left(\frac{125}{1000}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-3} = \left(\frac{8}{1}\right)^3 = \frac{8^3}{1^3} = 512$

5). $\frac{25}{4^{-4}} = 25 \,.\, 4^4 = 25 \,.\, 256 = 6400$

6). $\left(3\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{17}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{17}\right)^3 = \frac{4^3}{17^3} = ?$

7). $(-0{,}01)^{-2} = +(0{,}01)^{-2} = \left(\frac{1}{100}\right)^{-2} = \left(\frac{100}{1}\right)^2$

$= \frac{100^2}{1^2} = \frac{100^2}{1} = 10\,000$

8). $(-0{,}1)^{-3} = -(0{,}1)^{-3} = -\left(\frac{1}{10}\right)^{-3} = -\left(\frac{10}{1}\right)^3 = -\frac{10^3}{1^3} = -1000$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:

9). $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\right)^{-1} + \left(\left(\left(2^{-1}\right)^{-2}\right)^{-3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1 \cdot -1} + 2^{-1 \cdot -2 \cdot -3 \cdot -4}$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^{+1} + 2^{+24} = \frac{3}{4} + 2^{24}$ u. s. f.

10). $\left(\frac{3}{5}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{4}{11}\right)^{-7} \cdot \left(2\frac{7}{24}\right)^{-7} = \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{11} \cdot 2\frac{7}{24}\right)^{-7}$ man benutze Lehrs. 7, S. 16, unter Zugrundelegung des Zusatzes 1, Seite 137.

$= \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{55}{24}\right)^{-7} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-7} = \left(\frac{2}{1}\right)^{7}$

$= \frac{2^7}{1^7} = 2^7 = 128$

11). $5^{-3} =$?

12). $1^{-1} =$?

13). $9 \cdot 3^{-2} =$?

14). $9^2 \cdot 3^{-5} =$?

15). $\frac{1}{4^{-2}} =$?

16). $\frac{5}{2^{-1}} =$?

17). $\frac{8}{5^{-3}} =$?

18). $(-2)^{-2} =$?

19). $(-5)^{-3} =$?

20). $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} =$?

21). $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} =$?

22). $(0{,}5)^{-2} =$?

23). $(1{,}5)^{-2} =$?

24). $(-0{,}1)^{-3} =$?

25). $(4{,}5)^{-1} =$?

26). $(0{,}625)^{-4} =$?

27). $(-2{,}5)^{-1} =$?

28). $2^{-3} \cdot 2^{-5} =$?

29). $2^3 : 2^{-5} =$?

30). $2^{-5} \cdot 2^3 =$?

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

31). $\left((5^{-2})^{-1}\right)^{-2} = \ldots\ldots\ldots ?$

32). $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right)^{-2} = \ldots\ldots\ldots ?$

33). $\left(\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-2} = \ldots\ldots ?$

34). $\left(\frac{3}{5}\right)^{-7}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{-7} = \ldots\ldots\ldots ?$ siehe Andeutung zu Beispiel 10.

35). $\left(2\frac{7}{12}\right)^{-3}\cdot\left(20\frac{2}{3}\right)^{-3} = \ldots\ldots ?$

36). $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(1\frac{1}{2}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = ?$

Aufgabe 45. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Operationen mit Hülfe der Lehrsätze 12 bis incl. 17 ausführen, alsdann die in den erhaltenen Resultaten etwa vorkommenden n e g a t i v e n Exponenten mittelst des Lehrsatzes 21 beseitigen.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $(5^{-1}a^{-4}b^5-7a^3b^{-9})^2 = (5^{-1}a^{-4}b^5)^2+2.(+5^{-1}a^{-4}b^5.-7a^3b^{-9})+(-7a^3b^{-9})^2$

man benutze den Lehrs. 12, S. 46.

$$= 5^{-2}a^{-8}b^{10}-14.5^{-1}a^{-1}b^{-4}+7^2a^6b^{-18}$$

$$= \frac{b^{10}}{25a^8}-\frac{14}{5ab^4}+\frac{49a^6}{b^{18}}$$

2). $\left(\frac{3^{-1}a^3c^{-4}}{2^{-2}b^{-2}}-\frac{3a^{-2}b^{-5}}{2c^{-3}}\right)^3 = \left(\frac{3^{-1}a^3c^{-4}}{2^{-2}b^{-2}}\right)^3+3\cdot\left(\frac{3^{-1}a^3c^{-4}}{2^{-2}b^{-2}}\right)^2\cdot\left(-\frac{3a^{-2}b^{-5}}{2c^{-3}}\right)+$

$$3\cdot\left(\frac{3^{-1}a^3c^{-4}}{2^{-2}b^{-2}}\right)\cdot\left(-\frac{3a^{-2}b^{-5}}{2c^{-3}}\right)^2+\left(-\frac{3a^{-2}b^{-5}}{2c^{-3}}\right)^3$$

man benutze den Lehrsatz 13, Seite 51.

$$= \frac{3^{-3}a^9c^{-12}}{2^{-6}b^{-6}}-\frac{3.3^{-2}a^6c^{-8}3a^{-2}b^{-5}}{2^{-4}b^{-4}.2c^{-3}}+\frac{3.3^{-1}a^3c^{-4}.3^2a^{-4}b^{-10}}{2^{-2}b^{-2}.2^2c^{-6}}-\frac{3^3a^{-6}b^{-15}}{2^3c^{-9}}$$

$$= \frac{2^6a^9b^6}{3^3c^{12}}-\frac{3^0.2^3a^4}{bc^5}+\frac{3^2c^2}{2^0ab^8}-\frac{3^3c^9}{2^3a^6b^{15}}$$

$$= \frac{64a^9b^6}{27c^{12}}-\frac{8a^4}{bc^5}+\frac{9c^2}{ab^8}-\frac{27c^9}{8a^6b^{15}}$$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

3). $(x+x^{-1})^2 =$? man benutze den Lehrs. 12, S. 46.

4). $(m^2-3m^{-2})^2 =$?

5). $(2ab^{-1}+3a^{-2}b)^2 =$?

6). $\left(\frac{3a^{-3}b^{-2}}{2c^5}-\frac{4b^{-3}c^2}{3a^{-2}}\right)^2=$. . . ?

7). $\left(\frac{2^{-1}x^3y^{-4}}{3^{-1}z^{-1}}-\frac{3x^{-2}y^{-5}}{2z^{-3}}\right)^2=$. . ?

8). $\left(\frac{1^{-1}x^{-3}y^4}{3^{-2}a^{-6}}-\frac{3^2x^{-4}y^3}{1^{-1}a^{-2}}\right)^2=$. . ?

9). $\left(\frac{3}{4}a^{-1}b^2c^{-3}-\frac{1}{2}a^3b^{-2}c^{-3}\right)^2=$. . ?

10). $(4m^{-1}-3n^{-2})^3 =$? man benutze den Lehrs. 13, S. 5.

11). $(x-x^{-1})^3 =$?

12). $\left(\frac{2^{-1}a^3b^{-4}}{1^{-1}z^{-2}}-\frac{3a^{-3}b^{-2}}{2z^{-1}}\right)^3=$. . . ?

13). $(a^{-3}-b^{-2}-c^{-1})^2 =$? man benutze den Lehrs. 14, S. 54.

14). $(2a^{-3}-2b^{-3}-5c^{-1}-2d)^2 =$. . ?

15). $(x-x^{-1})^4 =$? man benutze den Lehrs. 16, S. 61, Methode 1.

16). $(x^{-1}y^{-3}-a^{-2}b^{-1})^6 =$?

17). $\left((4a^{-1}-2n^{-2})^{-3}\right)^{-2} =$? man beachte, dass z. B.: $\left((a-b)^{-2}\right)^{-3}=(a-b)^{-2.-3}=(a-b)^6=\left((a-b)^3\right)^2$ ist.

18). $(a^3+b^{-2}).(a^3-b^{-2})=(a^3)^2-(b^{-2})^2$ man benutze den Lehrs. 17, S. 70.

$$= a^6-b^{-4}=a^6-\frac{1}{b^4}$$

19). $(3a^2+2a^{-2}+6).(3a^2+2a^{-2}-6)$ betrachtet man die beiden ersten Glieder als **eine einzige Grösse**, so kann man Lehrs. 17, alsdann den Lehrs. 12 anwenden.

$$= (3a^2+2a^{-2})^2-6^2$$

$$= (3a^2)^2+2.3a^2.2a^{-2}+(2a^{-2})^2-6^2$$

$$= 9a^4+12a^0+2^2a^{-4}-6^2$$

$$= 9a^4+12+\frac{4}{a^4}-36$$

$$= 9a^4+\frac{4}{a^4}-24$$

Uebungsbeispiele: | **Resultate:** | **Andeutungen:**

20). $(6x^2-3x^{-3}+4-2x^{-1}).(6x^2+3x^{-3}-4-2x^{-1})$. . . Durch richtiges Zusammenfassen je zweier Glieder erhält man die Form: $(a+b).(a-b)$ dann kann man den Lehrsatz 17 und schliesslich den Lehrsatz 12 anwenden.

$$= [(6x^2-2x^{-1})+(4-3x^{-3})].[(6x^2-2x^{-1})-(4-3x^{-3})]$$

$$= (6x^2-2x^{-1})^2-(4-3x^{-3})^2$$

$$= 36x^4-24x+4x^{-2}-(16-24x^{-3}+9x^{-6})$$

$$= 36x^4-24x+4x^{-2}-16+24x^{-3}-9x^{-6}$$

$$= 36x^4-24x+\frac{4}{x^2}-16+\frac{24}{x^3}-\frac{9}{x^6}$$

21). $(2+x^{-1}).(2-x^{-1}) =$?

22). $(2a^{-1}+3a^{-3}).(2a^{-1}-3a^{-3}) =$. ?

23). $\left(\frac{3^{-1}a^{-2}b}{c^{-2}}-\frac{c^{-2}d}{2^{-1}}\right).\left(\frac{3^{-1}a^{-2}b}{c^{-2}}+\frac{c^{-2}d}{2^{-1}}\right) = ?$

24). $(2x^2+3x^{-1}+4x^{-5}).(2x^2+3x^{-1}-4x^{-5}) = ?$

25). $(3a^2-2b^{-1}+c^{-5}).(3a^2+2b^{-1}+c^{-5}) = ?$

26). $(3x^{-2}-2x^{-1}-4x^{-3}+5).(3x^{-2}-2x^{-1}+4x^{-3}-5) = ?$

Aufgabe 46. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen Ausdrücke **reduzieren**, d. h. auf ihre einfachste Form bringen.

Dahin gehört besonders, dass die Null- und Minus-Potenzen beseitigt werden, wobei jedoch zu beachten bleibt, dass etwaige angedeutete Operationen soweit als möglich zuerst ausgeführt werden und dass dann erst die zur Wegschaffung der negativen Exponenten nötigen Umformungen vorgenommen werden.

Uebungsbeispiele: | **Resultate:** | **Andeutungen:**

1). $\frac{1}{a}\left(\frac{m}{a}\right)^{-1} = \frac{1}{a}\left(\frac{a}{m}\right)^{+1} = \frac{1}{a}\cdot\frac{a}{m} = \frac{1}{m}$

2). $\frac{3.a^0}{m^{-4}} = \frac{3.1}{m^{-4}} =$ $3m^4$

3). $\frac{4x^{-n}y^{-3}}{5a^{-4}b^{-m}}\cdot\frac{15a^{-2}b^{3-m}}{14x^n y^{n-3}} = \frac{4.15.x^{-n}y^{-3}a^{-2}b^{3-m}}{5.14.a^{-4}b^{-m}x^n y^{n-3}}$. . nachdem man die Multiplikation der gegebenen Brüche ausgeführt hat, hebe man den somit erhaltenen Quotienten, und zwar so, dass auch gleich die negativen Exponenten wegfallen.

$$= \frac{6.a^2b^3}{7x^{2n}y^n}$$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

4). $$\frac{5a^{-3}(b^{-1}-c^2)^{-3}}{8d^{-6}}\cdot 4a^3(b^{-1}-c^2)^6 d^{-3} = \frac{5a^0(b^{-1}-c^2)^3 d^3}{2}$$

$$= \frac{5}{2}(b^{-1}-c^2)^3 d^3 = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{b}-c^2\right)^3 d^3$$

5). $$\frac{5a^{-3}b^0m^{-5}p}{13c^{10}d^2n^{-1}q^{-3}} : \frac{10a^{-4}b^{-2}c^{-13}q^{11}}{39d^5m^0n^{-6}p^{-7}} = \frac{5a^{-3}b^0m^{-5}p\,.\,39d^5m^0n^{-6}p^{-7}}{13c^{10}d^2n^{-1}q^{-3}.\,10a^{-4}b^{-2}c^{-13}q^{11}}$$

$$= \frac{3ab^{0+2}m^0d^3c^3}{2m^5p^6n^5q^8} = \frac{3ab^2c^3d^3}{2m^5n^5p^6q^8}$$

6). $$\frac{1}{a^{n-2}b^{-2}c^{-3}} : \frac{5}{3}a^{-n}b^{n+2}c^3 = \frac{1}{a^{n-2}b^{-2}c^{-3}} : \frac{5a^{-n}b^{n+2}c^3}{3}$$

$$= \frac{1\,.\,3}{a^{n-2}b^{-2}c^{-3}.\,5a^{-n}b^{n+2}c^3} = \frac{3}{5a^{-2}b^nc^0} = \frac{3a^2}{5b^n}$$

7). $$\left(\frac{x^{-2}y^{-7}z^0}{m^{-5}n^{-11}p^{-13}}\right)^{-4} : \left(\frac{x^2y^{-3}z^{-4}}{m^6n^6p^0}\right)^{-2} = \frac{x^8y^{28}z^0}{m^{20}n^{44}p^{52}} : \frac{x^{-4}y^6z^8}{m^{-12}n^{-12}y^0}$$

$$= \frac{x^8y^{28}}{m^{20}n^{44}p^{52}}\cdot\frac{m^{-12}n^{-12}}{x^{-4}y^6z^8} = \frac{x^{12}y^{22}}{m^{32}n^{56}p^{52}z^8}$$

8). $$\left(\frac{1}{1+a}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{1-a}\right)^{-6}\cdot\left(\frac{1-a}{a+1}\right)^{-4} = \frac{1^5}{(1+a)^5}\cdot\frac{1^{-6}}{(1-a)^{-6}}\cdot\frac{(1-a)^{-4}}{(a+1)^{-4}}$$

$$= \frac{1\,.\,1\,.\,(1-a)^2}{(1+a)^1} = \frac{(1-a)^2}{1+a}$$

9). $$\left((2x^{-2})^{-3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}(-x)^3\right)^{-2}\cdot\left(-(-x^{-1})^2\right)^3 - \left(-x^{-2}\right)^3$$

$$= (2x^{-2})^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot(-x)^{-6}\cdot - (-x^{-1})^6 - (-x^{-6})$$

$$= 2^3x^{-6} + \left(\frac{2}{1}\right)^2\cdot x^{-6}\cdot - x^{-6} + x^{-6} = \frac{8}{x^6} - \frac{4}{x^{12}} + \frac{1}{x^6}$$

10). $$\left(\left(\frac{1}{1-b}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{b^{-1}-1}\right)^2\right)^4 = \left(\frac{1}{1-b}\right)^{-8}\cdot\left(\frac{1}{b^{-1}-1}\right)^8 = \left(\frac{1-b}{1}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{\frac{1}{b}-1}\right)^8$$

$$= (1-b)^8\cdot\left(\frac{b}{1-b}\right)^8 = (1-b)^8\cdot\frac{b^8}{(1-b)^8} = b^8$$

11). $$\left[\left(\left(\left(-\frac{2(x-y^{-2})^5c^{-4}}{3(x^{-2}-y^{-1})^3a^2}\right)^{-1}\right)^2\right)^{-3}\right]^{-2} = \left[-\frac{2(x-y^{-2})^5c^{-4}}{3(x^{-2}-y^{-1})^3a^2}\right]^{-12}$$

. . . man beachte den Lehrsatz 3, Seite 8, und den Zusatz 1, Seite 137.

$$= +\frac{2^{-12}(x-y^{-2})^{-60}c^{48}}{3^{-12}(x^{-2}-y^{-1})^{-36}a^{-24}} = \frac{3^{12}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y}\right)^{36}a^{24}c^{48}}{2^{12}\left(x-\frac{1}{y^2}\right)^{60}}$$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

12). $\left(\frac{3}{a}-\frac{a}{3}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{3}{a}-\frac{a}{3}\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{3}{a}\right)^2-2\cdot\frac{3}{a}\cdot\frac{a}{3}+\left(\frac{a}{3}\right)^2}=\frac{1}{\frac{9}{a^2}-2+\frac{a^2}{9}}$

$=\frac{9a^2}{81-18a^2+a^4}=\frac{(3a)^2}{(9-a^2)^2}=\left(\frac{3a}{a^2-9}\right)^2$. . . man beachte, dass $(a-b)^2=(b-a)^2$ ist.

oder besser:

$\left(\frac{3}{a}-\frac{a}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{9-a^2}{3a}\right)^{-2}=\left(\frac{3a}{9-a^2}\right)^2=\frac{(3a)^2}{(9-a^2)^2}=\frac{(3a)^2}{(a^2-9)^2}=\left(\frac{3a}{a^2-9}\right)^2$

man beachte die vorige Andeutung.

13). $\frac{a^0}{x^{-3}}=$?

14). $\frac{a^{-12}}{a^0}=$?

15). $\frac{1}{3}\left(\frac{m}{3}\right)^{-1}=$?

16). $\frac{a^3b^{-2}}{x^{-5}y^5}\cdot\frac{a^{-3}b^4}{x^6y^{-5}}=$?

17). $\frac{2x^{-1}y^{-2}}{4a^{-2}b^{-4}}\cdot\frac{6x^2y^2}{5a^{-3}b^5}=$?

18). $\frac{4}{15a^{-4}b^{-n}c^0}\cdot\frac{9}{8a^2b^{1-n}c^{-1}}=$. . ?

19). $\frac{3x^2yz^{-1}}{a^{-1}b^2}\cdot\frac{x^2a^{-1}b^{-2}}{3y^{-1}z^{-3}}=$?

20). $\frac{5x^6(y+z)^3u^9}{6a^{-5}b^9}\cdot\frac{3x^{-1}(y+z)^{-4}u^{-8}}{8a^{-7}b^{12}}=$?

21). $\frac{3a^{-2}b^{-1}}{4c^2}:\frac{4a^3c^{-2}}{5b^{-3}d^3}=$?

22). $\frac{a^{-3m}b^{1-2m}}{c^{-4m}d^{7-5m}}:\frac{a^{1-2m}b^3}{c^{3-m}d^{-m-3}}=$. . ?

23). $\frac{3(a+b)^{-7}c^{-4}}{5x^8y^{-4}}:\frac{4x^{-8}y^{-9}}{5(a+b)^3c^{-1}}=$. . ?

24). $\frac{2a^{-5}b^{-4}}{3c^{-4}}:2a^7b^{-5}c^2$?

25). $\frac{7}{3}x^{-5}y^{n-1}z:\frac{5}{6x^4y^{-1}z^0}=$. . . ?

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

26). $\left(\dfrac{a^{-3}b^{-1}c^{-2}}{a\,b^0\,c^{-1}}\right)^{-3} = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$

27). $\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{a-b}{c+d}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{a+b}{c+d}\right)^{-1} = ?$

28). $\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{-1}\cdot\dfrac{1}{(x+y)^{-2}}\cdot(x-y)^{-4} = ?$

29). $\left(\dfrac{a^2b^{-4}c}{d^{-4}m^2}\cdot\dfrac{a^{-3}b^2m^{-3}}{d^5c}\right):\left(\dfrac{a^{-3}c^{-2}}{d^{-1}m^{-1}}:\dfrac{b^{-1}m^4}{a^2c^{-4}}\right) = ?$. . . man führe zuerst die in den Klammern angedeuteten Operationen aus.

30). $\left(\dfrac{3a^0}{b^{-2}}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{b^{-4}}{4a}\right)^{-1} = \;.\;.\;.\;.\;?$

31). $\left(\dfrac{a^{-3}b^{-4}c^{-1}}{x^{-3}y^{-4}}\right)^{-4}\cdot\left(\dfrac{b^{-3}c^0y^7}{a^{-2}x^{-4}}\right)^3 = \;.\;?$

32). $\dfrac{3(xy^{-2})^2}{9z^{-3}}\cdot\dfrac{-z^{-4}}{4(xy)^{-3}}\cdot\dfrac{-(2z)^4x^{-5}}{9y^{-2}} = ?$

33). $\dfrac{(2a^3)^{-1}b^2c^{-3}}{5x^{-2}y^3}:\dfrac{(5x^{-2})^{-2}y^{-3}}{(2^{-1}a^{-2}bc^{-1})^{-3}} = ?$

34). $\dfrac{3a^{-2}(2^{-2}ax^{-2})^{-2}}{2^{-7}(4^4a^2x^{-1})^{-1}}:\dfrac{5a^{-2}x^{-3}(2^{-6}a^{-2}x)^{-3}}{(3^3a^2x^{-2})^{-2}.\,2^{-6}3^3a^{12}x^{-7}} = ?$

35). $\dfrac{(2ab)^{-3}}{(3xy)^{-3}}:\left(\dfrac{3(a^2b^{-3})^{-3}}{(4a^{-1}b^0)^2}:\dfrac{(16ab)^2}{(4x^{-1}y)^{-3}}\right) = \;.\;.\;.\;?$

36). $\dfrac{(-2m)^3}{m^2}+\left(\dfrac{3}{-m^3}\right)^{-1}+\dfrac{1^0}{2m^{-3}}+5\dfrac{(-m)^{2n}}{(-m)^{2n+1}} = ?$

37). $(2x)^3-(-3x)^2-[-(2x)^2]^3-\left(3[(-2x)^{-3}]^{-1}\right)^4 = ?$

38). $\left(\dfrac{3a^0.\,2b^{-1}}{c^{-2}}\right)^{-2}-\dfrac{4\cdot(-a\cdot c^2)^{-1}}{5\cdot(2^{-3})^{-2}}-\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}\right)^{-2}-\dfrac{3((-a^{-1}c)^{-2})^0}{(-0{,}25)^{-2}} = ?$

39). $\left(\dfrac{3x^2}{4y^3}-\dfrac{2y^{-2}}{3x^{-2}}\right)^{-2} = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$ man beachte die Lösung des Beispiels 12.

40). $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{2}\right)^{-3} = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$

II. Anhang.

1). Ueber das Wachsen und Abnehmen der Potenzen.

Lehrsatz 23. Jede ganze Potenz eines Bruches, dessen Zähler und Nenner relative Primzahlen (siehe Erkl. 56) sind — d. i. ein vollständig gehobener Bruch — ist wieder ein Bruch, dessen Zähler und Nenner relative Primzahlen sind.

Erkl. 56. **Primzahlen** sind solche, welche sich nicht in Faktoren zerlegen lassen, z. B.:

3, 5, 7, 11

Relative Primzahlen sind zwei oder mehrere Zahlen, welche keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, z. B.:

4 und 9,
6, 9 und 35 u. s. f.

Vorauss. a und b seien **relative Primzahlen** (siehe Erkl. 56).

Behaupt. In der Gleichung:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3} \text{ sind } a^3 \text{ und } b^3$$

ebenfalls relative Primzahlen.

Beweis. $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a.a.a}{b.b.b}$

Da nach der Voraussetzung und der Erkl. 56 a und b **keine** gemeinschaftliche Faktoren haben, so haben auch die Produkte: $a.a.a$ und $b.b.b$ keine gemeinschaftliche Faktoren, d. h. diese Produkte, bezw. die Zähler und Nenner des Bruches: $\frac{a^3}{b^3}$ sind relative Primzahlen, oder: der neue Quotient $\frac{a^3}{b^3}$ ist wiederum ein vollständig gehobener Bruch.

Lehrsatz 24. Die Potenzen mit ganzen positiven Exponenten aller derjenigen Zahlen, welche grösser **als Eins** sind, **nehmen** mit wachsendem Exponenten an Grösse **zu**.

Erkl. 57. Ist von zwei Grössen a und b die eine, z. B. a grösser als die andere (b), so stellt man dies dar durch das Symbol:

$$a > b$$

welcher Ausdruck nichts anderes bedeutet, als: dass a grösser als b, oder b kleiner als a ist und eine **Ungleichung** genannt wird.

Erkl. 58. Ist $a > b$, dann ist auch:

$$a.c > b.c$$

Beweis. Da nach der Annahme:

$a > b$ ist, so kann man:

$a = b + x$ setzen, wenn x irgend eine Zahl bedeutet, mithin ist auch:

$$a.c = b.c + c.x,$$

woraus folgt, dass

$$a.c > b.c \text{ ist.}$$

Vorauss. Bezeichnet x irgend eine positive Zahl, so stellt: $(1+x)$ eine Zahl dar, welche grösser als 1 ist, in Zeichen: $1 < (1+x)$

Behaupt.

$$(1+x) < (1+x)^2 < (1+x)^3 < (1+x)^4 < (1+x)^5 < \text{u. s. f.}$$

Beweis. Da nach der Voraussetzung:

1). $1 < (1+x)$ ist,

so ist auch nach der Erkl. 58:

$1.(1+x) < (1+x).(1+x)$ oder:

2). $(1+x) < (1+x)^2$

Nach der Erkl. 58 ist ferner:

$(1+x).(1+x) < (1+x)^2.(1+x)$ oder:

3). $(1+x)^2 < (1+x)^3$ u. s. f.

Aus den Ungleichungen 1)., 2)., 3). . . . (siehe Erkl. 57) folgt obige Behauptung:

$$1 < (1+x) < (1+x)^2 < (1+x)^3 < (1+x)^4 < \text{u. s. f.}$$

Lehrsatz 25. Die Potenzen eines **echten** Bruches, deren Exponenten ganze positive Zahlen sind, nehmen mit wachsendem Exponenten ab.

Erkl. 59. Ein **echter** Bruch ist ein solcher, dessen Nenner grösser ist als der Zähler, mithin keine Ganzen enthält.

Ein **unechter** Bruch ist ein solcher, dessen Zähler grösser ist als der Nenner, mithin Ganze enthält.

Einen **echten** Bruch umgekehrt gibt einen **unechten** Bruch und umgekehrt.

Vorauss. $\frac{a}{b}$ sei ein **echter** Bruch (siehe Erkl. 59).

Behaupt. $\left(\frac{a}{b}\right) > \left(\frac{a}{b}\right)^2 > \left(\frac{a}{b}\right)^3 > \left(\frac{a}{b}\right)^4$ u.s.f.

Beweis. Ist $\frac{a}{b}$ ein echter Bruch, so muss $\frac{b}{a}$ ein unechter Bruch (siehe Erkl. 59), nämlich **grösser als Eins** sein; der Bruch $\frac{b}{a}$ nimmt somit nach Lehrsatz 24 mit wachsendem Exponenten an Grösse zu und man hat:

1). . . $\left(\frac{b}{a}\right) < \left(\frac{b}{a}\right)^2 < \left(\frac{b}{a}\right)^3 < \left(\frac{b}{a}\right)^4 <$ u. s. f.

Da nun z. B.:

a). $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{1}{\frac{b}{a}}\right)^3 = \frac{1^3}{\left(\frac{b}{a}\right)^3} = \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^3}$ ebenso:

b). $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \left(\frac{1}{\frac{b}{a}}\right)^4 = \frac{1^4}{\left(\frac{b}{a}\right)^4} = \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^4}$ u.s.f. ist

und nach vorstehender Ungleichung 1). z. B.:

2). . . $\left(\frac{b}{a}\right)^3 < \left(\frac{b}{a}\right)^4$ ist, so muss auch

3). . . $\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^3} > \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^4}$ sein, da ersterer

Bruch nach Ungleichung 2). einen kleineren Nenner als letzterer Bruch hat.

Nach den Gleichungen a). und b). kann man für:

$$\frac{a}{b},\ \left(\frac{a}{b}\right)^2,\ \left(\frac{a}{b}\right)^3,\ \left(\frac{a}{b}\right)^4 \ldots\ldots$$

der Reihe nach setzen:

$$\frac{1}{\frac{b}{a}},\ \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2},\ \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^3},\ \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^4} \ldots\ldots$$

und hieraus erhält man mittelst vorstehender Ungleichung 3:

$$\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)} > \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2} > \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^3} > \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^4} \ldots$$

oder nach den Gleich. a). u. b). obige Behaupt.:

$$\frac{a}{b} > \left(\frac{a}{b}\right)^2 > \left(\frac{a}{b}\right)^3 > \left(\frac{a}{b}\right)^4 \ldots$$

Zusatz 1. Von dem vorstehenden Lehrsatz 25 kann man mit Vorteil Gebrauch machen, wenn man eine solche algebraische Summe zu potenzieren hat, in welcher einer der Summanden gegen die anderen eine **sehr kleine Grösse** ist.

Hat man z. B.:

1). $(a \pm k)^2$ und

2). $(a \pm k)^3$

so erhält man nach den Lehrsätzen 12 und 13:

1[a]). $(a \pm k)^2 = a^2 \pm 2ak + k^2$ und

2[a]). $(a \pm k)^3 = a^3 \pm 3a^2k + 3ak^2 \pm k^3$

Ist nun k gegen a eine **sehr kleine** Grösse, also ein **echter** Bruch, so wird der Wert einer Potenz von k um so kleiner, je höher diese Potenz ist.

Ist daher k schon sehr klein, so ist,

da: $k > k^2 > k^3$ ist,

jede weitere Potenz von k **noch viel kleiner** und man kann diese **Potenzen** von k als sehr kleine Grössen vernachlässigen u. deshalb **annäherungsweise** setzen:

1[b]). $(a \pm k)^2$ ist sehr nahe $= a^2 \pm 2ak$

2[b]). $(a \pm k)^3$ „ „ „ $= a^3 \pm 3a^2k$

Aufgabe 47. Welche Werte kann man

1). für $1 : (1 + k)^2$

2). „ $1 : (1 + k)^3$

3). „ $1 : (1 - k)^2$

4). „ $1 : (1 - k)^3$

setzen, wenn k eine **sehr kleine** Grösse bedeutet?

Auflösung.

1). $1 : (1+k)^2 = \frac{1}{(1+k)^2} = \frac{1}{1+2k+k^2}$ oder:

a). $1 : (1+k)^2$ ist **sehr nahe** $= \frac{1}{1+2k}$, wenn man k^2 als sehr kleine Grösse vernachlässigt (siehe vorstehenden Zusatz).

Führt man die durch: $\frac{1}{1+2k}$ angedeutete Division nach der Erkl. 37, Seite 27, wie folgt aus, indem man den Divisor 1 als die zusammengesetzte Grösse: $1 + 0$ betrachtet,

$$\begin{array}{l|l} \text{Dividend} & \text{Divisor} \\ 1 + 0 & 1 + 2k \\ 1 + 2k & 1 - 2k \\ - \quad - & \text{Quotient} \\ \hline \quad\; - 2k & \\ \quad\; - 2k - 4k^2 & \\ \quad\; + \quad\;\; + & \\ \hline \qquad\quad 4k^2 \ldots \text{Rest} & \end{array}$$

so erhält man:

$$\frac{1+0}{1+2k} = 1 - 2k + \frac{4k^2}{1+2k} \text{ oder:}$$

b). . . $\frac{1}{1+2k} = 1 - 2k + k^2 \cdot \frac{4}{1+2k}$

Da nun k eine sehr kleine Grösse, so ist k^2, bezw. $k^2 \cdot \frac{4}{1+2k}$ um so kleiner und man kann letzteren Ausdruck, ohne einen bedeutenden Fehler zu machen, vernachlässigen.

Hiernach erhält man aus a). und b). auch:

c). . . $1:(1+k)^2$ ist sehr nahe $= 1 - 2k$

In analoger Weise erhält man:

2). $1:(1+k)^3$ ist sehr nahe $= 1 - 3k$
3). $1:(1-k)^2$ „ „ „ $= 1 + 2k$
4). $1:(1-k)^3$ „ „ „ $= 1 - 3k$

(Die Entwicklung hiervon bleibt dem Studierenden überlassen.)

Aufgabe 48. Man soll nachstehende Potenzen auf 5 Dezimalstellen berechnen:

1). $280{,}00005^2$
2). $325{,}00006^3$
3). $42{,}00003^3$
4). $291{,}99992^2$
5). $183{,}99993^2$

Auflösung.

1). $280{,}00005^2 = (280 + 0{,}00005)^2$

$$= \left(280 + \frac{5}{100000}\right)^2$$

$$= 280^2 + 2 \cdot 280 \cdot \frac{5}{100000} + \left(\frac{5}{100000}\right)^2$$

Da nun $\frac{5}{100000}$ eine sehr kleine, und $\left(\frac{5}{100000}\right)^2$ eine noch viel kleinere Grösse ist, so erhält man nach Zusatz 1, Seite 154:

$280{,}00005^2$ ist sehr nahe $= 280^2 + 2 \cdot 280 \cdot \frac{5}{100000}$

oder:

$280{,}00005^2$ „ „ „ $= 78400 + 0{,}02800$

$= 78400{,}02800$

2). $325{,}00006^3 = \ldots ?$
3). $42{,}00003^3 = \ldots ?$
4). $291{,}99992^2 = (292 - 0{,}00008)^2 = ?$
5). $183{,}99993^2 = (184 - 0{,}00007)^2 = ?$

(bleibt dem Studierenden überlassen.)

Man verfahre hierbei wie in der Auflösung zu Beispiel 1). angegeben ist und zwar unter Benutzung der im Zusatze 1, Seite 154, aufgestellten Gleichungen 1b). und 2b).

Anmerkung 7. In nachstehenden 2 Aufgaben soll nur eine Anwendung des Zusatzes 1, Seite 154, gezeigt werden. — Man vergleiche mit diesen beiden Aufgaben das Kapitel: **Die Wärme.**

Aufgabe 49. Eine rechteckige Eisenplatte habe bei 0^0 Celsius einen Flächeninhalt $F = 40$ qdm; wie gross wird diese Eisenplatte, wenn sie bis auf $t = 75^0$ Celsius erwärmt wird und der **lineare Ausdehnungskoeffizient** (siehe Erkl. 60) des Eisens $= 0{,}0000122$ ist?

Erkl. 60. Unter dem **linearen Ausdehnungskoeffizienten** eines Körpers versteht man die Zahl a, welche angibt, um den wievielsten Teil seiner Länge jener Körper ausgedehnt wird, wenn die Temperatur des Körpers um 1^0 Celsius erhöht wird. Da dies fast für alle Körper bei Temperaturerhöhungen zwischen 0^0 und 100^0 C. **gleichmässig** geschieht, so nimmt die Länge eines Körpers von 0^0 Celsius, bezeichnet durch: L_0, bei einer Temperaturerhöhung um: 1^0, 2^0, 3^0 ..., allgemein um t^0 zu, um: $L.a.1$, $L.a.2$, $L.a.3$, allgemein um: $L.a.t$ Längeneinheiten zu; bezeichnet man die Länge des Körpers bei t^0 mit: L_t, so erhält man hiernach die Gleichung:

$$L_t = L_0 + L_0 . at \quad \text{oder:}$$

1). . . . $L_t = L_0(1 + at)$

— Siehe das Kapitel: Die Wärme. —

Erkl. 61. Der Inhalt eines Rechtecks ist gleich der Anzahl der Flächeneinheiten, welche man erhält, wenn man die Länge l mit der Breite b des Rechtecks multipliziert, in Zeichen:

$$F = b . l \text{ Flächeneinheiten.}$$

Auflösung.

Ist allgemein l die Länge, b die Breite der rechteckigen Eisenplatte bei 0^0 Celsius, und bezeichnet man mit l_1 die Länge, mit b_1 die Breite der Platte **nach der Erwärmung** bis auf 75^0, so erhält man für diese **lineare Ausdehnungen** nach der in der Erkl. 60 entwickelten Gleichung 1).:

a). . . . $l_1 = l(1 + at)$

b). . . . $b_1 = b(1 + at)$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen erhält man:

c). . . . $b_1 l_1 = b . l . (1 + at)^2$

Bezeichnet man die Grösse, d. i. der Flächeninhalt der Platte vor der Erwärmung mit F, nach der Erwärmung mit F_1, so erhält man nach der Erkl. 61 aus Gleichung c).:

$$F_1 = F . (1 + at)^2$$

Für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel erhält man:

$F_1 = 40(1 + 0{,}0000122 . 75)^2$ oder:

$F_1 = 40(1^2 + 2.1.0{,}0000122.75 + 75^2.0{,}0000122^2)$

Vernachlässigt man den Summanden: $75^2 . 0{,}0000122^2$, da $0{,}0000122$ eine **sehr kleine**, mithin $75^2 . 0{,}0000122^2$ eine **noch viel kleinere** Grösse ist, so erhält man:

F_1 sehr nahe $= 40(1 + 150 . 0{,}0000122)$ oder:

F_1 „ „ $= 40 . 1{,}00183$

Die gesuchte Grösse der Eisenplatte nach der Erwärmung ist somit:

$$F_1 \text{ sehr nahe } = 40{,}0732 \text{ qdm}$$

Aufgabe 50. Ein Würfel habe bei 0^0 Cels. einen Kubikinhalt von V Kubikeinheiten; welchen Kubikinhalt hat dieser Würfel, wenn er auf t^0 Cels. erwärmt wird und der lineare Ausdehnungskoeffizient $= \frac{1}{n}$ ist?

Erkl. 62. Ein Würfel ist ein gerades rechteckiges Prisma, dessen Kanten sämmtlich gleich lang sind.

Auflösung.

Ist allgemein l die Länge, b die Breite und h die Höhe eines geraden rechteckigen Prismas (siehe Erkl. 62) bei 0^0 Celsius und bezeichnet man mit l_1 die Länge, mit b_1 die Breite und mit h_1 die Höhe dieses Körpers nach der Erwärmung bis auf t^0, so erhält man für diese **lineare Ausdehnungen** nach der in der Erkl. 60 entwickelten Gleichung 1).:

a). . . . $l_1 = l . \left(1 + \frac{1}{n} t\right)$

b). . . . $b_1 = b . \left(1 + \frac{1}{n} t\right)$

c). . . . $h_1 = h . \left(1 + \frac{1}{n} t\right)$

Durch Multiplikation der Gleichungen a), b). und c). erhält man:

d). . . . $l_1 . b_1 . h_1 = l . b . h . \left(1 + \frac{1}{n} t\right)^3$

Erkl. 63. Das Volumen V eines rechteckigen Prismas ist gleich der Anzahl Kubikeinheiten, welche man erhält, wenn man die Länge l mit der Breite b und mit der Höhe h dieses Körpers multipliziert, in Zeichen:

$$V = b . l . h \text{ Kubikeinheiten.}$$

Bezeichnet man die Grösse, d. i. der Kubikinhalt des gedachten geraden rechteckigen Prismas, bezw. des Würfels (siehe Erkl. 62) vor der Erwärmung mit V und nach der Erwärmung mit V_1, so erhält man nach der Erkl. 63 aus Gleichung d).:

$$V_1 = V . \left(1 + \frac{1}{n} t\right)^3 \text{ oder:}$$

$$V_1 = V . \left(1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{n} t + 3 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{n} t\right)^2 + \left(\frac{1}{n} t\right)^3\right)$$

$$V_1 = V . \left(1 + \frac{3t}{n} + \frac{3t^2}{n^2} + \frac{t^3}{n^3}\right)$$

Vernachlässigt man die Summanden:

$3t^2 \cdot \frac{1}{n^2}$ und $t^3 \cdot \frac{1}{n^3}$, da n eine sehr kleine, mithin $\frac{1}{n^2}$ und $\frac{1}{n^3}$ noch viel kleinere Grössen sind, so erhält man:

$$V_1 \text{ ist sehr nahe } = V . \left(1 + \frac{3t}{n}\right)$$

2). Ueber den unbestimmten Ausdruck: $\frac{0}{0}$

Lehrsatz 26. Der Ausdruck: $\frac{0}{0}$ ist **unbestimmt** und hat nur dann einen **bestimmten** Wert, wenn man weiss, wie die in diesem Ausdruck vorkommenden Nulle entstanden sind.

Vorauss.

1). Gegeben sei der Ausdruck: $\frac{0}{0}$

2). Gegeben sei der Ausdruck: $\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 10x + 21}$ in welchem $x = 3$ gesetzt werden soll, wodurch dieser Ausdruck in: $\frac{0}{0}$ übergeht.

Behaupt.

1). $\frac{0}{0}$ ist unbestimmt.

2). $\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 10x + 21}$ ist für $x = 3$ gleich dem **unbestimmten** Ausdruck $\frac{0}{0}$ und hat doch einen ganz bestimmten Wert.

Beweis.

1). Der Ausdruck: $\frac{0}{0}$ stellt eine Division dar und heisst: Null soll durch Null dividiert werden.

Eine Zahl durch eine andere Zahl dividieren aber heisst:

Erkl. 64. Null mit jeder Zahl multipliziert ist = Null, in Zeichen:

$$a \cdot 0 = 0$$

wenn a irgend eine Zahl bedeutet.

Beweis. Setzt man $0 = m - m$, nämlich gleich der Differenz zweier beliebigen Grössen, so erhält man:

$$a \cdot 0 = a \cdot (m - m) \text{ oder:}$$

$$a \cdot 0 = am - am$$

und hieraus ergibt sich:

$$a \cdot 0 = 0$$

Erkl. 65. Eine Zahl a durch eine andere Zahl b dividieren, heisst: eine dritte Zahl c zu finden, die mit b multipliziert a wieder gibt.

Darnach ist:

$$\frac{0}{0} = \text{einer } \textbf{unbestimmten} \text{ Zahl } x$$

denn 0 mit jeder Zahl multipliziert gibt Null (siehe Erkl. 64).

Ebenso ist:

$$\frac{0}{a} = 0$$

denn $a \cdot 0$ ist $= 0$.

man soll eine neue Zahl x suchen, welche mit der letzteren Zahl multipliziert die erstere Zahl wieder gibt.

Hiernach ist: $\frac{0}{0} = x$

wobei man sich unter x **jede Zahl** denken kann, denn nach der gegebenen Definition des Dividierens muss:

$$0 \cdot x = 0 \text{ sein}$$

was für jede Zahl, welche man für x gesetzt denkt, stimmt (siehe Erkl. 64 u. 65).

2). Setzt man in dem gegeb. Ausdruck: $\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 10x + 21}$ für $x = 3$, so erhält man:

$$\frac{9 - 24 + 15}{9 - 30 + 21} = \frac{-15 + 15}{-21 + 21} = \frac{0}{0}$$

was nach der Behaupt. 1 ein **unbestimmter** Ausdruck ist.

Vereinfacht man aber den gegebenen Ausdruck: $\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 10x + 21}$ zuerst, indem man Zähler und Nenner in Faktoren zerlegt und hebt, wonach man erhält:

$$\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 10x + 21} = \frac{(x-3) \cdot (x-5)}{(x-3) \cdot (x-7)} = \frac{x-5}{x-7}$$

und setzt dann $x = 3$, so erhält man:

$$\frac{3-5}{3-7} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Hiernach ist:

$\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 10x + 21}$ wenn $x = 3$ gesetzt wird

$= \text{dem unbestimmten Wert: } \frac{0}{0}$

aber auch

$= \text{dem ganz bestimmten Wert: } \frac{1}{2}$

Hier weiss man, dass: $\frac{0}{0}$ entstanden war, indem in dem Ausdruck: $\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 10x + 21}$ für $x = 3$ gesetzt wurde, und konnte somit für diesen unbestimmten Wert: $\frac{0}{0}$ ein ganz bestimmter Wert aufgefunden werden.

Aufgabe 51. Man soll die für nachstehende Uebungsbeispiele sich ergebenden Werte: $\frac{0}{0}$ bestimmen.

Uebungsbeispiele: | **Resultate:** | **Andeutungen:**

1). Wie gross ist:

$\frac{a^2-b^2}{a-b}$ wenn $b=a$ gesetzt wird.

$\frac{a^2-b^2}{a-b}$ ist, wenn $b=a$ gesetzt wird $=\frac{0}{0}=2a$

. . . . Setzt man $b=a$, so erhält man:

1). $\frac{a^2-a^2}{a-a}=\frac{0}{0}$ (unbestimmt)

Vereinfacht man aber zuerst den gegebenen Ausdruck, wie folgt:

2). $\frac{a^2-b^2}{a-b}=\frac{(a+b).(a-b)}{a-b}=a+b$

und setzt in dem vereinfachten Ausdruck $b=a$, so erhält man aus 1). und 2).:

$$\frac{a^2-a^2}{a-a}=\frac{0}{0}=a+a=2a$$

Man siehe vorstehenden Lehrsatz 26.

2). Wie gross ist:

$\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$ wenn $b=a$ gesetzt wird.

$\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$ ist, wenn $b=a$ gesetzt wird $=\frac{0}{0}=\frac{0}{2a}=0$

. . . . Setzt man $b=a$, so erhält man:

1). $\frac{a^2-2a^2+a^2}{a^2-a^2}=\frac{2a^2-2a^2}{a^2-a^2}=\frac{0}{0}$ (unbestimmt)

Vereinfacht man aber zuerst den gegebenen Ausdruck, wie folgt:

2). $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)^2}{(a+b).(a-b)}=\frac{a-b}{a+b}$

und setzt dann $b=a$, so erhält man aus 1). und 2).:

$$\frac{a^2-2a^2+a^2}{a^2-a^2}=\frac{0}{0}=\frac{a-a}{a+a}=\frac{0}{2a}=0$$

denn 0 durch jede Zahl dividiert gibt 0.

3). Ebenso, von:

$\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$, wenn $x=a$ gesetzt wird . . ? . . In Betreff der Vereinfachung der gegebenen Ausdrücke vergleiche man den Abschnitt, welcher über Faktorenzerlegung, bezw. den Abschnitt, welcher über die Reduktion mittelst dem Heben von Brüchen handelt.

4). Ebenso, von:

$\frac{a^2-a-2}{a^2-4}$, wenn $a=2$ gesetzt wird . . ?

5). Ebenso, von:

$\frac{x^2-5xy+4y^2}{x^2+xy-2y^2}$, wenn $x=y$ ges. wird . . ?

6). Ebenso, von:

$\frac{4-x^2}{2-x}$, wenn $x=2$ gesetzt wird . . . ?

7). Ebenso, von:

$\frac{16-a^4}{2-a}$, wenn $a=2$ gesetzt wird . . . ?

8). Ebenso, von:

$\frac{x^4-5x^2y^2+4y^4}{x^4-3x^2y^2-4y^4}$, wenn $x=2y$ ges. wird ?

9). Ebenso, von:

$\frac{x^3-15x^2+74x-120}{x^3-12x^2+41x-30}$, wenn $x=5$ ges. w. ?

10). Ebenso, von:

$\frac{x^3-15x^2+74x-120}{x^3-12x^2+41x-30}$, wenn $x=6$ ges. w. ?

3). Ueber das Zeichen: ∞ und über die unbestimmten Ausdrücke: $\infty - \infty$, $0 . \infty$, $\infty : \infty$

Erkl. 66. Eine Zahl, deren absoluter Wert grösser ist als jede denkbare (angebbare) Zahl der natürlichen Zahlenreihe (siehe Erkl. 67) ist **unendlich gross** und wird dargestellt durch das Zeichen: ∞

Ist jene Zahl positiv, so bezeichnet man deren Wert durch: $+\infty$, ist sie dagegen negativ, so bezeichnet man deren Wert durch das Zeichen: $-\infty$

Erkl. 67. Die natürliche Zahlenreihe wird nach vorstehender Erkl. 67, dargestellt durch:

$$-\infty, \ldots\ldots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3 + \ldots\ldots + \infty$$

Erkl. 68. Für eine **unendlich grosse** Zahl, bezw. für das Zeichen: ∞ kann man auch den Quotienten: $\frac{1}{0}$ setzen;

denn hat man einen **echten** Bruch, z. B. $\frac{1}{a}$ und man lässt den Nenner stetig kleiner und kleiner werden, so wird der Wert des Bruches stetig grösser und grösser, wird jener Nenner unendlich klein, nämlich = Null, so wird der Wert des gedachten Bruches **unendlich gross** und man hat:

a). $\frac{1}{0} = \infty$

und auch:

b). $-\frac{1}{0} = -\infty$

Erkl. 69. Hat man einen Bruch, z. B. $\frac{1}{a}$ und man lässt den Nenner stetig grösser und grösser werden, so wird der Wert des Bruches stetig kleiner und kleiner, wird endlich jener Nenner unendlich gross, nämlich $= \infty$, so wird der Wert des Bruches unendlich klein, nämlich = Null, in Zeichen:

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

Dies ergibt sich auch aus der in der Erkl. 68 aufgestellten Relation:

$$\frac{1}{0} = \infty$$

wenn man den Divisor 0 und den Quotient ∞ vertauscht.

Erkl. 70. Die Ausdrücke:

1). $\infty - \infty$
2). $0 \cdot \infty$
3). $\infty : \infty$

lassen sich stets auf die Form $\frac{0}{0}$ bringen, haben somit nach dem Lehrsatze 26 **ganz unbestimmte** Werte.

Beweis.

1). $\infty - \infty = \frac{1}{0} - \frac{1}{0}$ (siehe Erkl. 68, Gleich. a).)

$= \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ (unbestimmt, siehe Lehrs. 26)

2). $0 . \infty = 0 \cdot \frac{1}{0}$ (siehe Erkl. 68)

$= \frac{0}{0}$ (unbestimmt, s. Lehrs. 26)

3). $\infty : \infty = \frac{1}{0} : \frac{1}{0}$ (siehe Erkl. 68)

$= \frac{1}{0} \cdot \frac{0}{1} = \frac{0}{0}$ (unbestimmt, siehe Lehrs. 26).

Aufgabe 52. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen sich ergebenden Werte bestimmen.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). Der Wert von: $\frac{a^{x-y}}{(x-y)^a}$ soll für $x = y$ bestimmt werden.	$\frac{a^{x-y}}{(x-y)^a}$ nimmt für $x = y$ den Wert: ∞ an.	Setzt man in dem gegeb. Ausdruck $x = y$ so geht derselbe über, in: $\frac{a^{y-y}}{(y-y)^a} = \frac{a^0}{0^a} = \frac{1}{0} = \infty$ (siehe Erkl. 68)
2). Der Wert von: $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ soll bestimmt werden, wenn $n = \infty$ und $\frac{a}{b}$ ein echter Bruch ist.	$\left(\frac{a}{b}\right)^n$ nimmt für den gedachten Fall den Wert: ∞ an.	Man siehe die analoge Entwicklung für $\left(\frac{1}{a}\right)^\infty$ in der Erkl. 66.
3). Den Wert von: $(2a-b)^{-x}$ für $a = 3$ und $b = 6$ zu bestimmen.	?	Man beachte, dass z. B.: $0^{-a} = \frac{1}{0^a} = \frac{1}{0} = \infty$ ist.
4). Den Wert von: $\frac{1}{(5a-3b)^{2b}}$ für $a = 3$ und $b = 5$ zu bestimmen.	?	
5). Den Wert von: $\frac{a^2 - ab - 2b^2}{a^2 - 4ab + 4b^2}$ für $a = 2b$ zu bestimmen.	?	Man siehe die Aufg. 51, Seite 158.

4). Ueber besondere Fälle der Potenzierung.

Lehrsatz 27. Ist a eine von Null und Eins verschiedene **endliche** positive Zahl und bedeutet das Zeichen: ∞ eine **unendlich grosse** Zahl, so bestehen folgende Relationen:

1). $a^{+\infty} = +\infty$

2). $a^{-\infty} = 0$

3). $(-a)^{+\infty} = \pm\infty$

4). $(-a)^{-\infty} = 0$

5). $1^{\infty} = \frac{0}{0}$, nämlich **unbestimmt**,

6). $(-1)^{\infty} = \frac{0}{0}$, " "

7). $0^{0} = \frac{0}{0}$, " "

8). $0^{-a} = +\infty$

9). $0^{+\infty} = 0$

10). $0^{-\infty} = +\infty$

11). $(+\infty)^{a} = +\infty$

12). $(+\infty)^{0} = \frac{0}{0}$, nämlich **unbestimmt**,

13). $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$

14). $(+\infty)^{-a} = 0$

15). $(+\infty)^{-\infty} = 0$

16). $(-\infty)^{+a} = \pm\infty$

17). $(-\infty)^{0} = \frac{0}{0}$, nämlich **unbestimmt**.

18). $(-\infty)^{+\infty} = \pm\infty$

19). $(-\infty)^{-a} = 0$

20). $(-\infty)^{-\infty} = 0$

Beweis.

1). Nach dem Lehrsatz 24, Seite 152, nimmt eine Zahl a, welche grösser als 1 ist, mit wachsendem Exponenten immer zu, wird dieser Exponent **unendlich gross**, so wird auch der Wert der betr. Potenz **unendlich gross**, in Zeichen:

$a^{+\infty} = +\infty$ (vergl. nebenstehende Gleich. 1).

2). $a^{-\infty} = \frac{1}{a^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$ (s. Erkl. 69 u. Beweis.)

3). Da eine **unendlich grosse** Zahl sowohl eine gerade, als auch eine ungerade Zahl sein kann, so ist nach dem Lehrsatz 3, Seite 8, und nach dem Beweise 1).:

$(-a)^{+\infty} = +\infty$ und auch $= -\infty$

4). $(-a)^{-\infty} = \frac{1}{(-a)^{+\infty}} = \frac{1}{\pm\infty}$ (nach dem Beweise 3)

mithin ist nach der Erkl. 69:

$(-a)^{-\infty} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$

5). $1^{\infty} = (a^{0})^{\infty} = a^{0\cdot\infty}$

Da nach der Erkl. 70:

$0\cdot\infty = \frac{0}{0}$ ist, so erhält man:

$1^{\infty} = a^{0\cdot\infty} = a^{\frac{0}{0}}$, da ferner a als auch $\frac{0}{0}$ (siehe Lehrsatz 26) jede beliebige Zahl sein kann, so ist:

1^{∞} **unbestimmt**, nämlich $= \frac{0}{0}$

6). $(-1)^{\infty}$ ist **unbestimmt**, weil ∞ sowohl eine gerade als auch ungerade Zahl, mithin nach Lehrsatz 3:

$(-1)^{\infty} = -1^{\infty}$ und auch $= +1^{\infty}$

sein kann, folglich nach dem Beweise unter 5). **unbestimmt** ist.

7). $0^{0} = 0^{m-m} = \frac{0^{m}}{0^{m}} = \frac{0}{0}$, mithin nach Lehrsatz 26 **unbestimmt**.

8). $0^{-a} = \frac{1}{0^a} = \frac{1}{0} = \infty$ (siehe Erkl. 68).

9). $0^{+\infty} = 0$, denn 0 darf noch so oft mit sich selbst multipliziert werden, das Resultat wird stets = Null.

10). $0^{-\infty} = \frac{1}{0^\infty} = \frac{1}{0}$ (nach dem Beweise unter 9)

mithin ist:

$0^{-\infty} = \frac{1}{0} = \infty$ (siehe Erkl. 68)

11). $(+\infty)^a = \left(\frac{1}{0}\right)^a = \frac{1^a}{0^a} = \frac{1}{0} = \infty$ (s. Erkl. 68)

12). $(+\infty)^0 = \infty^{m-m} = \frac{\infty^m}{\infty^m} = \frac{\infty}{\infty}$ (nach dem Beweis 11)

mithin ist nach der Erkl. 70:

$(+\infty)^0 = \frac{\infty}{\infty} = \frac{0}{0}$, nämlich **unbestimmt**, (siehe Lehrsatz 26)

13). $(+\infty)^{+\infty} = \left(\frac{1}{0}\right)^\infty$ (siehe Erkl. 68)

$= \frac{1^\infty}{0^\infty} = \frac{1}{0}$ (siehe die Beweise unter 5). u. 9).)

mithin ist:

$(+\infty)^{+\infty} = \frac{1}{0} = +\infty$

14). $(+\infty)^{-a} = \frac{1}{(+\infty)^a} = \frac{1}{\infty}$ (nach dem Beweise unter 11)

mithin ist:

$(+\infty)^{-a} = \frac{1}{\infty} = 0$ (siehe Erkl. 69)

15). $(+\infty)^{-\infty} = \frac{1}{(+\infty)^{+\infty}} = \frac{1}{\infty}$ (nach d. Bew. unter 13)

mithin ist nach der Erkl. 69:

$(+\infty)^{-\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$

16). $(-\infty)^{+a} = +\infty^a$ oder $= -\infty^a$, je nachdem a eine gerade oder ungerade Zahl ist (siehe Lehrs. 3), mithin ist nach dem Beweise unter 11:

$(-\infty)^a = +\infty$ oder $= -\infty$

17). $(-\infty)^0 = (-\infty)^{m-m} = \frac{(-\infty)^m}{(-\infty)^m}$

$= \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (nach dem Beweise unter 16)

mithin ist nach der Erkl. 70:

$(-\infty)^0 = \frac{\pm\infty}{\pm\infty} = \frac{0}{0}$, nämlich unbestimmt.

18). Da man $+\infty$ sowohl als eine gerade, als auch als eine ungerade Zahl betrachten kann, so ist:

$(-\infty)^{+\infty} = +\infty^{\infty}$ und auch $= -\infty^{\infty}$

mithin ist nach dem Beweise unter 13).:

$(-\infty)^{+\infty} = \pm\infty$

19). $(-\infty)^{-a} = \frac{1}{(-\infty)^{+a}}$

mithin ist nach dem Beweise unter 16).:

$(-\infty)^{-a} = \frac{1}{(-\infty)^{+a}} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$

(siehe Erkl. 69).

20). $(-\infty)^{-\infty} = \frac{1}{(-\infty)^{+\infty}} = \frac{1}{\pm\infty}$ (nach dem Beweise unter 18).

mithin ist nach der Erkl. 69:

$(-\infty)^{-\infty} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$

5). Verwandlung von Quotienten in unendliche Reihen.

Erkl. 71. In den auf Seite 35 angeführten Beispielen 56 bis 94 gingen die in denselben angedeuteten Divisionen **ohne Rest** auf. Hat man nun solche Divisionen auszuführen, welche **nicht ohne Rest** aufgehen, so erhält man zum Quotienten eine **unendliche Reihe** (siehe das Beispiel 3, Seite 28).

Bricht man die bei einer solchen Division im Quotienten erhaltene unendliche Reihe an irgend einer Stelle ab und addiert den an dieser Stelle der Division erhaltenen Rest, so erhält man den wahren Wert der Reihe.

Aufgabe 53. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen Ausdrücke in **unendliche Reihen** verwandeln.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $\frac{1}{1-x} = \ldots$	$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\ldots$ u. s. f.	Da man den Zähler des gegebenen Bruches auch als eine **zusammengesetzte** Grösse, nämlich als: $1+0$ betrachten kann, so erhält man nach der Erkl. 37, Seite 27:

Bricht man diese Reihe z. B. bei x^3 ab, so erhält man:

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\frac{x^4}{1-x}$$

(siehe nebenstehende Division)

$$\begin{array}{l|l}
\overbrace{1+0}^{\text{Dividend}} & \overbrace{1-x}^{\text{Divisor}} \\
1-x & \underbrace{1+x+x^2+x^3+\cdots}_{\text{Quotient}} \\
-\;\;+ & \\
\hline
x & \\
x-x^2 & \\
-\;\;+ & \\
\hline
x^2 & \\
x^2-x^3 & \\
-\;\;+ & \\
\hline
x^3 & \\
x^3-x^4 & \\
-\;\;+ & \\
\hline
x^4 \ldots \text{Rest, u. s. f.} &
\end{array}$$

Das Bildungsgesetz des Quotienten lässt sich hieraus schon erkennen.

2). $\frac{1}{1+x} = \ldots$	$1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-\ldots$ u. s. f.	Durch Division erhält man:

Bricht man diese Reihe z. B. bei x^2 ab, so erhält man:

$$\frac{1}{1-x} = 1-x+x^2-\frac{x^3}{1-x}$$

(siehe nebenstehende Division)

$$\begin{array}{l|l}
\overbrace{1+0}^{\text{Dividend}} & \overbrace{1+x}^{\text{Divisor}} \\
1+x & \underbrace{1-x+x^2-x^3+\cdots}_{\text{Quotient}} \\
-\;\;- & \\
\hline
-x & \\
-x-x^2 & \\
+\;\;+ & \\
\hline
x^2 & \\
x^2+x^3 & \\
-\;\;- & \\
\hline
-x^3 & \\
-x^3-x^4 & \\
+\;\;+ & \\
\hline
x^4 \ldots \text{Rest, u. s. f.} &
\end{array}$$

Das Bildungsgesetz des Quotienten lässt sich hieraus schon erkennen.

3). $\frac{m}{a-x} = \ldots$	$\frac{m}{a}+\frac{mx}{a^2}+\frac{mx^2}{a^3}+\frac{mx^3}{a^4}+\frac{mx^4}{a^5}+\cdots$ u. s. f.	Durch Division erhält man:

Bricht man diese Reihe, z. B. bei $\frac{mx^2}{a^3}$ ab, so erhält man:

$$\frac{m}{a-x} = \frac{m}{a}+\frac{mx}{a^2}+\frac{mx^2}{a^3}+\frac{\frac{mx^3}{a^3}}{a-x}$$

(siehe nebenstehende Division)

$$\begin{array}{l|l}
\overbrace{m+0}^{\text{Dividend}} & \overbrace{a-x}^{\text{Divisor}} \\
m-\frac{mx}{a} & \underbrace{\frac{m}{a}+\frac{mx}{a^2}+\frac{mx^2}{a^3}+\cdots}_{\text{Quotient}} \\
-\;\;+ & \\
\hline
\frac{mx}{a} & \\
\frac{mx}{a}-\frac{mx^2}{a^2} & \\
-\;\;+ & \\
\hline
\frac{mx^2}{a^2} & \\
\frac{mx^2}{a^3}-\frac{mx^3}{a^3} & \\
-\;\;+ & \\
\hline
\frac{mx^3}{a^3} \ldots \text{Rest, u. s. f.} &
\end{array}$$

Das Bildungsgesetz des Quotienten lässt sich hieraus schon erkennen.

Uebungsbeispiele:	**Resultate:**	**Andeutungen:**

4). $\frac{m}{a+x} = \ldots\ldots \frac{m}{a} - \frac{mx}{a^2} + \frac{mx^2}{a^3} - \frac{mx^3}{a^4} + \frac{mx^4}{a^5} - \ldots$ u. s. f.

Bricht man diese Reihe, z. B. bei $\frac{mx^2}{a^3}$ ab, so erhält man,

$$\frac{m}{a+x} = \frac{m}{a} - \frac{mx}{a^2} + \frac{mx^2}{a^2} - \frac{\frac{mx^3}{a^3}}{a+x}$$

(siehe nebenstehende Division)

Durch Division erhält man:

Dividend: $m + 0$; Divisor: $a + x$; Quotient: $\frac{m}{a} - \frac{mx}{a^2} + \frac{mx^2}{a^3} - \ldots$

$$\begin{array}{l} m + 0 \\ m + \frac{mx}{a} \\ - \quad - \\ \hline -\frac{mx}{a} \\ -\frac{mx}{a} - \frac{mx^2}{a^2} \\ + \quad + \\ \hline \frac{mx^2}{a^2} \\ \frac{mx^2}{a^2} + \frac{mx^3}{a^3} \\ - \quad - \\ \hline -\frac{mx^3}{a^3} \ldots \text{ Rest, u. s. f.} \end{array}$$

Das Bildungsgesetz des Quotienten lässt sich hier schon erkennen.

5). $\frac{ax+1}{bx+1} = \ldots 1 + (a-b)x - (a-b)bx^2 + (a-b)b^2x^3 - \ldots$

Durch Division erhält man:

Dividend: $1 + ax$; Divisor: $1 + bx$; Quotient: $1 + (a-b)x - (a-b)bx^2 + \ldots$

$$\begin{array}{l} 1 + ax \\ 1 + bx \\ - \quad - \\ \hline (a-b)x \\ (a-b)x + (a-b)bx^2 \\ - \qquad - \\ \hline -(a-b)bx^2 \ldots \text{ u. s. f.} \end{array}$$

6). $\frac{a}{1+a} = \ldots\ldots\ldots\ldots ?$

7). $\frac{1+x}{1-x} = \ldots\ldots\ldots\ldots ?$

8). $\frac{a^2}{1-a} = \ldots\ldots\ldots\ldots ?$

9). $\frac{1}{a+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots ?$

10). $\frac{c}{a+b} = \ldots\ldots\ldots\ldots ?$

11). $\frac{5}{2+3x} = \ldots\ldots\ldots\ldots ?$

12). $\frac{1}{1-x+x^2} = \ldots\ldots\ldots ?$

13). $\frac{1}{1-2x+x^2} = \ldots\ldots\ldots ?$

14). $\frac{1}{x^2+2xy+y^2} = \ldots\ldots\ldots ?$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
15). $\frac{a}{b+cx} =$	 ?	
16). $\frac{1}{3-2x} =$	 ?	
17). $\frac{x}{(1-x)^2} =$	 ?	man entwickle zuerst den Nenner.
18). $\frac{x+x^2}{(1-x)^3} =$	 ?	
19). $\frac{x(1+x)^2}{(1-x)(1+x^2)} =$	 ?	
20). $\frac{a}{cx-b} =$	 ?	
21). $\frac{6}{3x+2} =$	 ?	
22). $\frac{x+a}{x+b} =$	 ?	
23). $\frac{5-2x-x^2}{1-x^3} =$	 ?	
24). $\frac{ax-b}{1+x+x^2} =$	 ?	
25). $\frac{x}{(x-1)^3} =$	 ?	
26). $\frac{x-3x^2}{5+2x-7x^2} =$	 ?	
27). $\frac{2+x}{(1+x+x^2)^2} =$	 ?	
28). $\frac{3x+2}{x^4+x^2-2x} =$	 ?	
29). $\frac{a^x-b^y}{a^x+b^y} + \frac{a^x+b^y}{a^x-b^y} =$	 ?	man addiere zuerst die gegebenen Brüche, dann reduziere man und suche die fragliche Reihe.
30). $\frac{x^n+y^n}{x^m-y^m} - \frac{x^n-y^n}{x^m+y^m} =$	 ?	

Aufgabe 54. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Divisionen von Zahlenwerten ausführen und zwar nach den Uebungsbeispielen 3 und 4 in Aufgabe 53.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $\frac{7853219}{99} = \frac{7853219}{100-1} = \frac{7853219}{100} + \frac{7853219.1}{100^2} + \frac{7853219.1^2}{100^3} + \frac{7853219.1^3}{100^4} + \ldots$

$= 78532{,}19 + 785{,}3219 + 7{,}853219 + 0{,}07853219 +$
$0{,}0007853219 \ldots$

$= 79325{,}4444366 \ldots$

Man benutze die Entwicklung für das Beispiel 3, Seite 165, indem man hierin:
$m = 7853219$
$a = 100$ und
$x = 1$ setzt.

2). $\frac{67947}{102} = \frac{67947}{100+2} = \frac{67947}{100} - \frac{67947.2}{100^2} + \frac{67947.2^2}{100^3} - \frac{67947.2^3}{100^4} + \ldots$

$= 679{,}47 - 13{,}5894 + 0{,}271788 - 0{,}00543576 + \ldots$

$= 693{,}33662 \ldots$

Man benutze die Entwicklung für das Beispiel 4, Seite 166, indem man hierin:
$m = 67947$
$a = 100$ und
$x = 2$ setzt.

3). $\frac{684321}{99} = \ldots\ldots ?$

4). $\frac{684321}{999} = \ldots\ldots ?$

5). $\frac{684321}{95} = \ldots\ldots ?$

6). $\frac{684321}{98\frac{1}{2}} = \ldots\ldots ?$

7). $\frac{684321}{104} = \ldots\ldots ?$

8). $\frac{684321}{105} = \ldots\ldots ?$

9). $\frac{684321}{103\frac{1}{4}} = \ldots\ldots ?$

6). Berechnung der Summen gewisser unendlicher Reihen.

Erkl. 72. Aus den Uebungsbeispielen in der Aufgabe 53 ersieht man, dass alle Brüche in **unendliche Reihen** verwandelt werden können, was oft von grossem Nutzen ist und woraus sich die wichtigsten Folgerungen ableiten lassen. (Man vergl. hierüber das Kapitel: Die Reihen.) — Ferner ersieht man aus diesen Beispielen, dass eine unendliche Reihe doch einen **ganz bestimmten Wert** haben kann.

Erkl. 73. Nähern sich die Summen, welche man aus je einer gewissen Anzahl der Glieder einer Reihe bilden kann, um so mehr dem wahren Werte der Reihe, je mehr Glieder der Reihe man summiert, so sagt man eine solche Reihe ist **konvergent**, im Gegensatz zu

solchen Reihen, bei welchen dies nicht der Fall ist und **divergent** heissen.

Die in dem Beispiel 1, Seite 165, gegebene Reihe ist hiernach:

für $x < 1$ **konvergent,**

„ $x > 1$ aber **divergent.**

Aufgabe 55. Man soll die Summen s der in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen **unendlichen Reihen** für die dabei stehenden Werte für x berechnen.

Uebungsbeispiele:	**Resultate:**	**Andeutungen:**
1). $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots$ Zu berechnen: a). für $x = 0{,}1$ b). „ $x = 0{,}2$ c). „ $x = 0{,}3$	a). für $x = 0{,}1$ erhält man **annähernd:** $s = 1{,}1111\ldots.$ oder den **ganz bestimmten** Wert: $s = \frac{10}{9}$	Setzt man in der gegeb. Reihe $x = 0{,}1$, so geht dieselbe über, in: $1 + 0{,}1 + 0{,}1^2 + 0{,}1^3 + 0{,}1^4 + \ldots$ mithin ist die Summe s annähernd: $s = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + \ldots$ oder: $s = 1{,}1111\ldots.$ Da man aber auch weiss, dass die gegebene Reihe durch die in: $\frac{1}{1-x}$ angedeutete Division entstanden ist, (siehe das Beispiel 1, Seite 165), so kann man auch: $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots. = \frac{1}{1-x}$ mithin auch: $1 + 0{,}1 + 0{,}1^2 + 0{,}1^3 + \ldots. = \frac{1}{1-0{,}1}$ setzen und hieraus erhält man für die gesuchte Summe s den wahren Wert: $s = 1 + 0{,}1 + 0{,}1^2 + 0{,}1^3 \ldots = \frac{10}{9}$
	b). . . . ? c). . . . ?	 ist analog wie für a). zu finden.
2). $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\cdots$ Zu berechnen: a). für $x = 0{,}1$ b). „ $x = 0{,}2$ c). „ $x = 0{,}3$	a). . . . ? b). . . . ? c). . . . ?	 Die annähernde Berechnung von s geschieht, wie vorhin. Bei Berechnung des bestimmten Wertes für s benutze man die Entwicklung des Beispiels 2, Seite 165.
3). $x + 2x + 3x^3 + 4x^4 + \cdots\cdots$ Zu berechnen: a). für $x = \frac{1}{3}$ b). „ $x = \frac{1}{2}$	a). . . . ? b). . . . ?	 Die annähernde Berechnung von s geschieht wie in dem Beispiel 1. Bei der Berechnung des bestimmten Wertes für s benutze man die Entwicklung, welche sich aus Beispiel 17, Seite 167, ergibt.

7). Verwandlung unendlicher Reihen in unendliche Produkte.

Erkl. 74. Aehnlich wie man das Bildungsgesetz der bei den Divisionen in den Beispielen der Aufgabe 53 entstandenen unendlichen Reihen sofort erkennen und diese Reihen ohne die Division weiter auszuführen bis auf eine beliebige Anzahl von Gliedern hinschreiben konnte, kann man dies auch bei der Verwandlung gewisser unendlicher Reihen in unendliche Produkte. — Man siehe nachstehende Uebungsbeispiele.

Aufgabe 56. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angeführten unendlichen Reihen in unendliche Produkte verwandeln.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots = (1+x)+x^2(1+x)+x^4(1+x)+x^6(1+x)+\ldots$ aus je 2 Gliedern wurde der Faktor $(1+x)$ ausgeschieden.

$= (1+x).[1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+\ldots]$

$= (1+x).[(1+x^2)+x^4(1+x^2)+x^8(1+x^2)+\ldots]$ aus je 2 Gliedern in der zweiten Klammer wurde der Faktor $(1+x^2)$ ausgeschieden.

$= (1+x).(1+x^2).[1+x^4+x^8+x^{12}+x^{16}+x^{20}+\ldots]$

$= (1+x).(1+x^2).[(1+x^4)+x^8(1+x^4)+x^{16}(1+x^4)+\ldots]$ aus je 2 Gliedern in der dritten Klammer wurde der Faktor $(1+x^4)$ ausgeschieden.

$= (1+x).(1+x^2).(1+x^4).[1+x^8+x^{16}+x^{24}+\ldots]$

Hier lässt sich schon das Bildungsgesetz der Faktoren des gesuchten unendlichen Produktes erkennen und man erhält:

$= (1+x).(1+x^2).(1+x^4).(1+x^8).(1+x^{16}).(\ldots\ldots$

2). $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a^6-a^7+\ldots\ldots ?$ man scheide zuerst aus je 2 aufeinanderfolgenden Gliedern den Faktor $(1-a)$ aus, u. s. f., wie vorhin.

3). $1+\frac{2}{3}a+\frac{4}{9}a^2+\frac{8}{27}a^3+\frac{16}{81}a^4+\frac{32}{243}a^5+\ldots ?$ ist analog dem Beispiel 1.

4). $1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{32}x^5+\ldots\ldots ?$ ist analog dem Beispiel 2

Schluss des Kapitels: Die Potenzen.

Zweiter Teil.

Die Wurzeln.

I. Die Wurzeln.

A. Ueber die Wurzeln im allgemeinen.

Frage 1. Was versteht man in der Arithmetik unter einer **Wurzel**?

Antwort. In der Arithmetik versteht man unter einer **Wurzel** eine zu bestimmende Zahl (Grösse) x, welche in eine bestimmte Potenz c erhoben einen bestimmten Wert b ergibt, in Zeichen:

$$x^c = b$$

Eine **Wurzel** ist somit die Basis einer Potenz, deren Exponent und deren wahrer Wert bestimmte Zahlen (Ausdrücke) sind.

Man vergl. hiermit die Antw. der Frage 3, Seite 2, und siehe die Erkl. 1.

Erkl. 1. Das Wort „Wurzel" kommt auch bei den Gleichungen vor (siehe dieselben), wobei man aber die Werte der Unbekannten versteht, welche der Gleichung genügen.

Die Bedeutung des Wortes „Wurzel" in der Botanik ist jedermann geläufig und ist allerdings in diesem Kapitel ausgeschlossen.

Frage 2. Worin besteht die **übliche Schreibweise**, bezw. die **symbolische Darstellung** einer Wurzel?

Antwort. Die übliche **Schreibweise**, bezw. die **symbolische Darstellung** einer Wurzel besteht darin, dass man den Wert b der gedachten Potenz unter das Zeichen: $\sqrt{}$ und in die obere Oeffnung dieses Zeichens den Exponenten c der gedachten Potenz setzt.— Man schreibt demnach, wenn die Grösse x so bestimmt werden soll, dass sie in die c^{te} Potenz erhoben den Wert b ergibt, nicht:

$$x^c = b, \text{ sondern:}$$

$$x = \sqrt[c]{b}$$

Die **symbolische Darstellung** einer Wurzel x geschieht demnach, durch:

$$\sqrt[c]{b}$$

Man siehe die Erkl. 2 und 3 und die Antwort der Frage 10.

Erkl. 2. Die Schreibweisen einer Wurzel waren bis Anfang des 16. Jahrhunderts sehr verschieden. Die jetzt übliche Schreibweise mittelst des Zeichens: $\sqrt{}$ wurde zuerst von *Christoph Rudolph* im 16. Jahrh. eingeführt.

Erkl. 3. Soll in dem Ausdruck:

$$x = \sqrt[c]{b}$$

für die Grösse b ein Produkt oder eine Summe etc. gesetzt werden, so muss dieses Produkt, diese Summe etc. entweder in eine Klammer (Parenthese) eingeschlossen oder es muss das Zeichen: $\sqrt{}$ durch einen anzuhängenden Strich in der Weise vergrössert werden, dass es über den ganzen für b zu setzenden Ausdruck geht.

Tritt z. B. an die Stelle von b der Ausdruck: mn^2p oder der Ausdruck: $m^2 - n^2$ u. s. f., so darf man nicht schreiben:

$$x = \sqrt[c]{\vphantom{m}}mn^2p \text{ und}$$

$$x = \sqrt[c]{\vphantom{m}}m^2 - n^2, \text{ sondern man muss}$$

entweder:

$$x = \sqrt[c]{(mn^2p)} \text{ und}$$

$$x = \sqrt[c]{(m^2 - n^2)}$$

oder:

$$x = \sqrt[c]{mn^2p} \text{ und}$$

$$x = \sqrt[c]{m^2 - n^2} \text{ schreiben.}$$

Letztere Schreibweise ist, da sie einfacher ist, vorzuziehen.

Oft werden auch, um Irrthümer zu vermeiden, die beiden Schreibweisen zugleich angewandt und dementsprechend die gegebenen Beispiele in der Form:

$$x = \sqrt[c]{(mn^2p)} \text{ und}$$

$$x = \sqrt[c]{(m^2 - n^2)} \text{ geschrieben.}$$

Frage 3. Was bedeutet das Zeichen: $\sqrt{}$ und wie wird dasselbe benannt?

Antwort. Das Zeichen: $\sqrt{}$ bedeutet ein lateinisches r, nämlich den ersten Buchstaben des latein. Wortes „**radix**“, die Wurzel, und wird **Wurzelzeichen** oder **Radikalzeichen** genannt. Die letztere Bezeichnung ist weniger gebräuchlich.

Frage 4. Welche Beziehung findet zwischen den Ausdrücken:

$$x^c = b \text{ und}$$

$$x = \sqrt[c]{b} \text{ statt?}$$

Antwort. Zwischen den Ausdrücken:

$$x^c = b \text{ und}$$

$$x = \sqrt[c]{b}$$

findet die Beziehung statt, dass beide ganz dasselbe ausdrücken und dass der zweite Ausdruck nur eine andere Schreibweise des ersteren ist.

Frage 5. Was versteht man unter dem Symbol:

$$\sqrt[c]{b}\,?$$

Antwort. Unter dem Symbol: $\sqrt[c]{b}$ versteht man eine Grösse x, **Wurzel** genannt, die in die c^{te} Potenz erhoben die Grösse b ergibt.

Frage 6. Welche **besondere Namen** führen die einzelnen Glieder des Ausdrucks:

$$x = \sqrt[c]{b}\,?$$

Antwort. In dem Ausdruck:

$$x = \sqrt[c]{b}$$

Erkl. 4. Aus den angeführten Bezeichnungen und in Rücksicht der Antwort der Frage 4, dass also:

die Ausdrücke: $\left\{\begin{array}{l} 1).\ x^c = b \\ 2).\ x = \sqrt[c]{b} \end{array}\right.$

ganz dasselbe ausdrücken, ergibt sich, dass die Bezeichnungen:

Potenzexponent und Wurzelexponent,
Basis einer Potenz und Wurzel,
Potenz und Radikand

gleichbedeutend sind, erstere nur bei der Schreibweise unter 1)., letztere bei der Schreibweise unter 2). benutzt werden.

wird die Grösse x, mithin auch der ganze Ausdruck $\sqrt[c]{b}$ **Wurzel**, die Grösse c **Exponent der Wurzel** oder der **Wurzelexponent** (auch Radikator) und die Grösse b **der Radikand** (*radicandus*, auch *nummerus radicandus*) genannt. Siehe die Erkl. 4.

Frage 7. Wie wird ein Ausdruck, der mit einem Wurzelzeichen behaftet ist, bezw. unter einem Wurzelzeichen steht, genannt?

Antwort. Ein Ausdruck, der mit einem Wurzelzeichen behaftet ist, bezw. unter demselben steht, wird ein **Wurzelausdruck** genannt, z. B.:

$$\sqrt[m]{n^2},\quad \sqrt[r]{s+t},\quad a\sqrt[3]{m}\quad \text{u. s. f.}$$

sind Wurzelausdrücke.

Frage 8. Wie wird der Ausdruck:

$$x = \sqrt[c]{b}$$

im allgemeinen **gelesen** und welche Abweichungen finden in besonderen Fällen von der allgemeinen Leseweise statt?

Antwort. Der Ausdruck: $x = \sqrt[c]{b}$ wird im allgemeinen gelesen:

„x **ist die** c^{te} **Wurzel aus** b“

Abweichungen von dieser allgemeinen Leseweise finden statt, wenn für c die speziellen Zahlenwerte: 1, 2 und 3 eintreten, indem man:

1). für $x = \sqrt[1]{b}$ einfach liest: $x = b$
(siehe die Erkl. 5)

2). für $x = \sqrt[2]{b}$ liest man meistens **nicht**:
x ist die 2^{te} **Wurzel** aus b, **sondern**:
x ist die **Quadratwurzel** aus b
(siehe die Erkl. 6)

3). für $x = \sqrt[3]{b}$ liest man meistens **nicht**:
x ist die 3^{te} **Wurzel** aus b, **sondern**:
x ist die **Kubikwurzel** aus b
(siehe die Erkl. 7).

Erkl. 5. Der Wurzelexponent „1“ hat keine Bedeutung und kann einfach weggelassen werden; denn:

$$x = \sqrt[1]{b}$$

ist nach Antw. der Frage 4 mit dem Ausdruck:

$x^1 = b$ oder mit:
$x = b$ gleichbedeutend.

Erkl. 6. Der Gebrauch, statt 2^{te} **Wurzel**, **Quadratwurzel** zu sagen, geschieht aus geometrischen Gründen, indem z. B., wenn b^2 den Inhalt eines **Quadrats**, dessen Seite $= b$ ist, darstellt, $\sqrt[2]{b^2}$ die Seite dieses Quadrats repräsentiert. — Vergl. die Erkl. 4, Seite 2.

Erkl. 7. Der Gebrauch, statt 3te Wurzel, Kubikwurzel zu sagen, geschieht aus stereometrischen Gründen, indem z. B., wenn b^3 den Inhalt eines Würfels, eines Kubus darstellt, dessen Kante = b ist, $\sqrt[3]{b^3}$ die Kante dieses Kubus repräsentiert. — Vergl. hiermit die Erkl. 5, Seite 2.

Frage 9. Wie wird eine Wurzel, z. B. $\sqrt[m]{n}$ (siehe Antwort der Frage 6), im allgemeinen gelesen und welche Abweichungen finden in besonderen Fällen von der allgemeinen Leseweise statt?

Antwort. Eine Wurzel, z. B. $\sqrt[m]{n}$ wird analog wie in der Antw. der Frage 8 angegeben ist, im allgemeinen gelesen:

m^{te} **Wurzel aus** n oder:

m^{te} **Wurzel von** n.

Abweichungen von dieser allgemeinen Leseweise finden statt, wenn für m die speziellen Zahlenwerte 1, 2 und 3 eintreten, indem man:

1). für $\sqrt[1]{n}$ nicht 1te Wurzel aus n, sondern einfach n liest (siehe Erkl. 5);

2). für $\sqrt[2]{n}$ nicht 2te Wurzel aus n, sondern **Quadratwurzel** aus n liest (siehe Erkl. 6);

3). für $\sqrt[3]{n}$ nicht 3te Wurzel aus n, sondern **Kubikwurzel** aus n liest (siehe Erkl. 7).

Frage 10. Was ist in Betreff der Schreibweise einer **Quadratwurzel**, z. B. der Wurzel $\sqrt[2]{m}$, besonders zu merken?

Antwort. In Betreff der Schreibweise einer **Quadratwurzel** hat man sich besonders zu merken, dass, da sie bei Berechnungen am häufigsten vorkommt, der Wurzelexponent derselben weggelassen wird.

Man schreibt nämlich nicht:

$$x = \sqrt[2]{c}, \text{ sondern:}$$

$$x = \sqrt{c}$$

Analog schreibt man für die Wurzel $\sqrt[2]{m}$ nicht: $\sqrt[2]{m}$, sondern: $\sqrt{m}$

Aufgabe 1. Man schreibe nebenstehende Ausdrücke in welchen x eine noch zu bestimmende Grösse darstellt, in der hierbei üblichen Form, lese alsdann die somit erhaltenen Ausdrücke und benenne deren einzelne Glieder.

1). $x^c = b$

2). $x^c = b + d$ man beachte die Erkl. 3, S. 173.

3). $x^m = -a^2bc$

4). $x^n = \frac{a}{b}$

5). $x^1 = m$. . . man beachte die Erkl. 5, S. 175.

6). $x^2 = 7$. . . man beachte die Antwort der Frage 10, S. 176.

7). $x^3 = m^2 - 27$

8). $x^2 = m^2 - 3a + n^2$

9). $x^2 = -mnp^2$

10). $x^{n+1} = a$

11). $x^{2n} = a^2 - b^2$

12). $x^{2n+1} = \frac{a^2 - b^2}{c^2} + d$

Frage 11. Wann heisst eine Wurzel vom 1ten, 2ten, 3ten . . . nten **Grade** und wann wird eine Wurzel eine **gerade** (paarzählige) oder **ungerade** (unpaarzählige) Wurzel genannt?

Antwort. Analog wie die Potenzen werden auch die Wurzeln **nach Graden** benannt und zwar heisst eine Wurzel **vom 1ten** (siehe Erkl. 8), **2ten**, **3ten**, ... nten **Grade**, wenn der Wurzelexponent = 1, 2, 3, . . . n ist; dementsprechend ist z. B.:

$\sqrt[1]{a}$ eine Wurzel vom 1ten Grade (s. Erkl. 8)

$\sqrt{\frac{b^3}{m}}$ „ „ „ 2ten „ (siehe Antw. der Frage 10, S. 176)

$\sqrt[3]{b+c}$ „ „ „ 3ten „

$\sqrt[n]{b^2-c^2}$ „ „ „ nten „

Erkl. 8. Da nach der Erkl. 5, Seite 175, der Wurzelexponent „1“ keine Bedeutung hat, mithin derselbe jeder Zahl, jedem Ausdruck beigelegt werden kann, so sind alle Zahlen Wurzeln vom 1ten Grade und gehören in Folge dessen zu den ungeraden Wurzeln.

Eine Wurzel wird ferner eine **gerade** (paarzählige) oder **ungerade** (unpaarzählige) Wurzel genannt, je nachdem der Wurzelexponent eine gerade oder ungerade Zahl ist; dementsprechend sind z. B.:

$\sqrt{m}$, $\sqrt[4]{a+b}$, $\sqrt[2n]{\frac{a^2-b^2}{m}}$ (siehe Erkl. 8, S. 3)

gerade, während

$$\sqrt[3]{a},\ \sqrt[5]{\frac{m}{n}},\ \sqrt[2n+1]{c^2+d^2-f}$$ (siehe Erkl. 9, S. 3)

ungerade Wurzeln sind.

Frage 12. Was versteht man unter dem **Koeffizienten** einer Wurzel und was ist zu beachten in Bezug auf dessen Schreibweise?

Erkl. 9. Hat eine Wurzel scheinbar keinen Koeffizienten, bezw. keinen Faktor von welchem der Wert der Wurzel unabhängig ist, wie z. B. die Wurzeln:

$$\sqrt[4]{a},\ -\sqrt[5]{a+b},\ \sqrt[3]{3b},\ \sqrt[7]{4m} \text{ u. s. f.},$$

so kann man sich stets den Faktor „**Eins**" (und zwar $+1$ oder -1) denken. Hiernach ist z. B.:

$$\sqrt[4]{a} = 1 . \sqrt[4]{a}$$

$$-\sqrt[5]{a+b} = -1 . \sqrt[5]{a+b} \text{ u. s. f.},$$

woraus sich ergibt, dass **jede Wurzel einen Koeffizienten** hat.

Erkl. 10. Den Koeffizienten einer Wurzel setzt man zur Vermeidung von Irrtümern **stets vor das Wurzelzeichen**, denn wollte man z. B. in

$$3\sqrt{a}$$

den Koeffizienten 3 **hinter** das Wurzelzeichen, setzen, also:

$$\sqrt{a} . 3$$

schreiben, so kann durch Unaufmerksamkeit dieser Faktor 3 sehr leicht unter das Wurzelzeichen geraten, wodurch der Ausdruck eine ganz andere Bedeutung annimmt.

Antwort. Unter dem **Koeffizienten** (siehe Erkl. 10, S. 3) einer Wurzel versteht man den bei der Wurzel stehenden Faktor, von dem der Wert der Wurzel unabhängig ist, z. B.:

in: $3\sqrt[c]{b}$ ist 3 der Koeffizient der Wurzel,

in: $ab\sqrt{n}$ „ ab „ „ „ „

in: $(a-b)\sqrt[6]{\frac{m}{n}}$ ist $(a-b)$ der Koeffiz. d. Wurzel,

in: $\frac{a^2-b}{c}\sqrt{m-n}$ „ $\frac{a^2-b}{c}$ „ „ „ „

in: $\sqrt[4]{a}$ ist $+1$ der Koeffizient der Wurzel (siehe Erkl. 9)

in: $-\sqrt[5]{a+b}$ ist -1 der Koeffizient der Wurzel (siehe Erkl. 9)

in: $\sqrt[3]{3b}$ ist **nicht** 3 der Koeffizient d. Wurzel, **sondern** $+1$, weil der Wert der Wurzel auch von dem Faktor 3 abhängig ist.

in: $-\sqrt[7]{4m}$ ist **nicht** 4 der Koeffiz. d. Wurzel, **sondern** -1.

In Bezug auf die Schreibweise des Koeffizienten einer Wurzel ist zu beachten, dass derselbe **stets vor das Wurzelzeichen** gesetzt werden muss (siehe Erkl. 10).

Aufgabe 2. Man benenne die in nebenstehenden Ausdrücken vorkommenden Wurzeln nach Graden, untersuche alsdann, welche dieser Wurzeln gerade und welche ungerade Wurzeln sind und bestimme schliesslich die Koeffizienten dieser Wurzeln.

1). $3\sqrt[5]{b}$

2). $\frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{ab}$

3). $n\sqrt[1]{a}$

4). $-3\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$

5). $-a\sqrt{b}$

6). $-\frac{3}{4}\sqrt{2b}$

7). $\sqrt{3ab}$

8). $-\sqrt{a-b^2}$

9). $-\sqrt[3]{3(m+n)}$

10). $(a-b).\sqrt[3]{m}$

11). $\frac{a+b^2}{c}.\sqrt[2n]{m^2-p}$

12). $\frac{3}{4}.\sqrt[2n+1]{\frac{2}{7}m}$

13). $-a^2.\sqrt[2n-1]{\frac{3}{4}bc}$

14). $-\sqrt[2n]{3(a^2+b)}$

Frage 13. Wann sind Wurzeln **gleichartig** (gleich) und wann **gleichnamig**?

Erkl. 11. Bei der Untersuchung, ob Wurzeln gleichartig (gleich) oder gleichnamig sind, bleiben die etwaigen Koeffizienten dieser Wurzeln unberücksichtigt.

Antwort. Wurzeln sind **gleichartig**, bezw. **gleich**, wenn sie sowohl gleiche Radikanden, als auch gleiche Wurzelexponenten haben,

dementsprechend sind z. B. die Wurzeln:

$\sqrt[3]{a}$, $2\sqrt[3]{a}$, $-\sqrt[3]{a}$, $(a+b)\sqrt[3]{a}$ u. s. f.

gleichartige, bezw. gleiche Wurzeln (siehe die Erkl. 11).

Wurzeln sind ferner **gleichnamig**, wenn sie gleiche Wurzelexponenten haben,

dementsprechend sind z. B. die Wurzeln:

$\sqrt{a}$, $3.\sqrt{a+b}$, $-7.\sqrt{m^2-n}$ u. s. f.

gleichnamige Wurzeln (siehe die Erkl. 11).

Gleichartige Wurzeln sind hiernach auch gleichnamig, aber nicht umgekehrt.

B. Ueber das Radizieren mit ganzen positiven Exponenten.

1). Ueber die Definition des Radizierens etc. und über die absoluten Wurzeln.

Frage 14. Was heisst: „**eine Zahl** r **durch eine Zahl** e **radizieren**“ oder „**aus einer Zahl** r **die** e^{te} **Wurzel ausziehen**“ und durch welches Symbol wird diese Operation angedeutet?

Erkl. 12. Der Gebrauch des Fremdwortes „**extrahieren**“, welchen sich manche Autoren anstatt des deutschen Wortes „**ausziehen**“ angeeignet haben, ist zu verwerfen.

Antwort. Eine Zahl r durch eine andere Zahl e radizieren, oder aus einer Zahl r die e^{te} Wurzel ausziehen (extrahieren, siehe Erkl. 12), heisst: eine dritte Zahl w suchen, die in die e^{te} Potenz erhoben die Zahl r ergibt.

Die Operation des Radizierens, Wurzelausziehens wird, wenn r die zu radizierende und e die Zahl bedeutet, durch welche radiziert werden soll, angedeutet durch das Symbol:

$$\sqrt[e]{r}$$

Frage 15. Wieviele Grössen kommen bei der Radizierung, Wurzelausziehung, in Betracht, wie werden dieselben benannt und bezeichnet, und welche Beziehungen finden zwischen denselben statt?

Erkl. 13. Aus dem Abschnitte A. ist das übrige in Betreff der Relationen:

$$w = \sqrt[e]{r} \quad \text{und}$$

$$w^e = r$$

bekannt.

Antwort. Bei der Radizierung, Wurzelausziehung, kommen **drei** Grössen in Betracht und zwar:

1). die zu radizierende Zahl (Grösse), bezw. die Zahl aus welcher die Wurzel gezogen wird. Dieselbe wird **Radikand** genannt und allgemein durch „r“ bezeichnet;

2). die Zahl durch welche radiziert wird, bezw. die Zahl, welche angibt, die wievielte Wurzel ausgezogen werden soll. Dieselbe wird **Wurzelexponent** genannt und allgemein durch „e“ bezeichnet; und

3). die Zahl (Grösse), welche das Endresultat der Radizierung angibt, also gleich dem Symbol: $\sqrt[e]{r}$ ist. Diese Zahl, also auch der ganze Ausdruck: $\sqrt[e]{r}$, welcher die Radizierung symbolisch darstellt (vergl. Antwort der Frage 6) wird **Wurzel** genannt und allgemein durch „w“ bezeichnet.

Zwischen diesen drei Grössen besteht die Beziehung:

1). . . . $w = \sqrt[e]{r}$

oder nach der gegebenen Definition der Radizierung, die Beziehung:

2). . . . $w^e = r$ (siehe Erkl. 13).

Frage 16. Welche Probe kann man sich für die Richtigkeit einer Radizierung aus der Definition derselben ableiten?

Erkl. 14. Die in nebenstehender Antwort angeführte Probe für die Richtigkeit einer Wurzelausziehung, Radizierung, wird oft zur Beweisführung späterer Lehrsätze benutzt.

Antwort. Nach der in Antwort der Frage 14 gegebenen Definition soll bei einer Radizierung, Wurzelausziehung, die Zahl gesucht werden, welche in die Potenz „e" des Wurzelexponenten erhoben den Radikanden „r" ergibt, folglich ist eine Wurzelausziehung richtig, wenn:

$$w^e = r \text{ ist}$$

und dies liefert die Probe für die Richtigkeit der ausgeführten Operation (siehe Erkl. 14).

Frage 17. Von welcher Operation ist die Radizierung eine Umkehrung?

Erkl. 15. Wie in dem Kapitel: „Die Logarithmen" (Erkl. 6, Seite 6) gezeigt wird, ist die Logarithmierung eine zweite Umkehrung der Potenzierung, indem in derselben die Basis und der wahre Wert einer Potenz gegeben, der betreffende Potenzexponent aber gesucht ist.

Antwort. Da nach der in Antwort der Frage 14 gegebenen Definition die Radizierung in dem Aufsuchen der Basis einer Potenz besteht, deren Exponent und wahrer Wert bekannt ist, so ist die Radizierung eine Umkehrung der Potenzierung.

Siehe die Antwort der Frage 9, Seite 6, und die Erkl. 15.

Frage 18. Welche Folgerung ergibt sich aus der Definition der Radizierung in Bezug auf den Wurzelexponenten?

Erkl. 16. Nach Antw. der Frage 10, S. 6, hat eine Potenz nur dann einen Sinn, wenn der Exponent eine positive ganze Zahl ist. Dass eine Potenz auch einen Sinn hat, wenn der Exponent eine negative ganze Zahl ist, ist deshalb in nebenstehender Antwort ausgeschlossen, weil dies sich nicht direkt aus der Definition einer Potenz ergibt.

Erkl. 17. In dem späteren Abschnitt C. wird gezeigt, dass einer Radizierung auch dann einen Sinn beiwohnt, wenn der Exponent eine negative oder gebrochene Zahl ist.

Antwort. Da nach der gegebenen Definition, siehe Antwort der Frage 6, das Radizieren in dem Aufsuchen der Basis einer Potenz besteht, deren Exponent gleich dem Wurzelexponenten ist, einer Potenz aber nur dann einen Sinn beigelegt werden kann (siehe die Erkl. 16), wenn der Exponent derselben eine ganze positive Zahl ist, so ergibt sich hieraus die Folgerung, dass auch eine Radizierung zunächst nur dann einen Sinn haben kann, wenn der Wurzelexponent eine ganze positive Zahl ist (siehe Erkl. 17).

Frage 19. Was versteht man unter einer **absoluten** Wurzel?

Erkl. 18. Eine **absolute** Zahl (Grösse) ist eine solche, welche keines der in der Algebra üblichen Vorzeichen + und — bei sich hat, z. B.:

$$2,\ a,\ \frac{m}{n}\ \text{u. s. f.}$$

sind absolute Zahlen (Grössen).

Zu den **absoluten** Zahlen gehören alle ganze und gebrochene Zahlen und die Zahl Null.

Antwort. Wie in Antw. der Frage 15 angedeutet, ist eine Wurzel das Endresultat einer Radizierung', ist nun die hierbei zu radizierende Zahl eine absolute (siehe Erkl. 18), so nennt man auch die Wurzel eine **absolute Wurzel.**

Aufgabe 3. Man soll nach der in Antwort der Frage 14 gegebenen Definition die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Radizierungen absoluter Zahlen (Grössen) ausführen.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $\sqrt[1]{5}$ = ...	5; denn: $5^1 = 5$..	siehe Antwort der Frage 16.
2). $\sqrt{25}$ = ...	5; denn: $5^2 = 25$..	siehe Antw. der Frage 16 und Antw. der Frage 10.
3). $\sqrt{m^2}$ = ...	m; denn: $m^2 = m^2$	
4). $\sqrt[3]{8}$ = ...	2; denn: $2^3 = 8$	
5). $\sqrt[1]{m}$ = ...	?	analog dem gelösten Beispiel 1.
6). $\sqrt[1]{1}$ = ...	?	
7). $\sqrt[1]{0}$ = ...	?	
8). $\sqrt{49}$ = ...	?	analog dem gelösten Beispiel 2.
9). $\sqrt{100}$ = ...	?	
10). $\sqrt{144}$ = ...	?	
11). $\sqrt{1}$ = ...	?	
12). $\sqrt{0}$ = ...	?	
13). $\sqrt{a^2}$ = ...	?	analog dem gelösten Beispiel 3.
14). $\sqrt[3]{64}$ = ...	?	analog dem gelösten Beispiel 4.
15). $\sqrt[3]{81}$ = ...	?	
16). $\sqrt[3]{1}$ = ...	?	

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
17). $\sqrt[3]{0}$	= ?	
18). $\sqrt[3]{p^3}$	= ?	
19). $\sqrt[4]{n^4}$	= ?	
20). $\sqrt[a]{1}$	= ?	
21). $\sqrt[m]{0}$	= ?	
22). $\sqrt[3]{11}$	= ?	. . man wird für dieses Beispiel keine ganze, noch gebrochene Zahl finden, welche in die 3te Potenz erhoben die Zahl 11 ergibt, denn: $2^3 = 8$ und $2^4 = 16$, und jede gebrochene Zahl in eine ganze Potenz erhoben gibt wieder eine gebrochene, niemals aber eine ganze Zahl. Man siehe den folgenden Abschnitt.
23). $\sqrt{5}$	= ?	. . auch für dieses Beispiel wird man keine ganze, noch gebrochene Zahl finden, welche in die 2te Potenz erhoben die Zahl 5 gibt, denn: $2^2 = 4$ und $2^3 = 8$, und jede gebrochene Zahl in eine ganze Potenz erhoben gibt wieder eine gebrochene, aber niemals eine ganze Zahl. Man siehe den folgenden Abschnitt.

2). Ueber die rationalen und irrationalen Zahlen und Wurzeln.

Frage 20. Auf welche neue Art von Zahlen führt die Radizierung absoluter Zahlen?

Antwort. Hat man eine absolute Zahl (siehe Erkl. 18) zu radizieren, so findet man nur dann einen ganz bestimmten Wurzelwert, wenn die zu radizierende Zahl, der Radikand, eine solche Potenz ist, welche den Wurzelexponenten zum Exponenten hat — man siehe die Beispiele 1 bis 21 in der Aufg. 3. — Ist dies nicht der Fall (wie in den Beispielen 22 u. 23 der Aufg. 3), so stellt die zu suchende Wurzel weder eine ganze, noch eine gebrochene absolute Zahl dar, da sie aber stets zwischen zwei ganzen Zahlen liegt, folglich einen ganz bestimmten endlichen Wert haben muss, so führt die Radizierung auf eine neue Art von Zahlen, nämlich auf solche, deren Werte

weder durch ganze, noch durch gebrochene Zahlen angegeben werden können, mithin nur in der Idee existieren und **Irrationalzahlen** genannt werden.

Frage 21. Woher kommt die Benennung „**Irrationalzahlen**“?

Antwort. Jede angebbare absolute ganze oder gebrochene Zahl lässt sich durch die Einheit messen, in die Einheit ausdrücken, bezw. ist ein Vielfaches der Einheit. Alle angebbaren ganzen und gebrochenen Zahlen sind somit unter sich **kommensurabel**, (siehe Erkl. 19), d. h. sie stehen unter sich und mit der Einheit in einem angebbaren **Verhältnis** (latein. *ratio*, griech. λόγος) und werden demzufolge der latein. Uebersetzung entsprechend **Rationalzahlen** genannt. Da nun die Radizierung, wie in voriger Antwort angegeben, auf solche endliche Zahlen führt, die sich weder durch ganze, noch durch gebrochene Zahlen darstellen lassen, mithin nicht in die Einheit ausgedrückt werden können, folglich mit der Einheit **inkommensurabel** (siehe Erkl. 20) sind, d. h. in keinem angebbaren Verhältnis mit der Einheit stehen, also **ohne Verhältnis** (latein. *irrationalis*, griech. ἄλογος) mit der Einheit sind, so nennt man solche im Gegensatz zu den Rationalzahlen „**Irrationalzahlen**“ (siehe die Erklärungen 21 und 22).

Erkl. 19. Das Wort „**kommensurabel**“ stammt aus dem Lateinischen und heisst: nach demselben Mass messbar.

Man sagt: zwei Grössen sind **kommensurabel**, wenn sie ein gemeinschaftliches Mass haben, d. h. wenn sie durch ein und dasselbe Mass gemessen, mithin als Vielfache ein und derselben Grösse dargestellt werden können.

z. B.: alle ganzen Zahlen und alle Brüche sind kommensurabel, da sie sich als Vielfache der Zahleneinheit darstellen lassen (siehe auch die Erkl. 20 und 21).

Erkl. 20. Das Wort „**inkommensurabel**“ stammt ebenfalls aus dem Latein. und heisst: nicht mit demselben Mass messbar.

Man sagt: zwei Grössen sind **inkommensurabel**, wenn sie kein gemeinschaftliches Mass haben, d. h. wenn sie nicht durch ein und dasselbe Mass gemessen, mithin nicht als Vielfache ein und derselben Grösse dargestellt werden können.

z. B.: $\sqrt{3}$ und 1, ebenso die Seite eines Quadrats und dessen Diagonale u. s. f. sind inkommensurabele Grössen.

Erkl. 21. Irrationalzahlen können unter sich kommensurabel sein, wenn sie durch eine und dieselbe Irrationalzahl dividiert ganze oder gebrochene Zahlen, d. h. rationale Zahlen (Quotienten) ergeben.

z. B.: die Irrationalzahlen (siehe Antw. der Frage 22): $\sqrt{50}$ und $\sqrt{32}$ sind kommensurabel, denn beide durch deren gemeinschaftliches Mass: $\sqrt{2}$ dividiert ergeben die rationalen Zahlen: $\sqrt{25}$ und $\sqrt{16}$, bezw. 5 und 4. In Betreff der hier ausgeführten Division muss auf einen späteren Abschnitt verwiesen werden.

Erkl. 22. Früher nannte man die Irrationalzahlen auch **surdische** Zahlen (vom latein. *surdus*). Das Wort „**surdus**“ war noch bis Ende des 18. Jahrhunderts gebräuchlich und ist wahrscheinlich die lateinische Uebersetzung der arabischen Uebersetzung des bereits erwähnten griech. Wortes ἄλογος (d. h. ohne Verhältnis), indem die alten Griechen, welche sich schon zu Plato's Zeiten mit der Irrationalität befassten, die ersten gewesen zu sein scheinen, welche sich dieses Kunstwortes be-

dienten, bezw. dasselbe einführten und daher alle weiteren Uebersetzungen sehr wahrscheinlich Verunstaltungen dieses Wortes sind.

Frage 22. Wann ist eine Wurzel rational oder irrational und zwar wann arithmetisch rational oder irrational und wann algebraisch rational oder irrational?

Erkl. 23. Da z. B.: $\sqrt{9}$ gleich der genau angebbaren Zahl 3 ist, so nennt man $\sqrt{9}$ eine rationale und zwar eine arithmetische rationale Wurzel.

Da z. B. $\sqrt{a^2}$ gleich der genau angebbaren Grösse a ist, so nennt man $\sqrt{a^2}$ eine algebraische rationale Wurzel.

Da man z. B.: für $\sqrt[3]{5}$, ebenso für $\sqrt{a}$ keine genau angebbaren Werte auffinden kann, so nennt man beide Wurzeln irrationale Wurzeln, und zwar erstere eine arithmetische irrationale und letztere eine algebraische irrationale Wurzel.

Antwort. Eine Wurzel ist rational, wenn sie gleich einer genau angebbaren Grösse ist; sie ist irrational, wenn keine genau angebbare Grösse existiert, die ihr gleich gesetzt werden kann.

Eine Wurzel ist ferner arithmetisch rational, wenn jene genau angebbare Grösse eine Zahl ist, sie ist algebraisch rational, wenn jene genau angebbare Grösse ein Buchstabenausdruck. bezw. ein algebraischer Ausdruck ist.

Dieselbe Unterscheidungen macht man bei arithmetischen und algebraischen irrationalen Wurzeln.

Man siehe die Beispiele in Erkl. 23.

Frage 23. In welcher Form erscheinen die Irrationalzahlen und in welcher Form wird der Wert derselben annäherungsweise dargestellt um nummerische Berechnungen, in welchen solche Zahlen vorkommen, ausführen zu können?

Antwort. Die Irrationalzahlen erscheinen stets in Form der arithmetischen irrationalen Wurzeln, indem die in solchen Wurzeln angedeuteten Radizierungen auf die Irrationalzahlen selbst führten.

Um nummerische Berechnungen in welchen Irrationalzahlen vorkommen ausführen zu können, wird der Wert der Irrationalzahlen annäherungsweise in Form von **Dezimalbrüchen**, die an sich unendlich aber nicht periodisch sind, dargestellt. Auf diese Weise kann man nämlich dem wahren Werte einer Irrationalzahl so nahe kommen als man will, ohne jedoch den wahren Wert selbst jemals zu erreichen.

Hierüber vergl. man die Abschn. β). und $\beta\beta$). in den Abschn. 14). und 15).

Aufgabe 4. Man soll untersuchen, welche der nebenstehenden Wurzeln rationale und welche irrationale Wurzeln, bezw. Irrationalzahlen sind, dabei bemerken, welche derselben arithmetische rationale und irrationale und welche algebraische rationale und irrationale Wurzeln sind.

1). $\sqrt{36}$

2). $\sqrt[3]{24}$

3). $\sqrt[1]{9}$

4). $\sqrt[4]{m^4}$

5). $\sqrt[4]{a^3}$

6). $\sqrt[3]{64}$

7). $\sqrt[4]{16}$

8). $\sqrt[5]{1}$

9). $\sqrt[7]{n^3}$

10). $\sqrt{18}$

11). $\sqrt[12]{0}$

12). $\sqrt[1]{m}$

13). $\sqrt[2]{\left(\frac{a}{b}\right)^2}$

14). $\sqrt[3]{\left(\frac{m}{n}\right)^2}$

3). Ueber die allgemeinen Wurzeln. — Aufstellung der Lehrsätze, welche sich in Betreff des Wertes einer allgemeinen Wurzel ergeben.

Frage 24. Was versteht man unter einer **allgemeinen** Wurzel?

Erkl. 24. Eine **allgemeine** Zahl (Grösse) ist eine solche, welche eines der in der Algebra üblichen Vorzeichen **plus** oder **minus** hat, also entweder positiv oder negativ ist.

Zu den **allgemeinen** Zahlen gehören alle positiven und negativen ganzen und gebrochenen Zahlen, die Zahl Null und die positiven und negativen unendlichen Zahlen.

Antwort. Wie in Antw. der Frage 15 angegeben, ist eine Wurzel das Endresultat einer Radizierung, ist nun die hierbei zu radizierende Grösse keine absolute, sondern eine allgemeine (siehe Erkl. 24), so nennt man auch die Wurzel eine **allgemeine Wurzel.**

Frage 25. Welche Lehrsätze kann man in Betreff der Werte allgemeiner Wurzeln aufstellen?

Antwort. In Betreff der Werte allgemeiner Wurzeln kann man folgende Lehrsätze 1 bis 3 aufstellen:

Lehrsatz 1. Jede Wurzel mit geradem Wurzelexponenten und mit positivem Radikanden hat zwei Werte (siehe Erkl. 27), **dieselben haben entgegengesetzte Vorzeichen, sind aber sonst gleich.**

Beweis. Hat man allgemein:

$$\sqrt[2n]{+a}$$

so heisst dies nach der Definition der Radizierung:

man soll die Zahl suchen, welche in die $2n^{te}$, also in eine gerade Potenz erhoben die positive Zahl $+a$ ergibt.

Da nun nach den Gesetzen der Potenzierung eine positive und dieselbe negative Zahl in ein und dieselbe gerade Potenz erhoben gleiche positive Resultate ergeben, so folgt hieraus, dass zwei Werte möglich sind, welche der bei der Radizierung aufzusuchenden Grösse entsprechen, und zwar sind diese Werte **gleich**, haben aber **entgegengesetzte** Vorzeichen.

Man siehe die Erklärungen 25, 26, 27 u. 28.

Erkl. 25. Hat man z. B.: $\sqrt[2]{+4}$ zu berechnen, so findet man für den Wert dieser allgemeinen Wurzel sowohl $+2$ als auch -2, denn: sowohl $(+2)^2$ als auch $(-2)^2$ gibt $+4$. Es ist also:

$$\sqrt{+4} = \pm 2$$

Hat man ferner z. B.: $\sqrt[4]{+81}$ zu berechnen, so findet man für den Wert dieser allgemeinen Wurzel, sowohl $+3$ als auch -3, denn: sowohl $(+3)^4$ als auch $(-3)^4$ gibt $+81$. Es ist also:

$$\sqrt[4]{+81} = \pm 3 \quad \text{u. s. f.}$$

Erkl. 26. In Bezug auf das **doppelte Vorzeichen** einer Wurzel ist zu beachten, dass nur in den Fällen das doppelte Vorzeichen berücksichtigt werden kann, wenn man die Art der Entstehung der Wurzelgrösse, des Radikanden, nicht kennt.

So ist z. B.:

$\sqrt{+4} = \pm 2$, da man nicht weiss, ob $+4$ durch die Multiplikation von $+2 \cdot +2$ oder $-2 \cdot -2$ entstanden ist, während

$\sqrt{(+2)^2}$ nur $= +2$ ist, indem hier ganz ausdrücklich gesagt wird, dass $+2$ in die 2^{te} Potenz erhoben, d. h. mit sich multipliziert werden soll, wodurch die Entstehung des Radikanden bekannt ist, ebenso ist:

$$\sqrt{(-2)^2} \text{ nur } = -2$$

Es ist also bei Benutzung des vorstehenden Lehrsatzes besonders auf die Art der Entstehung des Radikanden Rücksicht zu nehmen.

Erkl. 27. Wie in dem Kapitel: „**Die Richtungszahlen**" mittelst der **Moivre'schen Formel** gezeigt wird, sind die Resultate, welche man nach den Lehrsätzen 1 und 2 erhält, keineswegs als vollständig erschöpfend anzusehen, indem nach dieser Formel **jeder** Wurzel **soviele**

Werte entsprechen, als der betreffende Wurzelexponent Einheiten enthält. Demnach hat eine Wurzel, deren Wurzelexponent = 2, 3, 4, 5, ... n ist, bezw. 2, 3, 4, 5 ... n Werte.

Erkl. 28. Nach vorstehendem Lehrsatz sind die geraden Wurzeln **doppeldeutig** (biform), gehören somit zu den **mehrdeutigen** Grössen. Wie mittelst der **Moivre'schen Formel** gezeigt wird und in der Erkl. 27 bereits angegeben ist, gehören sämmtliche Wurzeln zu den mehrdeutigen Grössen.

Lehrsatz 2. Jede Wurzel mit ungeradem Wurzelexponenten und mit positivem oder negativem Radikanden hat nur einen Wert (siehe Erkl. 27), **derselbe hat das Vorzeichen des Radikanden.**

Erkl. 29. Hat man z. B.: $\sqrt[3]{+27}$ zu berechnen, so findet man für den Wert dieser allgemeinen Wurzel nur $+3$, denn nur $(+3)^3$ gibt $+27$. Es ist also:

$$\sqrt[3]{+27} = +3$$

Hat man ferner z. B.: $\sqrt[3]{-27}$ zu berechnen, so findet man für den Wert dieser allgemeinen Wurzel nur -3, denn nur $(-3)^3$ gibt -27. Es ist also:

$$\sqrt[3]{-27} = -3$$

Ebenso ist:

$$\sqrt[5]{-32} = -2, \text{ denn: } (-2)^5 = -32$$

$$\sqrt[5]{+243} = +3, \text{ denn: } (+3)^5 = +243$$

Beweis. Hat man allgemein:

$$\sqrt[2n+1]{+a} \text{ und } \sqrt[2n+1]{-a}$$

so heisst dies nach der Definition der Radizierung:

man soll die Zahl suchen, welche in die $(2n \pm 1)^{te}$, also in eine ungerade Potenz erhoben, im 1^{ten} Falle die positive Zahl $+a$, im 2^{ten} Falle die negative Zahl $-a$ ergibt.

Da nun nach den Gesetzen der Potenzierung eine positive Zahl in eine ungerade Potenz erhoben **nur** eine positive Zahl, ebenso eine negative Zahl in eine ungerade Potenz erhoben **nur** eine negative Zahl ergibt, so folgt hieraus, dass eine ungerade Wurzel aus einer positiven Zahl nur einen einzigen und zwar positiven Wert hat und dass eine ungerade Wurzel aus einer negativen Zahl nur einen einzigen und zwar einen negativen Wert hat.

Man siehe die Erklärungen 27, 28 und 29.

Lehrsatz 3. Jede Wurzel mit geradem Wurzelexponenten und mit negativem Radikanden hat einen unmöglichen (imaginären) Wert.

Beweis. Hat man allgemein:

$$\sqrt[2n]{-a}$$

so heisst dies nach der Definition der Radizierung:

man soll die Zahl suchen, welche in die $2n^{te}$, also in eine gerade Potenz erhoben die negative Zahl $-a$ ergibt.

Da nun nach den Gesetzen der Potenzierung jede positive und auch jede negative Zahl in eine **gerade** Potenz erhoben ein positives, **nie** aber ein negatives Resultat ergibt, so ist **keine** Zahl denkbar (siehe Erkl. 30), welche der verlangten Bedingung entspricht, d. h. jede Wurzel mit geradem Wurzelexponenten und mit negativem Radikanden ist **unmöglich**.

Erkl. 30. Dass auch die Zahlen: 0, $+\infty$ und $-\infty$ nicht der verlangten Bedingung entsprechen, ergibt sich aus den im Lehrsatz 27, Seite 162, aufgestellten Relationen.

Frage 26. Auf welchen neuen Zahlenbegriff führen die Radizierungen mit geradem Wurzelexponenten und negativem Radikanden?

Antwort. Da eine Radizierung mit geradem Wurzelexponenten und negativem Radikanden nach vorstehendem Lehrsatz 3 das **Symbol der Forderung des Unmöglichen** ist, so führt eine solche Radizierung auf einen weiteren Zahlenbegriff, nämlich auf die sogenannten unmöglichen, eingebildeten oder **imaginären** Zahlen. Man versteht demnach unter einer imaginären Zahl eine gerade Wurzel aus einer negativen Zahl.

Man siehe die Erklärungen 31—34.

Erkl. 31. Im Gegensatz zu den **imaginären** (eingebildeten) Zahlen nennt man alle übrigen, in Wirklichkeit existierenden Zahlen, **reelle** Zahlen.

Erkl. 32. Man unterscheidet nunmehr folgende Zahlenformen:

1). die positive ganze Zahl,
2). „ negative „ „
3). „ positive gebrochene Zahl,
4). „ negative „ „
5). „ Zahl Null,
6). „ positive unendliche Zahl $(+\infty)$,
7). „ negative „ „ $(-\infty)$.

Die Zahlen, welche unter diesen 7 Formen erscheinen, heissen **reelle** Zahlen und zwar im Gegensatz zu den in nebenstehender Antwort erwähnten Zahlen, welche die eigentümliche 8. Zahlenform:

8). die imaginären Zahlen bilden.

Die Zahlen, deren wahrer Wert unter einer dieser 7 Formen bekannt ist, heissen nach Antwort der Frage 21 auch **rationale** Zahlen und zwar im Gegensatz zu solchen, welche ebenfalls in einer jener 7 Formen erscheinen müssten, deren wahrer Wert aber niemals genau angebbar ist und **irrationale** Zahlen genannt werden.

Erkl. 33. Die Ausdrücke **real** und **imaginär** wurden zuerst von *Descartes* (*Cartesius*) benutzt und zwar zur Bezeichnung der Wurzel einer Gleichung.

Erkl. 34. Ueber die Rechnung mit imaginären Zahlen und Grössen siehe man den Abschnitt 15.

Aufgabe 5. Man soll nach der in Antwort der Frage 14 gegebenen Definition und unter Berücksichtigung der vorstehenden Lehrsätze 1 bis 3, die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Radizierungen allgemeiner Zahlen (Grössen) ausführen.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $\sqrt{+36}$ = ...	± 6	. . . man beachte den Lehrsatz 1.
2). $\sqrt{(+a)^2}$ = ...	$+a$	. . . man beachte die Erkl. 26.
3). $\sqrt{(-m)^2}$ = ...	$-m$	
4). $\sqrt[4]{16}$ = ...	± 2	
5). $\sqrt{+25}$ = ...	?	
6). $\sqrt{49}$ = ...	?	. . . Steht bei einer allgemeinen Zahl kein Vorzeichen, so hat man sich das Vorzeichen $+$ zu denken.
7). $\sqrt{a^2}$ = ...	?	
8). $\sqrt{(-12)^2}$ = ...	?	
9). $\sqrt[4]{81}$ = ...	?	
10). $\sqrt[6]{64}$ = ...	?	
11). $\sqrt[4]{m^4}$ = ...	?	
12). $\sqrt[3]{-27}$ = ...	?	. . . man beachte den Lehrsatz 2.
13). $\sqrt[3]{27}$ = ...	?	. . . man beachte den Lehrsatz 2 u. siehe die Andeutung zu Beispiel 6.
14). $\sqrt[3]{-a^3}$ = ...	?	
15). $\sqrt[3]{x^3}$ = ...	?	
16). $\sqrt[5]{-32}$ = ...	?	
17). $\sqrt[3]{-8}$ = ...	?	
18). $\sqrt[3]{-64}$ = ...	?	
19). $\sqrt{-4}$ = ...	?	. . . ist nach dem Lehrsatz 3 unmöglich.
20). $\sqrt{-m}$ = ...	?	
21). $\sqrt[4]{-16}$ = ...	?	
22). $\sqrt[6]{-64}$ = ...	?	

4). Sätze über die Rechnung mit allgemeinen Wurzeln.

Lehrsatz 4. **Eine Wurzel in die Potenz des Wurzelexponenten erhoben gibt den Radikanden.**

Man beachte die Erkl. 35.

Vorauss. Gegeben sei: $\sqrt[e]{r}$

Behaupt. $\left(\sqrt[e]{r}\right)^e = r$

Beweis. Ergibt die in dem Ausdruck: $\sqrt[e]{r}$ angedeutete Radizierung die Wurzel w, also ist:

a). $\sqrt[e]{r} = w$

so muss, wenn diese Radizierung richtig ist, nach Antwort der Frage 16:

b). $w^e = r$ sein, oder wenn man aus Gleich. a). den Wert für w in Gleich. b). substituiert, so muss auch:

c). $\left(\sqrt[e]{r}\right)^e = r$ sein,

was zu beweisen war.

Erkl. 35. Die Lehrsätze 4, 5 und 6 gelten in allen Fällen, mag der Wurzelexponent eine gerade oder ungerade, der Radikand eine positive oder negative Zahl sein.

Zusatz 1. Aus vorstehendem Lehrsatz ergibt sich, dass man **jede** Zahl als eine Potenz mit beliebigem Exponenten darstellen kann.

Man siehe nebenstehende Beispiele.

Beispiele.

1). Soll man z. B. die Zahl 3 als eine Potenz mit dem Exponenten 7 darstellen, so erhält man hierfür:

$$3 = \left(\sqrt[7]{3}\right)^7$$

2). Soll man z. B. die allgemeine Grösse $-a$ als eine Potenz mit dem Exponenten m darstellen, so erhält man hierfür:

$$-a = \left(\sqrt[m]{-a}\right)^m$$

Zusatz 2. Aus vorstehendem Lehrsatz, bezw. aus dem Zusatz 1 ergibt sich, dass man **jede** Zahl in eine beliebige Anzahl gleicher Faktoren zerlegen kann.

Man siehe nebenstehende Beispiele.

Beispiele.

1). Soll man z. B. die Zahl 3 in ein Produkt von vier gleichen Faktoren zerlegen, so setze man nach dem Zusatz 1:

$$3 = \left(\sqrt[4]{3}\right)^4$$ und hierfür kann man schreiben:

$$3 = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{3}$$

2). Soll man z. B. die allgemeine Grösse $-a$ in ein Produkt von 6 gleichen Faktoren zerlegen, so setze man nach dem Zusatz 1:

$-a = \left(\sqrt[6]{-a}\right)^6$ u. hierfür kann man schreiben:

$$-a = \sqrt[6]{-a} \cdot \sqrt[6]{-a} \cdot \sqrt[6]{-a} \cdot \sqrt[6]{-a} \cdot \sqrt[6]{-a} \cdot \sqrt[6]{-a}$$

Zusatz 3. Aus vorstehendem Lehrsatz, bezw. aus dem Zusatz 1 ergibt sich, dass man eine beliebige Differenz, z. B.: $a - b$ als die **Differenz zweier Quadrate** darstellen, mithin in ein Produkt zerlegen kann.

Man siehe nebenstehendes Beispiel.

Beispiel.

Soll man z. B.: $a - b$ als die Differenz zweier Quadrate, bezw. als ein Produkt darstellen, so setze man nach dem Zusatz 1:

$$a = (\sqrt{a})^2 \text{ und}$$

$$b = (\sqrt{b})^2$$

mithin ist:

$$a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2$$

wofür man nach dem Lehrsatz 17, Seite 70, schreiben kann:

$$a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2$$
$$= (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

Lehrsatz 5. Eine Potenz durch ihren Exponenten radiziert gibt die Basis dieser Potenz.

Man beachte die Erkl. 35.

Vorauss. Gegeben sei: r^e

Behaupt. $\sqrt[e]{r^e} = r$

Beweis. Ergibt die in dem Ausdruck: $\sqrt[e]{r^e}$ angedeutete Radizierung die Wurzel w, also ist:

a). $\sqrt[e]{r^e} = w$

so muss, wenn diese Radizierung richtig ist, nach Antwort der Frage 16:

b). $w^e = r^e$ sein.

Da nun aus letzterer Gleich. folgt, dass:

c). $w = r$ ist (siehe Erkl. 36),

so ergibt sich aus den Gleichungen a). und c). die Relation:

$$\sqrt[e]{r^e} = r$$

und dies ist obige Behauptung.

Erkl. 36. Haben Potenzen mit gleichen Exponenten gleiche Werte, so müssen auch die Basen dieser Potenzen gleich sein.

Die Gleichung:

$$w^e = r^e$$

kann nur existieren, wenn die Basen w und r gleich sind.

Zusatz 1. Aus vorstehendem Lehrsatz ergibt sich, dass man **jede** Zahl als eine Wurzel mit beliebigem Wurzelexponenten darstellen kann.

Man siehe nebenstehende Beispiele.

Beispiele.

1). Soll man z. B. die Zahl 3 als eine Wurzel mit dem Wurzelexponenten 7 darstellen, so erhält man hierfür:

$$3 = \sqrt[7]{3^7}$$

2). Soll man z. B. die allgemeine Zahl $-a$ als eine Wurzel mit dem Wurzelexponenten m darstellen, so erhält man hierfür:

$$-a = \sqrt[m]{(-a)^m}$$

Man vergl. die Andeutung zu dem Beisp. 10 in der nachfolgenden Aufgabe 6.

Zusatz 2. Aus den Lehrsätzen 4 und 5 folgt die Relation:

$$(\sqrt[e]{r})^e = \sqrt[e]{r^e} = r$$

Beispiele.

1). $(\sqrt[5]{3})^5 = \sqrt[5]{3^5} = 3$

2). $(\sqrt[3]{-4})^3 = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$

3). $(\sqrt[6]{-2})^6 = \sqrt[6]{(-2)^6} = -2$ man beachte hier die Andeut. zu dem Beisp. 2 in der folgenden Aufgabe 6.

Zusatz 3. Aus dem Lehrsatz 4 folgt, dass eine **jede** Zahl unverändert bleibt, wenn man sie durch eine beliebige Zahl radiziert und dann mit derselben Zahl potenziert. Aus dem Lehrsatz 5 folgt, dass eine **jede** Zahl unverändert bleibt, wenn man sie mit einer beliebigen Zahl potenziert und dann durch dieselbe Zahl radiziert.

Lehrsatz 6. Eine Wurzel mit dem Wurzelexponenten „Eins" ist stets gleich dem Radikanden.

Man beachte die Erkl. 35.

Vorauss. Gegeben sei: $\sqrt[1]{r}$

Behaupt. $\sqrt[1]{r} = r$

Beweis. Ergibt die in dem Ausdruck: $\sqrt[1]{r}$ angedeutete Radizierung den Wert w, also ist:

a). $\sqrt[1]{r} = w$

so muss, wenn diese Radizierung richtig sein soll, nach Antw. der Frage 16:

$$w^1 = r \text{ oder:}$$

b). $w^1 = r^1$ sein, dies ist aber nur dann möglich, wenn:

c). $w = r$ ist.

Mithin folgt aus den Gleich. a). u. c).:

$$\sqrt[1]{r} = r$$

Man siehe die Erkl. 35, Seite 191, und die Erkl. 5, Seite 175.

Lehrsatz 7. Der Wert einer Wurzel, deren Radikand = 0 ist, ist = 0.

Vorauss. Gegeben sei: $\sqrt[e]{0}$

Behaupt. $\sqrt[e]{0} = 0$

Beweis. Ergibt die in dem Ausdruck:

$\sqrt[e]{0}$ angedeutete Radizierung den Wert w, also ist:

a). $\sqrt[e]{0} = w$

so muss, wenn diese Radizierung richtig sein soll, nach Antw. der Frage 16:

b). $w^e = 0$ sein,

dies ist aber nur dann der Fall, wenn

c). $w = 0$ ist,

mithin folgt aus den Gleich. a). und c).:

$$\sqrt[e]{0} = 0$$

Lehrsatz 8. Der Wert einer Wurzel, deren Radikand $= +1$ ist, ist $= \pm 1$, wenn der Wurzelexponent eine gerade Zahl ist, er ist $= +1$, wenn der Wurzelexponent eine ungerade Zahl ist; der Wert einer Wurzel, deren Radikand $= -1$ ist, ist $= -1$, wenn der Wurzelexponent eine ungerade Zahl ist, er ist undenkbar (imaginär), wenn der Wurzelexponent eine gerade Zahl ist.

Erkl. 37. Die wichtigsten Sätze über die Rechnung mit imaginären Grössen (Wurzeln, Zahlen) sind in dem Abschnitt 15). enthalten.

Vorauss. Gegeben sei:

$$\sqrt[2n]{+1},\ \sqrt[2n+1]{+1},\ \sqrt[2n+1]{-1},\ \sqrt[2n]{-1}$$

Behaupt. 1). $\sqrt[2n]{+1} = \pm 1$

2). $\sqrt[2n+1]{+1} = +1$

3). $\sqrt[2n+1]{-1} = -1$

4). $\sqrt[2n]{-1}$ ist imaginär

(siehe Erkl. 37)

Beweis. Der Beweis ergibt sich aus den Lehrsätzen 1 bis 3.

Aufgabe 6. Man soll mit Hülfe der Lehrsätze 4 bis 8 die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Operationen ausführen.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $(\sqrt[3]{8})^3 =$	8	. . . man beachte den Lehrsatz 4.
2). $\sqrt{(-5)^2} =$	-5	. . . Führt man in diesem Beispiel zuerst die angedeutete Potenzierung aus, so erhält man: $\sqrt{+25}$ und der Anfänger wird in den Fehler verfallen und mit Benutzung des Lehrsatzes 1: $\sqrt{+25} = +5$ setzen, was falsch ist, indem man zu berücksichtigen hat, dass der Radikand $+25$ durch die Multiplikation: $-5 \cdot -5$ entstanden ist. Siehe Erkl. 26, Seite 187.
3). $\sqrt{+1} =$	± 1	. . . man beachte den Lehrsatz 8.
4). $(\sqrt[3]{-8})^3 =$	?	

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
5). $(\sqrt[5]{+16})^5 =$	?	
6). $(\sqrt{ab})^2 =$	?	
7). $(\sqrt[3]{a-b})^3 =$	?	
8). $\left(\sqrt[6]{-\frac{m}{n}}\right)^6 =$	?	
9). $\sqrt[3]{8^3} =$	?	 man beachte den Lehrsatz 5.
10). $\sqrt[3]{(-8)^3} =$	?	
11). $\sqrt{(+5)^2} =$	?	
12). $\sqrt[3]{(x-1)^3} =$	?	
13). $\sqrt{\left(\frac{m-n}{x}\right)^2} =$	?	
14). $\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} =$	?	
15). $\sqrt[1]{4} =$	?	 man beachte den Lehrsatz 6.
16). $\sqrt[1]{-5} =$	?	
17). $\sqrt[1]{+\frac{m}{n}} =$	?	
18). $\sqrt[1]{-(x-y)^3} =$	?	
19). $\sqrt[4]{0} =$	?	 man beachte den Lehrsatz 7.
20). $\sqrt[a]{0} =$	?	
21). $\sqrt[4]{+1} =$	?	 man beachte den Lehrsatz 8.
22). $\sqrt[3]{+1} =$	?	
23). $\sqrt[5]{+1} =$	?	
24). $\sqrt[3]{-1} =$	?	
25). $\sqrt[7]{-1} =$	?	
26). $\sqrt{-1} =$	?	
27). $\sqrt[4]{-1} =$	?	
28). $\sqrt{a^0} =$	?	 man beachte, dass $a^0 = 1$ ist und $1 = 1^2$ gesetzt werden kann.

Aufgabe 7. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen Ausdrücke in Form von Potenzen mit den Exponenten: 2, 3, 4 . . . n schreiben.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $+10 =$	$(\sqrt{10})^2$, $(\sqrt[3]{10})^3$, $(\sqrt[4]{10})^4$	
	$(\sqrt[n]{10})^n$	man beachte den Zusatz 1, Seite 191.
2). $-36 =$?		
3). $\frac{a}{b} =$?		
4). $-x =$?		
5). $a-3b =$?		

Aufgabe 8. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen Ausdrücke in 2, 3, 4 n Faktoren zerlegen.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $7 =$	$\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}$; $\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{7}$;	
	$\sqrt[n]{7}\cdot\sqrt[n]{7}\cdot\sqrt[n]{7}\cdot\sqrt[n]{7}\ldots$ (n mal) . .	man beachte den Zusatz 2, S. 191.
2). $-19 =$?		
3). $-xy =$?		
4). $(m-n) =$?		
5). $\frac{a-b}{x} =$?		

Aufgabe 9. Man soll jede der in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen Differenzen in die Differenz zweier Quadrate, bezw. in ein Produkt verwandeln.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $a-b =$	$(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2$	
	$= (\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})$. . .	man beachte den Zusatz 3, S. 192.
2). $x-y =$?		
3). $\frac{a}{b}-\frac{c}{d} =$?		
4). $\frac{m}{n}-\frac{abc}{d} =$?		
5). $a^2-bc^2 =$?		
6). $\frac{1}{4}m-\frac{3}{5}n =$?		

Aufgabe 10. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen Ausdrücke in Form von Wurzeln mit den Wurzelexponenten: 2, 3, 4 . . . n schreiben.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $+9 = \ldots\ldots \sqrt{(+9)^2},\ \sqrt[3]{(+9)^3},\ \sqrt[4]{(+9)^4}$

$\sqrt[n]{(+9)^n}$ man beachte den Zusatz 1, Seite 192.

2). $a = \ldots\ldots ?$

3). $-7 = \ldots\ldots ?$

4). $\frac{m}{n} = \ldots\ldots ?$

5). $-x = \ldots\ldots ?$

6). $a - 3b = \ldots\ldots ?$

Aufgabe 11. Man soll mit Hülfe der vorstehenden Lehrsätze 4—7 und deren Zusätze die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen Ausdrücke **reduzieren**, d. h. auf einfachere Formen bringen.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 = \ldots\ldots x$ man beachte zuerst die Antworten der Fragen 1 und 2, Seite 1, und dann den Lehrsatz 4.

2). $\sqrt{a^6} = \sqrt{(a^3)^2} = \ldots\ldots a^3$ man beachte zuerst den Lehrsatz 11, Seite 41, bezw. dessen Zusatz 3, Seite 42, und dann den vorstehenden Lehrsatz 5.

3). $3\,.\sqrt{25} = 3\,.\sqrt{5^2} = 3\,.\,5 = \ldots 15$

4). $(3\sqrt{a})^2 = 3^2.(\sqrt{a})^2 = 3^2.a = 9a$ man beachte zuerst den Lehrsatz 4, Seite 9, und dann den vorstehenden Lehrsatz 4.

5). $\sqrt[3]{a^3} - \sqrt[4]{b^4} + a:\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = a - b + a:\frac{a}{b}$

$= a - b + b = a$ man beachte zuerst die Lehrsätze 4 und 5.

6). $(4\sqrt{a})^2 + (3\sqrt{a})^2 + (4\sqrt{a-b})^2 + (5\sqrt[3]{m-n})^3 =$

$4^2.(\sqrt{a})^2 + 3^2(\sqrt{a})^2 + 4^2(\sqrt{a-b})^2 + 5^3(\sqrt[3]{m-n})^3$

$= 16a + 9a + 16(a-b) + 125(m-n)$

$= 16a + 9a + 16a - 16b + 125(m-n)$

$= 41a - 16b + 125(m-n)$

7). $(\sqrt[5]{210})^3.(\sqrt[5]{210})^2 + (\sqrt[17]{280})^9.(\sqrt[17]{280})^{-2}.(\sqrt[17]{280})^{10} = \ldots$ man beachte zuerst den Lehrsatz 6, Seite 15, und dann den vorstehenden Lehrsatz 4.

$(\sqrt[5]{210})^5 + (\sqrt[17]{280})^{17} = 210 + 280 = 490$

8). $(\sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{2})^3 = (\sqrt[3]{5})^3.(\sqrt[3]{3})^3.(\sqrt[3]{2})^3 = 5\,.\,3\,.\,2 = 30$ man beachte zuerst den Lehrsatz 4, Seite 9, und dann den vorstehenden Lehrsatz 4.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

9). $\sqrt[27]{(a^{-9})^{-3}} + ((\sqrt[6]{a})^3)^2 - (\sqrt{2} \cdot \sqrt{a})^2 = \sqrt[27]{a^{27}} + (\sqrt[6]{a})^6 - (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{a})^2$. . . man führe zuerst die angedeuteten Potenzierungen aus.
$= a + a - 2a = 0$

10). $(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = x - y$. . man beachte zuerst den Lehrs. 17, Seite 70.

11). $\sqrt{m} \cdot \sqrt{m} =$? analog dem gelösten Beispiel 1.

12). $\sqrt{3a} \cdot \sqrt{3a} =$?

13). $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} =$?

14). $\sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{b}} =$?

15). $\sqrt{a-b} \cdot \sqrt{a-b} =$?

16). $\sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[3]{x-1} =$. . . ?

17). $\sqrt{x^{10}} =$? analog dem gelösten Beispiel 2.

18). $\sqrt{m^{2n}} =$?

19). $\sqrt[3]{a^6} =$?

20). $\sqrt[6]{x^{30}} =$?

21). $\sqrt[n]{c^{3n}} =$?

22). $4\sqrt{9} =$? „ „ „ „ 3.

23). $6\sqrt{36} =$?

24). $10\sqrt[3]{8} =$?

25). $(4\sqrt{x})^2 =$? „ „ „ „ 4.

26). $(m\sqrt{n})^2 =$?

27). $(3\sqrt[3]{3})^3 =$?

28). $(a\sqrt[n]{b})^n =$?

29). $(10 \cdot \sqrt[3]{10^3})^3 =$?

30). $a + (\sqrt[7]{a-b})^7 + 5\sqrt[3]{(a-b)^3} - \sqrt{(a-b)^2} - 6\sqrt[8]{(a-b)^8} =$? analog den gelösten Beispielen 5 und 6.

31). $(3\sqrt{m})^2 + (4\sqrt[3]{m})^3 - (2\sqrt[4]{m-n})^4 =$?

32). $(4\sqrt{a})^2 + (3\sqrt{b})^2 + (2\sqrt{7b-4a})^2 - (6\sqrt{b})^2 =$?

33). $(\sqrt[7]{a})^3 \cdot (\sqrt[7]{a})^4 - (\sqrt[10]{2a})^6 \cdot (\sqrt[10]{2a})^7 \cdot (\sqrt[10]{2a})^{-3} =$? . . analog dem gelösten Beispiel 7.

Uebungsbeispiele: | **Resultate:** | **Andeutungen:**

34). $(\sqrt[x]{a})^{3y-p} \cdot (\sqrt[x]{a})^{2x-3y} \cdot (\sqrt[x]{a})^{p-x} = ?$

35). $(\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{10} \cdot \sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[5]{100})^5 = \ldots ?$ analog dem gelösten Beispiel 8.

36). $(\sqrt[n]{a^2b} \cdot \sqrt[n]{ab^3} \cdot \sqrt[n]{a^3b^3})^n = \ldots ?$

37). $(\sqrt[n]{a^2b^2c} \cdot \sqrt[n]{a^3b^5c^{-7}} \cdot \sqrt[n]{a^{-5}b^{-7}c^6})^n = ?$

38). $(\sqrt[n]{a+b} \cdot \sqrt[n]{a-b} \cdot \sqrt[n]{a^2-b^2})^n = \ldots ?$

39). $\sqrt[8]{(2^{-4})^{-2}} - ((\sqrt[12]{3})^{-3})^{-4} + \sqrt[4]{(5^2)^2} = ?$ „ „ „ „ 9.

40). $\sqrt[18]{(2^{-9})^{-2}} + ((\sqrt[12]{6})^{-6})^{-2} - (\sqrt{5} \cdot \sqrt{2})^2 = ?$

41). $(\sqrt{2a} + \sqrt{3a}) \cdot (\sqrt{2a} - \sqrt{3a}) = \ldots ?$ „ „ „ „ 10.

42). $(\sqrt{m} - \sqrt{m+n}) \cdot (\sqrt{m} + \sqrt{m+n}) = ?$

43). $(\sqrt{a} + \sqrt{a-b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{a-b}) = ?$

5). Ueber die Radizierung eines Produktes.

Lehrsatz 9. **Ein Produkt wird durch eine Zahl radiziert, indem man jeden einzelnen Faktor durch diese Zahl radiziert und das Produkt der so erhaltenen Wurzeln bildet.**

Behaupt. $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$

Beweis. Setzt man $\sqrt[m]{ab}$ gleich der noch zu bestimmenden Grösse x, also ist:

a). . . . $\sqrt[m]{ab} = x$

so hat man nach der in Antwort der Frage 14 gegebenen Definition diese Grösse x so zu bestimmen, dass

b). . . . $x^m = ab$ ist.

Da man nun weiss, dass nach den Regeln der Potenzierung und nach dem Lehrsatz 4:

c). $(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b})^m = (\sqrt[m]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{b})^m = ab$ ist,

so folgt aus den Gleichungen b). und c)., dass:

d). . . . $x = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$ sein muss.

Aus den Gleichungen a). und d). folgt somit obige Behauptung:

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$$

Zusatz 1. Durch Umkehrung des Lehrsatzes 9 erhält man den für die **Multiplikation von Wurzeln** (siehe dieselben) wichtigen Satz:

„**Gleichnamige Wurzeln** (d. s. solche, welche gleiche Wurzelexponenten haben) **werden multipliziert, indem man ihre Radikanden multipliziert und das so erhaltene Produkt durch den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten radiziert.**“ in Zeichen: $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$

Zusatz 2. Vorstehender Lehrsatz 9 kann sehr oft bei arithmetischen Rechnungen in welchen irrationale Wurzeln vorkommen, zur Vereinfachung der Rechnung benutzt werden, und zwar geschieht dies, indem man versucht die Radikanden aus welchen man nicht die Wurzel ziehen kann, was in den meisten Fällen stattfindet, in solche Faktoren zu zerlegen, damit man wenigstens an einem derselben die angedeutete Radizierung ausführen kann; d. h. indem man den Radikanden in seinen rationalen und irrationalen Teil zerlegt und aus ersterem die Wurzel zieht.

Man siehe nebenstehende Beispiele und den Zusatz 3.

Beispiele.

1). $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = \sqrt{9} . \sqrt{2} = \sqrt{3^2} . \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

2). $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27.2} = \sqrt[3]{27} . \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3} . \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$

3). $\sqrt{a^3} = \sqrt{a^2 . a} = \sqrt{a^2} . \sqrt{a} = a\sqrt{a}$

4). $\sqrt{ab^3} = \sqrt{b^2 . ab} = \sqrt{b^2} . \sqrt{ab} = b\sqrt{ab}$

Bei diesen Beispielen sind nur die absoluten Wurzelwerte berücksichtigt worden. Siehe Zusatz 4.

Zusatz 3. Mit Hülfe des Zusatzes 2 ist es oft möglich, gleichnamige Wurzeln **in gleiche** verwandeln zu können, was insbesondere bei vorkommenden Additionen und Subtraktionen von grosser Wichtigkeit ist.

Man siehe nebenstehende Beispiele und den Abschnitt: Ueber die Addition und Subtraktion von Wurzeln.

Beispiele.

1). $\sqrt{24} + \sqrt{54} + \sqrt{96} =$

$\sqrt{4.6} + \sqrt{9.6} + \sqrt{16.6}$

$= \sqrt{4} . \sqrt{6} + \sqrt{9} . \sqrt{6} + \sqrt{16} . \sqrt{6}$

$= 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} + 4\sqrt{6} = 9\sqrt{6}$

2). $3\sqrt{45} - 2\sqrt{20} = 3 . \sqrt{9.5} - 2\sqrt{4.5} =$

$3 . \sqrt{9} . \sqrt{5} - 2\sqrt{4} . \sqrt{5}$

$= 3 . 3 . \sqrt{5} - 2 . 2 . \sqrt{5}$

$= 9\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

Bei diesen Beispielen sind nur die absoluten Wurzelwerte berücksichtigt worden. Siehe Zusatz 4.

Zusatz 4. Der Lehrsatz 9 liefert das Mittel, jede Radizierung allgemeiner Zahlen auf die Radizierung der Zahl ± 1 (siehe Lehrsatz 8, S. 194) und auf die Radizierung des absoluten Wertes jener Zahl zurückführen zu können.

Man siehe nebenstehende Beispiele.

Die nachfolgenden Lehrsätze 10—21 sind deshalb nur für solche Fälle aufgestellt, in welchen der Radikand eine absolute Zahl bedeutet, indem man beim Radizieren allgemeiner Zahlen dieselben in Produkte zerlegen kann, bestehend aus dem Faktor: ± 1 und der betreffenden absoluten Grösse, dann für den Faktor ± 1 den Lehrs. 8, Seite 194, anwenden und das sich hiernach ergebende Resultat mit der radizierten absoluten Grösse multiplizieren kann; — dasselbe gilt für die nachfolgenden Uebungsbeispiele.

Beispiele.

1). $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{-1.27} = \sqrt[3]{-1}.\sqrt[3]{3^3} = -1.3 = -3$ (man beachte hierbei den Lehrs. 8)

2). $\sqrt[3]{-5} = \sqrt[3]{-1.5} = \sqrt[3]{-1}.\sqrt[3]{5} = -1.\sqrt[3]{5} = -\sqrt[3]{5}$

3). $\sqrt[2]{-16} = \sqrt[2]{-1.16} = \sqrt[2]{-1}.\sqrt[2]{16} = \sqrt[2]{-1}.4 = 4\sqrt[2]{-1}$ weiter unmöglich, nach dem Lehrsatz 8.

4). $\sqrt[2]{+4} = \sqrt[2]{+1.4} = \sqrt[2]{+1}.\sqrt[2]{4} = \pm 1.\sqrt[2]{4} = \pm\sqrt[2]{4} = \pm 2$

Aufgabe 12. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Radizierungen mittelst des vorstehenden Lehrsatzes und dessem Zusatz 2 ausführen, dabei aber, wie in dem Zusatz 4 erwähnt, nur die absoluten Wurzelwerte berücksichtigen.

Uebungsbeispiele: Resultate: Andeutungen:

1). $\sqrt{49.64} = \sqrt{49}.\sqrt{64} = \sqrt{7^2}.\sqrt{8^2} = 7.8 = 56$. . man beachte die Lehrsätze 9 und 5.

2). $\sqrt{100a^2b^2c^2} = \sqrt{10^2}.\sqrt{a^2}.\sqrt{b^2}.\sqrt{c^2} = 10abc$

3). $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = \sqrt{9}.\sqrt{2} = \sqrt{3^2}.\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. . . man beachte den vorsteh. Zusatz 2.

4). $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8.3} = \sqrt[3]{2^3.3} = \sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$

5). $\sqrt{a^2b} = \sqrt{a^2}.\sqrt{b} =$ $a\sqrt{b}$

6). $3.\sqrt[3]{16a^4b^4c} = 3.\sqrt[3]{8.2.a^3.a.b^3.b.c} = 3.\sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{a^3}.\sqrt[3]{b^3}.\sqrt[3]{2abc}$

$= 3.2.a.b.\sqrt[3]{2abc} = 6ab\sqrt[3]{2abc}$

7). $\sqrt[n]{a^{n+2}.b^{n+3}} = \sqrt[n]{a^n.a^2.b^n.b^3} = \sqrt[n]{a^n}.\sqrt[n]{b^n}.\sqrt[n]{a^2b^3}$

$= ab\sqrt[n]{a^2b^3}$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
8). $\sqrt{36.25.16} =$	?	analog dem gelösten Beispiel 1.
9). $\sqrt{25a^2b^2m^2} =$	?	„ „ „ „ 2.
10). $\sqrt{8a^3b^3c^3} =$	?	
11). $\sqrt{28} =$	?	„ „ „ „ 3.
12). $\sqrt{125} =$	?	
13). $\sqrt{700} =$	?	
14). $\sqrt[3]{16} =$	?	
15). $\sqrt[3]{40} =$	?	
16). $\sqrt[3]{108} =$	?	
17). $\sqrt[3]{500} =$	?	
18). $\sqrt{mx^2} =$	?	„ „ „ „ 4.
19). $\sqrt{3x^2y^2} =$	?	
20). $\sqrt[3]{m^3n} =$	?	
21). $\sqrt[6]{x^6y} =$	?	
22). $\sqrt{4a^3b} =$	?	„ „ „ „ 6.
23). $\sqrt{25ab^3} =$	?	
24). $2\sqrt[3]{ab^4c^3} =$	?	
25). $b\sqrt[5]{a^6b^2c^8} =$	?	
26). $\sqrt[n]{a^{n+3}b^{n+2}} =$	?	„ „ „ „ 7.
27). $\sqrt[x]{a^{x+1}b^x} =$	?	
28). $\sqrt[x+y]{a^{2x+y}b^{x+2y}} =$	?	man zerlege z. B. a^{2x+y} in $a^x . a^{x+y}$

6). Ueber die Radizierung eines Bruches.

Lehrsatz 10. Ein Bruch (Quotient) wird durch eine Zahl radiziert, indem man Zähler und Nenner durch diese Zahl radiziert und den Quotient der somit erhaltenen Wurzeln bildet. Man beachte den Zusatz 4, Seite 201.

Behaupt. $$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

Beweis. Setzt man $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ gleich der

noch zu bestimmenden Grösse x, also ist:

a). . . . $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = x$

so hat man nach der in Antwort der Frage 14 gegebenen Definition diese Grösse x so zu bestimmen, dass:

b). $x^m = \frac{a}{b}$ ist.

Da man nun weiss, dass nach den Regeln der Potenzierung und nach dem Lehrsatz 4:

c). . . $\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m} = \frac{a}{b}$ ist,

so folgt aus den Gleichungen b). und c)., dass:

d). . . . $x = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$ sein muss.

Aus den Gleichungen a). und d). folgt somit obige Behauptung:

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

Zusatz 1. Durch Umkehrung des Lehrsatzes 10 erhält man den für die **Division von Wurzeln** (siehe dieselben) wichtigen Satz:

„**Gleichnamige Wurzeln** (d. s. solche, welche gleiche Wurzelexponenten haben) **werden dividiert, indem man die Radikanden dividiert und den erhaltenen Quotienten durch den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten radiziert,**“ . . . in Zeichen: $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$

Zusatz 2. Hat man einen Bruch (Quotienten) zu radizieren und der Nenner (Divisor) desselben ist keine Zahl aus welcher sich die betreffende Wurzel ziehen lässt, so multipliziere man Zähler und Nenner des Bruches mit einer so zu wählenden Zahl, damit sich aus dem Nenner die betreffende Wurzel ziehen lässt, d. h. **man mache den Nenner rational.**

Man siehe nebenstehende Beispiele und die Erkl. 51.

Beispiele.

1). $\sqrt{\frac{5}{6}}$ würde nach vorstehendem Lehrsatz 10 $= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ geben. Man setzt aber:

$$\sqrt{\frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 6}{6 \cdot 6}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6^2}} = \frac{\sqrt{30}}{6} = \frac{1}{6}\sqrt{30}$$

2). $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a \cdot b}{b \cdot b}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b} = \frac{1}{b}\sqrt{ab}$

Bei diesen Beispielen sind nur die absoluten Wurzelwerte berücksichtigt worden.
Man siehe den Zusatz 4, Seite 201.

Zusatz 3. Vorstehender Zusatz 2 macht es möglich, in manchen Fällen gleichnamige Wurzeln, deren Radikanden Brüche (Quotienten) sind, in **gleiche** Wurzeln zu verwandeln, was insbesondere bei vorkommenden Additionen und Subtraktionen von Vorteil ist.

Man siehe nebenstehendes Beispiel und den Abschnitt: Ueber die Addition und Subtraktion von Potenzen.

Beispiel.

$$6\sqrt{\frac{2}{3}} + 8\sqrt{\frac{3}{2}} = 6\sqrt{\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3}} + 8\sqrt{\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2}}$$

$$= \frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{3^2}} + \frac{8\sqrt{6}}{\sqrt{2^2}} = \frac{6\sqrt{6}}{3} + \frac{8\sqrt{6}}{2}$$

$$= 2\sqrt{6} + 4\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$$

Bei diesem Beispiel sind nur die absoluten Wurzelwerte berücksichtigt worden.
Man siehe den Zusatz 4, Seite 201.

Aufgabe 13. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Radizierungen mittelst des vorstehenden Lehrsatzes 10 und dessem Zusatz 2 ausführen, dabei aber nach dem Zusatz 4, Seite 201, nur die absoluten Wurzelwerte berücksichtigen.

Uebungsbeispiele: Resultate: Andeutungen:

1). $\sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \ldots\ldots \frac{5}{7}$ man beachte den Lehrsatz 10.

2). $\sqrt{\frac{a^2m^2n^2}{x^2y^2}} = \frac{\sqrt{a^2m^2n^2}}{\sqrt{x^2y^2}} = \frac{\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{m^2}\cdot\sqrt{n^2}}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{y^2}} = \frac{amn}{xy}$ man beachte zuerst den Lehrsatz 10, dann den Lehrsatz 9 und schliesslich den Lehrsatz 5.

3). $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

4). $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. . . man beachte den vorsteh. Zusatz 2.

5). $\sqrt{\frac{2a^2}{3b^2}} = \sqrt{\frac{2a^2 \cdot 3}{3b^2 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{6a^2}}{\sqrt{9b^2}} = \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{a^2}}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{b^2}} = \frac{a}{3b}\sqrt{6}$

6). $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{x^2y^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{x^2y^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{y^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{x \cdot y} = \frac{1}{xy}\sqrt{a^2+b^2}$. . Der Zähler dieses Bruches kann nicht radiziert werden, da derselbe eine Summe ist und bis jetzt kein Lehrsatz aufgestellt wurde, welcher über die Radizierung von Summen handelt.

7). $\sqrt{\frac{64}{81}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$?

8). $\sqrt{1\frac{9}{16}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$? . . . man richte zuerst den gemischten Bruch ein.

Uebungsbeispiele:	**Resultate:**	**Andeutungen:**
9). $\sqrt{5\frac{1}{16}} =$	 ?	
10). $\sqrt[3]{\frac{64}{125}} =$	 ?	
11). $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} =$	 ?	
12). $3\sqrt[3]{\frac{27}{125}} =$	 ?	
13). $\sqrt{\frac{4m^2n^2}{9x^2}} =$	 ?	 analog dem gelösten Beispiel 2.
14). $\sqrt[3]{\frac{8a^3m^3n^3}{x^3y^3}} =$	 ?	
15). $\sqrt[x]{\frac{(m-n)^x}{m^x n^x}} =$	 ?	
16). $\sqrt{\frac{5x}{9}} =$	 ?	 „ „ „ „ 3.
17). $3\sqrt{\frac{7a}{16m^2}} =$	 ?	
18). $5\sqrt{\frac{13x}{25y^2}} =$	 ?	
19). $\sqrt{\frac{1}{3}} =$	 ?	 „ „ „ „ 4.
20). $\sqrt{\frac{3}{5}} =$	 ?	
21). $\sqrt{\frac{4}{27}} =$	 ?	. . . man multipliziere Zähler und Nenner des Radikanden mit 3.
22). $\sqrt{\frac{m}{n}} =$	 ?	
23). $a\sqrt{\frac{x}{a}} =$	 ?	
24). $b\sqrt{\frac{a^2}{b}} =$	 ?	
25). $\sqrt{\frac{3m^2}{5n^2}} =$	 ?	 analog dem gelösten Beispiel 5.
26). $2a\sqrt{\frac{5}{8a^2}} =$	 ?	
27). $\sqrt{\frac{1+m^2}{x^2}} =$	 ?	 „ „ „ „ 6.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
28). $\sqrt{\frac{a^2(1+m^2)}{x^2}} = \ldots\ldots\ldots$	?	
29). $\sqrt{\frac{a+b^2}{(x+y)^2}} = \ldots\ldots\ldots$	?	
30). $\sqrt{\frac{a(1+b)^2}{x^2(1-y)^2}} = \ldots\ldots\ldots$	?	
31). $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} + \sqrt[3]{\frac{64}{125}} - 4\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} =$	?	
32). $3\sqrt{\frac{a^2m^2n^2}{x^2y^2}} - \sqrt[3]{\frac{8a^3m^3n^3}{x^3y^3}} = \ldots$	?	

7). Ueber die Radizierung einer Potenz.

Lehrsatz 11. **Eine Potenz wird durch eine Zahl radiziert, indem man entweder:**

1). **die Basis der Potenz durch die Zahl radiziert und die so erhaltene Wurzel mit dem Potenzexponenten potenziert,** oder indem man:

2). **den Exponenten der Potenz durch jene Zahl dividiert und mit dem so erhaltenen Quotienten, welcher kein Bruch sein darf** (siehe die Erkl. 39), **die Basis der Potenz potenziert.**

Man siehe auch die Erkl. 38 und beachte den Zusatz 4, Seite 201.

Erkl. 38. In Betreff der Radizierung von Potenzen siehe man auch den Zusatz 2 des Lehrsatzes 14.

Behaupt. 1). $\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$

2). $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{m}{n}}$

wenn $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl vorstellt.

Beweis. 1). Setzt man: $\sqrt[m]{a^n}$ gleich der noch zu bestimmenden Grösse x, also ist:

a). $\sqrt[m]{a^n} = x$

so hat man nach der in Antwort der Frage 14 gegebenen Definition diese Grösse x so zu bestimmen, dass:

b). $x^m = a^n$ ist.

Da man nun weiss, dass nach dem Lehrsatz 4, Seite 191:

$$(\sqrt[m]{a})^m = a, \text{ mithin auch:}$$

$$\left[(\sqrt[m]{a})^m\right]^n = a^n$$

oder, nach dem Zusatz 2, Seite 42:

c). $\left[(\sqrt[m]{a})^n\right]^m = a^n$ ist, so folgt aus den Gleichungen b). und c)., dass:

$$x^m = \left[(\sqrt[m]{a})^n\right]^m \text{ oder dass}$$

d). $x = (\sqrt[m]{a})^n$ sein muss.

Aus den Gleichungen a). und d). folgt schliesslich vorstehende Behauptung 1).:

$$\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$$

Erkl. 39. Nach den in dem Kapitel: „**Die Potenzen**" aufgestellten Lehrsätzen hat eine Potenz nur dann **einen Sinn**, wenn der Exponent eine **ganze** Zahl ist. Deshalb ist die in nebenstehendem Beweis aufgestellte Gleichung c).:

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m = a^n$$

nur dann richtig, wenn: $\frac{n}{m}$ eine **ganze** Zahl vorstellt. Und dies ist der Grund, warum der 2. Teil des Lehrsatzes 11 zunächst nur Gültigkeit hat, wenn der Wurzelexponent in dem Potenzexponenten ohne Rest enthalten ist.

In einem späteren Abschnitt wird gezeigt, dass auch eine Potenz dann einen Sinn hat, wenn der Exponent eine **gebrochene** Zahl ist.

Beweis. 2). Setzt man: $\sqrt[m]{a^n}$ gleich der noch zu bestimmenden Grösse x, also ist:

a). $\sqrt[m]{a^n} = x$

so hat man nach der in Antwort der Frage 14 gegebenen Definition diese Grösse x so zu bestimmen, dass:

b). $x^m = a^n$ ist.

Da nun:

$$a^{\frac{m \cdot n}{m}} = a^n$$

oder nach dem Zusatz 3, Seite 42:

c). $\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m = a^n$ ist, wobei jedoch die Erkl. 39 beachtet werden muss, so folgt aus den Gleichungen b). und c)., dass:

$$x^m = \left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m \text{ oder:}$$

d). $x = a^{\frac{n}{m}}$ sein muss.

Aus den Gleichungen a). und d). folgt schliesslich vorstehende Behauptung 2).:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

Zusatz 1. Durch Umkehrung des 1. Teils des Lehrsatzes 11 erhält man den für die **Potenzierung von Wurzeln** wichtigen Satz:

Eine Wurzel wird mit einer Zahl potenziert, indem man den Radikanden der Wurzel mit dieser Zahl potenziert und die somit erhaltene Potenz durch den Exponenten der Wurzel radiziert, in Zeichen: $(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$

Man siehe auch den Lehrsatz 13.

Zusatz 2. Aus dem 1. Teil des Lehrsatzes 11 folgt, dass man jede Wurzel aus einer Potenz als Potenz einer Wurzel darstellen kann z. B.: $\sqrt[3]{a^2} = (\sqrt[3]{a})^2$

Aufgabe 14. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Radizierungen mittelst des 1. Teils des vorstehenden Lehrsatzes 11 ausführen, dabei aber nach dem Zusatz 4, Seite 204, nur die absoluten Wurzelwerte berücksichtigen.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $\sqrt[3]{8^5} = (\sqrt[3]{8})^5 = 2^5 =$	32	man beachte den 1. Teil des Lehrsatzes 11.
2). $\sqrt[3]{(11^3)^2} = (\sqrt[3]{11^3})^2 = 11^2 =$. .	121	
3). $\sqrt{25^3} =$	?	analog dem gelösten Beispiel 1.
4). $\sqrt{64^3} =$	?	
5). $\sqrt{100^9} =$	?	
6). $\sqrt[3]{125^2} =$	?	
7). $\sqrt[4]{16^3} =$	?	
8). $\sqrt[7]{(9^7)^5} =$	?	analog dem gelösten Beispiel 2.
9). $\sqrt[5]{(6^5)^2} =$	?	
10). $\sqrt{\left(\frac{16}{25}\right)^3} =$	?	
11). $\sqrt[3]{\left(\frac{8}{27}\right)^4} =$	?	
12). $\sqrt[x]{\left(\frac{a^x b^x}{c^x}\right)^3} =$	?	
13). $\sqrt[3]{8^7} + \sqrt{25^3} + \sqrt[3]{64^8} =$	?	
14). $\sqrt{\left(\frac{16}{25}\right)^5} + \sqrt{\left(\frac{25}{64}\right)^3} =$. . .	?	

Aufgabe 15. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Radizierungen mittelst des 2. Teils des vorstehenden Lehrsatzes 11 ausführen, dabei aber, nach dem Zusatz 4, Seite 201, nur die absoluten Wurzelwerte berücksichtigen.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $\sqrt{a^6} = a^{\frac{6}{2}} =$	a^3	man beachte den 2. Teil des Lehrsatzes 11.
2). $\sqrt[x]{a^{mnx}} = a^{\frac{mnx}{x}} =$	a^{mn}	

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

3). $\sqrt[3]{a^3b^3} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^3} = a^{\frac{3}{3}} \cdot b^{\frac{3}{3}} = a^1 \cdot b^1 = ab$ man beachte zuerst den Lehrs. 9.

4). $\sqrt{x^3} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x} = x^{\frac{2}{2}} \cdot \sqrt{x} = x\sqrt{x}$

5). $\sqrt[3]{x^7} = \sqrt[3]{x^6 \cdot x} = \sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[3]{x} = x^{\frac{6}{3}} \cdot \sqrt[3]{x} = x^2\sqrt[3]{x}$

6). $\sqrt[x]{a^{3x+2}} = \sqrt[x]{a^{3x} \cdot a^2} = \sqrt[x]{a^{3x}} \cdot \sqrt[x]{a^2} = a^{\frac{3x}{x}} \cdot \sqrt[x]{a^2} = a^3\sqrt[x]{a^2}$

7). $\sqrt[x+1]{a^{3x+3}b^{5x+5}} = \sqrt[x+1]{a^{3x+3}} \cdot \sqrt[x+1]{b^{5x+5}} = a^{\frac{3(x+1)}{x+1}} \cdot b^{\frac{5(x+1)}{x+1}} = a^3b^5$

8). $\sqrt[3]{a^{18}} =$? analog dem gelösten Beispiel 1.

9). $\sqrt[17]{a^{85}} =$?

10). $\sqrt[y]{a^{3y}} =$? „ „ „ „ 2.

11). $\sqrt{a^7} =$? „ „ „ „ 4.

12). $\sqrt[3]{a^{19}} =$?

13). $\sqrt[3]{a^9b^6c^3} =$? „ „ „ „ 3.

14). $\sqrt{4a^4b^{-8}} =$? im Resultat bringe man noch den negativen Exponenten weg.

15). $\sqrt[3]{x^{3n+3}} =$? analog dem gelösten Beispiel 7.

16). $\sqrt[3]{\frac{8a^6b^3}{c^{12}}} =$? man beachte zuerst den Lehrs. 10.

17). $\sqrt[4]{\frac{2^4a^8b^{-12}c^{-4}}{3^4m^8}} =$? im Resultat bringe man noch die negativen Exponenten weg.

18). $\sqrt[n]{a^{n+1}} =$? analog dem gelösten Beispiel 6.

19). $\sqrt[x]{x^{2x+3}} =$?

20). $3\sqrt[3]{x^{3n}} =$?

21). $\sqrt[3]{3x^{3n}} =$?

22). $\sqrt{7x^4y^9z^{13}} =$?

23). $\sqrt[3]{9x^3y^8z^{14}} =$?

24). $\sqrt[3]{3^3(a-2b)^6} =$?

25). $\sqrt[4]{\frac{16(a^2+4b)^{8m}}{81(m+n)^{12n}}} =$?

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
26). $\sqrt[5]{\frac{8^{-10}(a-2b)^{10m}(x+y)^{-15n}}{4^{-20}(c^2-d)^{10m-5}}}$ = ?		
27). $\sqrt[x]{\frac{a^{x+1}}{b^{x-2}c^{x-3}d^{x-4}}}$ = ... ?		
28). $\sqrt[3x+5y]{a^{21xx+8xy-45yy}}$ = ... ?		 man führe die durch die Division des Wurzel- in den Potenzexponenten angedeutete Partialdivision aus.
29). $\sqrt[11a-7b]{x^{121aa-49bb}}$ = ... ?		

8). Ueber die Radizierung einer Wurzel.

Lehrsatz 12. Eine Wurzel wird durch eine Zahl radiziert, indem man den Wurzelexponenten mit dieser Zahl multipliziert und den Radikanden der Wurzel durch das somit erhaltene Produkt radiziert.

Man beachte den Zusatz 4, Seite 201.

Behaupt. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

Beweis. Setzt man: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ gleich der noch zu bestimmenden Grösse x, also ist:

a). $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = x$

so hat man nach der in Antwort der Frage 14 gegebenen Definition diese Grösse x so zu bestimmen, dass:

b). $x^m = \sqrt[n]{a}$ ist.

Da nun:

$$(x^m)^n = (\sqrt[n]{a})^n$$

oder nach dem Lehrsatz 4:

$(x^m)^n = a$ bezw.

$x^{mn} = a$ sein muss, so ist auch:

$\sqrt[mn]{x^{mn}} = \sqrt[mn]{a}$ oder:

c). $x = \sqrt[mn]{a}$

Aus den Gleichungen a). und c). folgt nunmehr obige Behauptung:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Zusatz 1. Soll eine Wurzel mehrmals hintereinander durch andere Zahlen radiziert werden, so findet vorstehender Lehrsatz wiederholte Anwendung . . . z. B.: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[c]{a}}} = \sqrt[mnc]{a}$

Zusatz 2. Bei wiederholten Radizierungen bleibt die **Reihenfolge** des Wurzelexponenten, mithin auch die Reihenfolge der auszuführenden Radizierungen, ohne jeden Einfluss auf das Endresultat.

z. B.:

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[c]{a}}} = \sqrt[c]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}} = \sqrt[n]{\sqrt[c]{\sqrt[m]{a}}}$ u.s.f.

denn nach dem Zusatz 1 erhält man jedesmal als Resultat: $\sqrt[mnc]{a}$

Zusatz 3. Durch Umkehrung des Lehrsatzes 12 erhält man den bei **Reduktionen und numerischen Ausrechnungen** wichtigen Satz:

„**Eine Zahl wird durch ein Produkt radiziert, indem man diese Zahl durch die einzelnen Faktoren radiziert und zwar in beliebiger Reihenfolge.**“

Mittelst dieses Satzes kann man oft den Grad einer Wurzel, deren Wurzelexponent sich in Faktoren zerlegen lässt, erniedrigen, somit die Rechnung vereinfachen.

Man siehe nebenstehende Beispiele und die betreffenden Beispiele in der Aufgabe 16.

Beispiele.

1). $\sqrt[8]{256} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{\sqrt[2]{16^2}}} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{16}} = \sqrt[2]{4} = 2$

2). $\sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{27^2}} = \sqrt[3]{27} = 3$

3). $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{a^2}} = \sqrt[3]{a}$

Aufgabe 16. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Radizierungen mittelst des Lehrsatzes 12 und dessen Zusätzen ausführen, dabei aber nach dem Zusatz 4, Seite 201, nur die absoluten Wurzelwerte berücksichtigen.

Uebungsbeispiele:	**Resultate:**	**Andeutungen:**
1). $\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[3.2]{a} =$	$\sqrt[6]{a}$	. . . man beachte den Lehrsatz 12.
2). $\sqrt{4\sqrt{a^8}} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{\sqrt{a^8}} = \sqrt{2^2}\cdot\sqrt[4]{a^8} = 2.a^2 =$	$2a^2$	man beachte der Reihe nach die Lehrsätze 9, 12 und 11.
3). $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt{\sqrt[3]{27}} = \sqrt{\sqrt[3]{3^3}} =$	$\sqrt{3}$	. . . da man ersieht, dass sich aus 27 die 3. Wurzel ausziehen lässt, so beachte man den vorstehenden Zusatz 2.
4). $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{x^{10}}} = \sqrt[3]{x^{\frac{10}{5}}} =$	$\sqrt[3]{x^2}$	. . . man beachte hierbei auch den 2. Teil des Lehrsatzes 11.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
5). $\sqrt[4]{49} = \sqrt[2.2]{49} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{49}} = \ldots$	$\sqrt{7}$	man beachte den vorstehenden Zusatz 3.
6). $\sqrt[6]{m^4x^2} = \sqrt[3]{\sqrt{m^4x^2}} = \ldots\ldots$	$\sqrt[3]{m^2x}$	man beachte auch den Lehrsatz 9.
7). $\sqrt[4]{\sqrt[3]{c}} = \ldots\ldots\ldots$	?	analog dem gelösten Beispiel 1.
8). $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}} = \ldots\ldots\ldots$	?	
9). $\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{m+n}}}} = \ldots\ldots$	?	
10). $4\,.\sqrt[3]{\sqrt{\frac{m}{n}}} = \ldots\ldots$	?	
11). $\sqrt[2x]{\sqrt[3y]{a^5}} = \ldots\ldots\ldots$	?	
12). $\sqrt{a^2\sqrt{b^4\sqrt{c^8}}} = \ldots\ldots$	?	analog dem gelösten Beispiel 2.
13). $\sqrt{16a^2\sqrt[3]{a^6b^6}} = \ldots\ldots$	?	
14). $\sqrt{\frac{a^2}{\sqrt{m^4}}} = \ldots\ldots\ldots$	?	man beachte der Reihe nach die Lehrsätze 10, 12 und 11.
15). $\sqrt{\sqrt[3]{81}} = \ldots\ldots\ldots$	?	analog dem gelösten Beispiel 3.
16). $\sqrt{\sqrt[3]{36}} = \ldots\ldots\ldots$	?	
17). $\sqrt{\sqrt[7]{25}} = \ldots\ldots\ldots$	?	
18). $\sqrt[3]{\sqrt{x^3}} = \ldots\ldots\ldots$	?	
19). $\sqrt[3]{\sqrt[5]{m^6}} = \ldots\ldots\ldots$	?	
20). $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m}} = \ldots\ldots\ldots$	?	

Uebungsbeispiele:	**Resultate:**	**Andeutungen:**
21). $\sqrt[2]{\sqrt[3]{25a^2b^6}} = \ldots\ldots\ldots$	?	
22). $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{8a^6m^9}{27}}} = \ldots\ldots\ldots$	?	
23). $\sqrt[4]{25} = \ldots\ldots\ldots$	?	 analog dem gelösten Beispiel 5.
24). $\sqrt[6]{8} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{8}} =$ u. s. f.	?	
25). $\sqrt[6]{27} = \ldots\ldots\ldots$	?	
26). $\sqrt[6]{81} = \ldots\ldots\ldots$	?	
27). $\sqrt[6]{x^2} = \ldots\ldots\ldots$	?	
28). $\sqrt[6]{m^3} = \ldots\ldots\ldots$	?	
29). $\sqrt[9]{64} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{64}} =$ u. s. f.	?	
30). $\sqrt[4]{m^6n^6} = \ldots\ldots\ldots$	?	
31). $\sqrt[12]{27} = \ldots\ldots\ldots$	?	
32). $\sqrt[12]{a^4b^8} = \ldots\ldots\ldots$	?	
33). $\sqrt[6]{9a^3b^3} = \ldots\ldots\ldots$	?	
34). $\sqrt[6]{\frac{8m^3}{n^3}} = \ldots\ldots\ldots$	?	
35). $\sqrt[9]{\frac{27(a-b)^3}{8}} = \ldots\ldots\ldots$	?	
36). $\sqrt{\sqrt[3]{49^3 64^3}} + \sqrt[3]{\sqrt[x]{27^x 24^x}} = \ldots$	?	

37). $$\sqrt[2]{\sqrt[3]{\frac{25^3}{64^3}}} + \sqrt[3]{\sqrt[2]{\frac{8^2}{27^2}}} - \sqrt[3]{\sqrt[x]{\frac{27^x}{64^x}}} = ?$$

38). $$\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{8^{16}}}} - \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{4^{15}}}} + \sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{3^{60}}}} - \sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt{27^{10}}}} = ?$$

9). Ueber die Potenzierung einer Wurzel.

Lehrsatz 13. **Eine Wurzel wird mit einer Zahl potenziert, indem man den Radikanden der Wurzel mit dieser Zahl potenziert und die so erhaltene Potenz durch den Wurzelexponenten radiziert.**

Man beachte den Zusatz 4, Seite 201, und die Erkl. 40.

Erkl. 40. Ist der Wurzelexponent m eine gerade und der Radikand a eine negative Zahl, so darf die in dem Lehrsatz 13 ausgesprochene Potenzierung nicht ausgeführt werden, weil in diesem Fall die zu potenzierende Wurzel eine imaginäre Grösse vorstellt und als solche anderen Betrachtungen unterzogen werden muss. — Man siehe den Abschnitt: Die imaginären Wurzeln.

Behaupt. $(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$

Beweis. Der Beweis ist in dem Zusatz 1 des Lehrsatzes 11 enthalten, kann aber auch direkt wie folgt geführt werden.

Setzt man $\sqrt[m]{a}$ gleich der noch zu bestimmenden Grösse x, also ist:

a). $(\sqrt[m]{a})^n = x^n$ oder:

b). $\sqrt[m]{a} = x$

so hat man nach der in Antwort der Frage 14 gegebenen Definition diese Grösse x so zu bestimmen, dass:

c). $x^m = a$ ist.

Da nun aus der Gleichung c). sich ergibt, dass auch:

$$(x^m)^n = a^n \text{ oder:}$$

$$(x^n)^m = a^n, \text{ mithin auch}$$

d). $x^n = \sqrt[m]{a^n}$ sein muss, so folgt aus den Gleichungen d). und a). vorstehende Behauptung:

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n} \text{ (siehe die Erkl. 40)}$$

Aufgabe 17. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Potenzierungen nach dem vorstehenden Lehrsatz 13 ausführen, dabei aber nach Zusatz 4, Seite 201, nur die absoluten Wurzelwerte berücksichtigen.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $(\sqrt[3]{a})^2 =$	$\sqrt[3]{a^2}$	man beachte den Lehrsatz 13.
2). $(\sqrt{a})^7 = \sqrt{a^7} = \sqrt{a^6 . a} = \sqrt{a^6} . \sqrt{a}$	$= a^3\sqrt{a}$	man beachte zuerst den Lehrsatz 13 und dann zerlege man den Radikanden.
3). $(a\sqrt{a})^3 = a^3 . (\sqrt{a})^3 = a^3 . \sqrt{a^3} = a^3 . \sqrt{a^2 . a}$ $= a^3 . \sqrt{a^2} . \sqrt{a} = a^3 . a . \sqrt{a}$	$= a^4\sqrt{a}$	
4). $\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{m}}\right)^4 = \sqrt[3]{\left(\sqrt[4]{m}\right)^4}$	$= \sqrt[3]{m}$	man beachte zuerst den Lehrs. 13, dann den Lehrs. 4.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
5). $(\sqrt[5]{m})^3 =$	 ?	 analog dem gelösten Beispiel 1.
6). $(\sqrt[3]{2})^2 =$	 ?	
7). $(\sqrt[4]{m})^6 =$	 ?	 „ „ „ „ 2.
8). $(\sqrt[3]{2})^4 =$	 ?	
9). $(5\sqrt{a})^3 =$	 ?	 „ „ „ „ 3.
10). $(x\sqrt{x})^4 =$	 ?	
11). $(2\sqrt{5})^7 =$	 ?	
12). $(\sqrt[15]{a^2b^{-4}c^3})^7 =$	 ?	
13). $\left(\sqrt{\frac{3x^{-3}}{7z^{-7}}}\right)^3 =$	 ?	
14). $((a-b).\sqrt{a-b})^3 =$	 ?	
15). $(\sqrt[3]{\sqrt{m-n}})^2 =$	 ?	 „ „ „ „ 4.
16). $\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{8a^3}}\right)^5 =$	 ?	
17). $\left(\sqrt{\sqrt[9]{1\frac{9}{16}}}\right)^9 =$	 ?	
18). $\left(\sqrt[x]{\sqrt[y]{\frac{a^x b^x}{m^x n^x}}}\right)^y =$	 ?	

10). Ueber das Unverändertbleiben einer Wurzel.

Lehrsatz 14. **Der Wert einer Wurzel, deren Radikand eine Potenz ist, bleibt unverändert, wenn man den Potenz- und den Wurzelexponenten**

a). mit ein und derselben Zahl multipliziert oder

b). mit ein und derselben Zahl dividiert, letzteres aber nur, wenn die gedachte Zahl in beiden Exponenten ohne Rest enthalten ist (siehe die Erkl. 41).

Man beachte auch die Erkl. 42 und 43 und den Zusatz 4, Seite 201.

Behaupt. 1). $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m.c]{a^{n.c}}$

2). $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[\frac{m}{c}]{a^{\frac{n}{c}}}$

Beweis. 1). Setzt man: $\sqrt[m]{a^n}$ gleich der noch zu bestimmenden Grösse x, also ist:

Erkl. 41. Da der 2. Teil des Lehrsatzes 11 nur dann zunächst Gültigkeit hat, wenn der Wurzelexponent in dem Potenzexponent ohne Rest aufgeht, so hat auch die in nebenstehendem Beweise 2). aufgestellte Gleichung c).:

$$x^{\frac{m}{c}} = a^{\frac{n}{c}}$$

nur dann Gültigkeit, wenn die Zahl c sowohl in die Zahl m, als auch in die Zahl n ohne Rest aufgeht. Und dies ist der Grund, weshalb der 2. Teil des Lehrsatzes 14 zunächst nur dann Gültigkeit hat, wenn die Zahl mit welcher der Wurzel- und der Potenzexponent **dividiert** werden sollen, in beiden ohne Rest enthalten ist.

Erkl. 42. Vorstehender Lehrsatz 14 hat **keine** Gültigkeit mehr, wenn der Radikand negativ und der Wurzelexponent eine gerade Zahl ist, also der gegebene Wurzelausdruck eine **imaginäre** Grösse vorstellt.

Denn hat man z. B.:

$\sqrt{-x^2}$, so ist die somit angedeutete Radizierung nach dem Lehrsatz 3 unmöglich.

Wollte man nun nach vorsteh. Lehrsatz 14, z. B.:

$$\sqrt{-x^2} = \sqrt[2.2]{(-x^2)^{1\cdot 2}} \text{ setzen,}$$

so würde man erhalten:

$$\sqrt{-x^2} = \sqrt[4]{(-x^2)^2} = \sqrt[4]{x^4} = \pm x$$

was nicht möglich ist, da man nach dem Lehrsatz 3 weiss, dass $\sqrt{-x^2}$ keine angebbare Grösse darstellt.

Erkl. 43. Vorstehender Lehrsatz 14 ist ferner nur dann richtig, wenn man auf die Anzahl der Wurzelwerte (siehe die Lehrsätze 1—3) **keine Rücksicht** nimmt und **nur die positiven Wurzelwerte** betrachtet. Deshalb ist bei Benutzung dieses Lehrsatzes grösste Vorsicht anzuempfehlen.

z. B.:

$\sqrt{a^2}$ enthält 2 Werte, nämlich $+a$ und $-a$.

Setzt man nun nach vorstehendem Lehrsatz:

$$\sqrt{a^2} = \sqrt[2.2]{a^{2\cdot 2}} = \sqrt[4]{a^4}$$

so erhält man nach der Erkl. 27, Seite 187, für: $\sqrt[4]{a^4}$ **vier** verschiedene Werte (nämlich noch 2 imaginäre Werte, was später gezeigt wird). Es kann also unmöglich:

$\sqrt{a^2} = \sqrt[4]{a^4}$ sein, sobald man die Anzahl der Wurzelwerte berücksichtigt.

a). $\sqrt[m]{a^n} = x$

so hat man nach der in Antwort der Frage 14 gegebenen Definition diese Grösse x so zu bestimmen, dass :

b). $x^m = a^n$ ist.

Da nun:

$$(x^m)^c = (a^n)^c \text{ oder:}$$

$$x^{m.c} = a^{n.c} \text{ mithin auch:}$$

$$\sqrt[m.c]{x^{m.c}} = \sqrt[m.c]{a^{n.c}} \text{ ist,}$$

so folgt nach dem Lehrsatz 5 aus dieser Gleichung, dass:

c). $x = \sqrt[m.c]{a^{n.c}}$ ist.

Aus den Gleichungen a). und c). folgt aber vorstehende Behauptung 1:

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m.c]{a^{m.c}}$$

Beweis. 2). Setzt man: $\sqrt[m]{a^n}$ gleich der noch zu bestimmenden Grösse x, also ist:

a). $\sqrt[m]{a^n} = x$

so hat man nach der in Antwort der Frage 14 gegebenen Definition diese Grösse x so zu bestimmen, dass:

b). $x^m = a^n$ ist.

Da nun:

$$\sqrt[c]{x^m} = \sqrt[c]{a^n}$$

mithin auch nach dem 2ten Teil des Lehrsatzes 11:

c). $x^{\frac{m}{c}} = a^{\frac{n}{c}}$ (siehe Erkl. 41) ist,

so ergibt sich hieraus, sobald der Quotient: $\frac{m}{c}$ eine **ganze Zahl** vorstellt:

$$\sqrt[\frac{m}{c}]{x^{\frac{m}{c}}} = \sqrt[\frac{m}{c}]{a^{\frac{n}{c}}}$$

oder nach dem Lehrsatz 5:

d). $x = \sqrt[\frac{m}{c}]{a^{\frac{n}{c}}}$

Aus den Gleichungen a). und d). folgt somit vorstehende Behauptung 2).:

Ebenso darf man, wenn auch nur die Vorzeichen der Wurzelwerte (siehe die Lehrsätze 1 und 2) berücksichtigt werden sollen, z. B. nicht setzen:

$$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[6]{a^6}$$

denn: $\sqrt[6]{a^6}$ ergibt die 2 Werte $\pm a$, während $\sqrt[3]{a^3}$ nur den Wert $+a$ ergibt.

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[\frac{m}{c}]{a^{\frac{m}{c}}}$$

Zusatz 1. Mittelst des 1. Teils des vorstehenden Lehrsatzes 14 ist es möglich, ungleichnamige Wurzeln in **gleichnamige** zu verwandeln, was bei der Multiplikation und Division von Wurzeln von besonderem Wert ist.

Man siehe nebenstehendes Beispiel, die Beispiele in der Aufgabe 18 und die Abschnitte, welche über die Multiplikation und Division von Wurzeln handeln.

Beispiel.

Soll man z. B. die ungleichnamigen Wurzeln:

$$\sqrt[3]{a} \text{ und } \sqrt[4]{a}$$

in **gleichnamige**, also in solche mit gleichen Wurzelexponenten verwandeln, so suche man zunächst den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten, den sogenannten **Generalwurzelexponenten**, das ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zwischen beiden Wurzelexponenten, welches hier $= 12$ ist; dann wende man auf die gegebenen Wurzeln den 1. Teil des Lehrsatzes 14 an, indem man die Exponenten der Radikanden und die Wurzelexponenten, bezw. mit den Quotienten multipliziert, welche man erhält, wenn man den **Generalwurzelexponenten** durch jeden der gegebenen Wurzelexponenten dividiert:

Hiernach erhält man:

1). $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^1} = \sqrt[3.4]{a^{1\cdot 4}} = \sqrt[12]{a^4}$ und

2). $\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{a^1} = \sqrt[4.3]{a^{1\cdot 3}} = \sqrt[12]{a^3}$

nämlich 2 Wurzeln: $\sqrt[12]{a^4}$ und $\sqrt[12]{a^3}$ mit gleichen Wurzelexponenten.

Zusatz 2. Mittelst des 2. Teils des vorstehenden Lehrsatzes 14 ist es möglich Wurzeln, deren Radikanden Potenzen mit solchen Exponenten sind, die mit den Wurzelexponenten einen (oder mehrere) **gemeinschaftlichen Faktor** haben, vereinfachen (reduzieren) zu können.

Man siehe nebenstehendes Beispiel und die Uebungsbeispiele in der Aufgabe 19.

Beispiel.

Hat man z. B.: $\sqrt[6]{a^4}$, so kann man hierfür nach dem 2. Teil des Lehrsatzes 14 schreiben:

$$\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[\frac{6}{2}]{a^{\frac{4}{2}}} = \sqrt[3]{a^2}$$

Zusatz 3. Aus vorstehendem Zusatz 2 ergibt sich in Betreff der Radizierung von Potenzen der weitere Satz:

„Hat man eine Potenz zu radizieren und ist der Potenzexponent ein Vielfaches des Wurzelexponenten, so dividiert man den Potenzexponenten in den Wurzelexponenten und radiziert mit dem erhaltenen Quotienten die Basis der Potenz.“

Man siehe nebenstehendes Beispiel.

Beispiel.

Hat man z. B.: $\sqrt[6]{a^2}$, so kann man hierfür nach dem 2. Teil des Lehrsatzes 14 schreiben:

$$\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[\frac{6}{2}]{a^{\frac{2}{2}}} = \sqrt[3]{a^1} = \sqrt[3]{a}$$

Aufgabe 18. Man soll die in jedem der nachstehenden Uebungsbeispiele gegebenen Wurzeln mittelst des Lehrs. 14, bezw. mittelst dessem Zusatz 1, **gleichnamig** machen, dabei, in Rücksicht der Erkl. 43, die Radikanden nur als absolute Grössen betrachten.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $\sqrt[5]{a^3} = \sqrt[5.8]{a^{3.8}} = \ldots\ldots$ $\sqrt[8]{a^9} = \sqrt[8.5]{a^{9.5}} = \ldots\ldots$	$\sqrt[40]{a^{24}}$ $\sqrt[40]{a^{45}}$	 man beachte den vorstehenden Zusatz 1.
2). $\sqrt[7]{a} =$ $\sqrt[2]{a^3} =$	?	
3). $\sqrt[7]{a^4} =$ $\sqrt[x]{a^6} =$	?	
4). $\sqrt[5]{a^3} =$ $\sqrt[8]{b^9} =$	?	
5). $\sqrt[x]{a} =$ $\sqrt[y]{b} =$ $\sqrt[m]{c^2} =$	?	
6). $\sqrt[x]{a^y} =$ $\sqrt[ny]{a^{px}} =$ $\sqrt[xy]{a^{mp}} =$	?	
7). $\sqrt[mnx]{a^3} =$ $\sqrt[x]{m} =$	?	

Aufgabe 19. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen Wurzelausdrücke mittelst des Lehrs. 14, bezw. mittelst dessen Zusätzen 2 und 3 auf **einfachere Formen** bringen, dabei, in Rücksicht der Erkl. 43, die Radikanden nur als absolute Grössen betrachten.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $\sqrt[9]{a^{12}} = \sqrt[9:3]{a^{12:3}} = \dots\dots$	$\sqrt[3]{a^4}$	 man beachte den vorstehenden Zusatz 2.
2). $\sqrt[6]{m^9} = \dots\dots\dots\dots$	?	
3). $\sqrt[4]{a^6} = \dots\dots\dots\dots$	?	
4). $\sqrt[6]{x^3} = \dots\dots\dots\dots$	?	
5). $\sqrt[4]{m^2} = \dots\dots\dots\dots$	?	
6). $\sqrt[4]{(a+b)^{10}} = \dots\dots\dots$	?	
7). $\sqrt[20]{\left(\frac{m}{n}\right)^5} = \dots\dots\dots$	?	
8). $\sqrt[3n]{x^3} = \dots\dots\dots\dots$	?	
9). $\sqrt[4n]{a^{2n}} = \dots\dots\dots\dots$	?	
10). $\sqrt[xy]{(a-b)^x} = \dots\dots\dots$	?	
11). $\sqrt[mnx]{a^{nxr}} = \dots\dots\dots$	?	
12). $\sqrt[8xxy]{m^{16x}} = \dots\dots\dots$	?	
13). $\sqrt[112]{(a^2)^7} = \dots\dots\dots$	?	
14). $\sqrt[360]{((a^3)^4)^5} = \dots\dots\dots$	?	
15). $\sqrt[ax+bx]{m^{a+b}} = \dots\dots\dots$	?	 im Wurzelexponenten scheide man zuerst den Faktor x aus.
16). $\sqrt[nx-mx]{a^{n-m}} = \dots\dots\dots$	?	
17). $\sqrt[9a^2-49b^2]{x^{3a-7b}} = \dots\dots\dots$	?	 man beachte, dass der Wurzelexponent die Differenz zweier Quadrate vorstellt.
18). $\sqrt[12a^2+61ab+77b^2]{a^{4a+11b}} = \dots\dots\dots$	?	 da man aus dem Potenzexponenten keinen Faktor ausscheiden kann, so untersuche man mittelst Partialdivision, ob nicht der ganze Potenzexponent in dem Wurzelexponenten enthalten ist.

11). Ueber die Addition und Subtraktion von Wurzeln.

Lehrsatz 15. Wurzeln (Wurzelausdrücke) kann man nur addieren oder subtrahieren, wenn sie **gleich** — d. h. wenn sowohl ihre Radikanden, als auch ihre Wurzelexponenten je unter sich gleich sind — und werden addiert oder subtrahiert, indem man nach den algebraischen Regeln ihre Koeffizienten addiert oder subtrahiert und dem sich hieraus ergebenden Resultate die betr. Wurzel als Faktor beischreibt.

Im übrigen sind die auf Seite 13 und 14 in den Erklärungen 25—31 gegebenen Regeln und der Zusatz 3, Seite 200, zu beachten.

Vorauss. Gegeben sei z. B.:

$$2\sqrt[3]{m} + 5\sqrt[3]{m} - 6\sqrt[3]{m}$$

Behaupt.

$$2\sqrt[3]{m} + 5\sqrt[3]{m} - 6\sqrt[3]{m} =$$

$$(4 + 5 - 6) \cdot \sqrt[3]{m} = 3\sqrt[3]{m}$$

Beweis. Setzt man:

$$\sqrt[3]{m} = x$$

so geht der gegebene Ausdruck über, in:

$$4x + 5x - 6x$$

für welchen man nach den algebraischen Additionsregeln

$$= (4 + 5 - 6)\,x \quad \text{oder} \quad = 3x$$

setzen kann.

Substituiert man hierin für x wieder den Wert: $\sqrt[3]{m}$, so erhält man obige Behauptung.

Für jeden anderen gegebenen Ausdruck kann man den Beweis auf analoge Weise führen.

Im übrigen siehe man den Zusatz 1.

Zusatz 1. **Ungleiche** Wurzeln (Wurzelausdrücke), welche zu addieren oder zu subtrahieren sind, kann man nur in Additions- oder Subtraktionsform nebeneinanderschreiben.

So kann man z. B. die in dem Ausdruck:

$$2\sqrt[3]{m} + 5\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[2]{x}$$

angedeutete Addition nicht ausführen und nur in dieser Form wiedergeben.

Aufgabe 20. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Additionen und Subtraktionen von Wurzeln ausführen.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $3\sqrt{a^m} - 7\sqrt{a^m} + 14\sqrt{a^m}$	$= (3 - 7 + 14) . \sqrt{a^m} = 10\sqrt{a^m}$	man beachte den Lehrsatz 15.
2). $2\sqrt[m]{a-b} - 10\sqrt[m]{a-b} - 17\sqrt[m]{a-b}$	$= (2 - 10 - 17)\sqrt[m]{a-b}$ $= -25\sqrt[m]{a-b}$	
3). $5\sqrt{x} - \sqrt{x}$	$= (5-1)\sqrt{x} = 4\sqrt{x}$	man beachte, dass $-\sqrt{x}$ den Koeffizienten -1 hat.
4). $a\sqrt[3]{m} - b\sqrt[3]{m}$	= $(a-b)\sqrt[3]{m}$	die Addition der Koeffizienten: a und $-b$ kann man nicht weiter ausführen, da dieselben **ungleiche** Buchstaben sind.
5). $\sqrt[x]{a} - 3\sqrt[x]{a} + m\sqrt[x]{a} - \sqrt[x]{a}$	$= (1 - 3 + m - 1) . \sqrt[x]{a}$ $= (m-3) . \sqrt[x]{a}$	
6). $2\sqrt{a} - 3\sqrt{b}$	= $2\sqrt{a} - 3\sqrt{b}$. . .	man beachte den vorstehenden Zusatz 1.
7). $3\sqrt{3} - 2\sqrt[3]{2} + 7\sqrt[3]{2} - 6\sqrt{3}$	$= (3-6)\sqrt{3} + (7-2)\sqrt[3]{2}$ $= -3\sqrt{3} + 5\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2} - 3\sqrt{3}$. .	man führe die angedeutete Addition mit den gleichen Wurzeln aus.
8). $3\sqrt{3} - (2\sqrt[3]{2} - 4\sqrt{3}) - (-5\sqrt{3} + 4\sqrt[3]{2})$	$= 3\sqrt{3} - 2\sqrt[3]{2} + 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 4\sqrt[3]{2}$ $= 12\sqrt{3} - 6\sqrt[3]{2}$. . .	man beachte die Erkl. 31, Seite 14.

9). $8\sqrt{8} - 3\sqrt{8}$ = ... ?

10). $9 . \sqrt{10} - \sqrt{10}$ = ... ?

11). $\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[3]{a}$ = ... ?

12). $3\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{x} + 10\sqrt[m]{x} + \sqrt[m]{x}$ = . . ?

13). $a\sqrt[3]{m} - b\sqrt[3]{m} + c\sqrt[3]{m}$ = ... ?

14). $3\sqrt{a} - \sqrt{b}$ = ... ?

15). $\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$ = ... ?

16). $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} - 3\sqrt{a} - 2\sqrt{b}$ = . . ?

17). $2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x} + 5\sqrt{x}$ = . . ?

18). $3\sqrt[4]{m} - 7\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{m} - 4\sqrt[4]{m} - \sqrt[3]{m}$ = ?

19). $3a\sqrt[7]{x^2} + 5a\sqrt[7]{x^2} - a\sqrt[7]{x^2}$ = . . . ?

20). $\sqrt{a} - (3\sqrt{a} - 6\sqrt{a}) - (\sqrt{a} - 7\sqrt{a})$ = ?

21). $(8\sqrt[m]{a} - 12\sqrt[m]{b}) - (7\sqrt[m]{b} - 3\sqrt[m]{a}) - (\sqrt[m]{a} - \sqrt[m]{b})$ = ?

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

22). $\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{50} = \sqrt{9.2}+\sqrt{16.2}-\sqrt{25.2}$. .

$= \sqrt{3^2}.\sqrt{2}+\sqrt{4^2}.\sqrt{2}-\sqrt{5^2}.\sqrt{2}$

$= 3\sqrt{2}+4\sqrt{2}-5\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

man beachte, dass die gegeb. Wurzeln keine **gleichen** Wurzeln sind, mithin nicht addiert werden können. Mit Hülfe des Zusatzes 3, Seite 200, kann man jedoch **gleiche** Wurzeln herstellen und somit die angedeutete Addition ausführen.

23). $5\sqrt{48}+4\sqrt{147}-2\sqrt{3}-5\sqrt{432}$

$= 5\sqrt{16.3}+4\sqrt{49.3}-2\sqrt{3}-5\sqrt{144.3}$

$= 5.\sqrt{4^2}.\sqrt{3}+4\sqrt{7^2}.\sqrt{3}-2\sqrt{3}-5\sqrt{12^2}.\sqrt{3}$

$= 5.4.\sqrt{3}+4.7.\sqrt{3}-2\sqrt{3}-5.12\sqrt{3}$

$= 20\sqrt{3}+28\sqrt{3}-2\sqrt{3}-60\sqrt{3} = -14\sqrt{3}$

24). $5\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{54}+8\sqrt[3]{3}-10\sqrt[3]{24}$

$= 5\sqrt[3]{8.2}-2\sqrt[3]{27.2}-8\sqrt[3]{3}-10\sqrt[3]{8.3}$

$= 5.\sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{3^3}.\sqrt[3]{2}-8\sqrt[3]{3}-10\sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{3}$

$= 5.2.\sqrt[3]{2}-2.3.\sqrt[3]{2}-8\sqrt[3]{3}-10.2.\sqrt[3]{3}$

$= 10\sqrt[3]{2}-6\sqrt[3]{2}-8\sqrt[3]{3}-20\sqrt[3]{3} = 4\sqrt[3]{2}-28\sqrt[3]{3}$. . . hier kann man noch den gemeinschaftl. Faktor 4 ausscheiden.

$= 4(\sqrt[3]{2}-7\sqrt[3]{3})$

25). $\sqrt{4a^3b}+\sqrt{25ab^3}-7\sqrt{ab}$

$= \sqrt{2^2.a^2.a.b}+\sqrt{5^2.a.b^2.b}-7\sqrt{ab}$ man benutze zuerst den Lehrsatz 9.

$= 2a\sqrt{ab}+5b\sqrt{ab}-7\sqrt{ab}$

$= (2a+5b-7)\sqrt{ab}$

26). $\sqrt[3]{16a^4b^4c}-\sqrt[3]{54ab^4c^4}+\sqrt[3]{250a^4bc^4}$

$= \sqrt[3]{8.2.a^3.a.b^3.b\ c}-\sqrt[3]{27.2.a.b^3.b.c^3.c}+\sqrt[3]{125.2.a^3.a.b.c^3.c}$

$= 2ab\sqrt[3]{2abc}-3bc\sqrt[3]{2abc}+5ac\sqrt[3]{2abc}$

$= (2ab-3bc+5ac)\sqrt[3]{2abc}$

27). $6a\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}-4b\sqrt[3]{\frac{y^2z^3}{x}}+3c\sqrt[3]{\frac{y^8}{x^7}}$ man beachte zuerst den Zusatz 2, S. 203, dann benutze man die Lehrsätze 9, 10 u. 11 und schliesslich addiere man die erhaltenen Wurzeln.

$$= 6a\sqrt[3]{\frac{x^2.y^2}{y^3}}-4b\sqrt[3]{\frac{y^2.z^3.x^2}{x^3}}+3c\sqrt[3]{\frac{y^6.y^2.x^2}{x^9}}$$

$$= 6a\frac{\sqrt[3]{x^2y^2}}{y}-4b\cdot z\frac{\sqrt[3]{x^2y^2}}{x}+3cy^2\frac{\sqrt[3]{x^2y^2}}{x^3}$$

$$= \frac{6a}{y}\sqrt[3]{x^2y^2}-\frac{4bz}{x}\sqrt[3]{x^2y^2}+\frac{3cy^2}{x^3}\sqrt[3]{x^2y^2} = \left(\frac{6a}{y}-\frac{4bz}{x}+\frac{3cy^2}{x^3}\right)\cdot\sqrt[3]{x^2y^2}$$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

28). $\frac{x+y}{x-y}\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}-\frac{x-y}{x+y}\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$

$$=\frac{x+y}{x-y}\sqrt{\frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2}}-\frac{x-y}{x+y}\sqrt{\frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^2}}$$

$$=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x+y}-\frac{x-y}{x+y}\cdot\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x-y}$$

$$=\frac{1}{x-y}\sqrt{x^2-y^2}-\frac{1}{x+y}\sqrt{x^2-y^2}$$

$$=\left(\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}\right)\sqrt{x^2-y^2}\ .\ .$$

den Klammerwert kann man noch vereinfachen, wenn man die Quotienten unter gleiche Benennung bringt.

29). $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{48}-\sqrt{75}=\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ?$

30). $2\sqrt{175}+4\sqrt{7}-6\sqrt{28}+10\sqrt{63}-3\sqrt{112}=\ .\ ?$

31). $\sqrt{20}+\sqrt{125}-\sqrt{63}-\sqrt{252}-\sqrt{700}+\sqrt{567}-\sqrt{605}=?$

32). $3\frac{1}{2}\sqrt{24}-5\frac{3}{4}\sqrt{54}+13\frac{1}{3}\sqrt{99}=\ .\ .\ .\ .\ .\ ?$

33). $4\sqrt[3]{24}-6\sqrt[3]{81}+10\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{375}+15\sqrt[3]{8}=\ .\ ?$

34). $5\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{54}-6\sqrt[3]{128}+2\sqrt[3]{375}+2\sqrt[3]{432}=\ ?$

35). $12\sqrt{\frac{5}{9}}-8\sqrt{45}-\frac{7}{3}\sqrt{125}+7\sqrt{\frac{9}{5}}=\ ?$

36). $\sqrt[3]{\frac{4}{144}}+\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{3}{4}}+\frac{1}{9}\sqrt[3]{6}=\ .\ .\ ?$

37). $6\sqrt[3]{a^3b}-2\sqrt[3]{a^3bc^3}+3\sqrt[3]{b}=\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ?$

38). $3\sqrt{4a^3b}+7a\sqrt{ab}-3\sqrt{a}+5a\sqrt{\frac{1}{a}}=\ .\ ?$

39). $\frac{1}{n}\sqrt{m^3nc^2}-\frac{b}{nc}\sqrt{4mn^3c^2}+\sqrt{9m^3n^3}=\ .\ ?$

40). $a\sqrt[5]{a^6b^7c^3}-b\sqrt[5]{ab^7c^8}+c\sqrt[5]{a^6b^2c^{13}}=\ .\ .\ ?$

41). $\sqrt{48a^5b^3}-2\sqrt{12a^7b}+6\sqrt{27ab}=\ .\ .\ .\ .\ ?$

42). $(2a-4b)\sqrt{m^2-n^2}-(2a+5b)\sqrt{(m+n)(m-n)}=\ ?$

43). $\sqrt[3]{\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}}-\frac{a-b}{a+b}\sqrt[3]{\frac{a-b}{a+b}}=\ .\ .\ .\ .\ ?$

44). $\sqrt{\frac{a^3m}{b^3}}-\sqrt{\frac{am^5}{b^5}}+\sqrt{\frac{m^3}{ab}}=\ .\ .\ .\ .\ ?$

45). $3\sqrt[12]{\sqrt[5]{7}}+5\sqrt[6]{\sqrt[10]{7}}-\sqrt[3]{\sqrt[20]{7}}-\sqrt[15]{\sqrt[4]{7}}=\ ?$

46). $\sqrt{a-b}+\sqrt{16a-16b}-\sqrt{am^2-bm^2}-\sqrt{25(a-b)}=?$

47). $\sqrt{(a+b)^2x}+\sqrt{(a-b)^2x}-\sqrt{b^2x}-\sqrt{x}=\ .\ .\ ?$

12). Ueber die Multiplikation von Wurzeln.

In Betreff der Multiplikation von Wurzeln kann man, je nachdem die zu multiplizierenden Wurzeln gleich, gleichnamig oder ungleichnamig sind, drei Arten unterscheiden, nämlich:

1). Multiplikation **gleicher** Wurzeln — siehe den Lehrsatz 16 —

2). Multiplikation **gleichnamiger** Wurzeln — siehe den Lehrsatz 17 —

3). Multiplikation **ungleichnamiger** Wurzeln — siehe den Lehrsatz 18. —

Lehrsatz 16. **Gleiche Wurzeln** (d. s. solche, welche gleiche Radikanden und gleiche Wurzelexponenten haben) **werden multipliziert, indem man eine dieser Wurzeln mit der Anzahl der gleichen Wurzeln potenziert und dem so erhaltenen Resultat das Produkt der etwaigen Koeffizienten als Faktor beischreibt**; letzteres wird nach den bekannten algebr. Multiplikationsregeln gebildet.

Man beachte den Zusatz 3, Seite 200.

Vorauss. Gegeben sei z. B.:

$$a\sqrt[m]{n} \,.\, b\sqrt[m]{n} \cdot -c\sqrt[m]{n}$$

Behaupt.

$$a\sqrt[m]{n} \cdot b\sqrt[m]{n} \cdot -c\sqrt[m]{n} = -abc(\sqrt[m]{n})^3$$

Beweis. Da bei einem Produkt die Reihenfolge der Faktoren ohne Einfluss auf das Resultat ist, so kann man

$$a\sqrt[m]{n} \cdot b\sqrt[m]{n} \cdot -c\sqrt[m]{n} =$$

$$a \cdot b \cdot -c \cdot \sqrt[m]{n} \cdot \sqrt[m]{n} \cdot \sqrt[m]{n} \quad \text{oder:}$$

$$= -abc\sqrt[m]{n} \cdot \sqrt[m]{n} \cdot \sqrt[m]{n} \quad \text{setzen.}$$

Nach der Definition einer Potenz und deren Schreibweise kann man ferner

$$\sqrt[m]{n} \cdot \sqrt[m]{n} \cdot \sqrt[m]{n} = (\sqrt[m]{n})^3 \text{ setzen,}$$

mithin erhält man:

$$a\sqrt[m]{n} \cdot b\sqrt[m]{n} \cdot -c\sqrt[m]{n} = -abc(\sqrt[m]{n})^3$$

und dies ist obige Behauptung.

Zusatz 1. Nach vorstehendem Lehrsatz ist die Multiplikation **gleicher** Wurzeln gleichbedeutend mit der Potenzierung von Wurzeln, und sind deshalb hierbei die Sätze zu beachten, welche über die Potenzierung einer Wurzel, bezw. über die Radizierung einer Potenz, aufgestellt wurden.

Man siehe die Uebungsbeispiele in der Aufgabe 21.

Lehrsatz 17. Gleichnamige Wurzeln (d. s. solche, welche gleiche Wurzelexponenten haben) **werden multipliziert, indem man das Produkt der Radikanden bildet, dasselbe durch den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten radiziert und dem so erhaltenen Resultat das Produkt der etwaigen Koeffizienten als Faktor beischreibt.**

Man beachte die Erkl. 44 und den Zusatz 4, Seite 201.

Vorauss. Gegeben sei z. B.:

$$a\sqrt[m]{n}\cdot b\sqrt[m]{r}\cdot - c\sqrt[m]{q}$$

Behaupt.

$$a\sqrt[m]{n}\cdot b\sqrt[m]{r}\cdot - c\sqrt[m]{q} = -abc\sqrt[m]{nrq}$$

Beweis. Da bei einem Produkt die Reihenfolge der Faktoren ohne Einfluss auf das Resultat ist, so kann man auch schreiben:

$$a\sqrt[m]{n}\cdot b\sqrt[m]{r}\cdot - c\sqrt[m]{q} =$$

$$a\cdot \mathrm{b}\cdot - c\cdot\sqrt[m]{n}\cdot\sqrt[m]{r}\cdot\sqrt[m]{q} =$$

$$-abc\cdot\sqrt[m]{n}\cdot\sqrt[m]{r}\cdot\sqrt[m]{q}$$

Erkl. 44. Stellen die zu multiplizierenden Wurzeln imaginäre Grössen dar, sind also die Wurzelexponenten gerade Zahlen und die Radikanden negativ, so hat dieser Lehrsatz keine Gültigkeit. In solchen Fällen beachte man den Zusatz 4, Seite 201, bezw. den Abschnitt 15.

Um nun noch das Produkt der **gleichnamigen** Wurzeln zu bilden, setze man:

a). $\sqrt[m]{n} = x$, wofür man nach der Erkl. 45 setzen kann: $x^m = n$

b). $\sqrt[m]{r} = y$, „ „ „ „ „ „ „ „ $y^m = r$

c). $\sqrt[m]{q} = z$, „ „ „ „ „ „ „ „ $z^m = q$

Durch Multiplikation dieser drei Gleichungen erhält man:

$$x^m\cdot y^m\cdot z^m = nrq \text{ oder:}$$

$$(xyz)^m = nrq$$

woraus sich: $\sqrt[m]{(xyz)^m} = \sqrt[m]{nrq}$ oder:

d). $xyz = \sqrt[m]{nrq}$ ergibt.

Erkl. 45. Nach der Definition der Radizierung deutet der Ausdruck:

$\sqrt[m]{n}$ nichts anderes an, als:

man soll eine Grösse x finden, welche in die m^{te} Potenz erhoben die Grösse n ergibt, in Zeichen:

$$\sqrt[m]{n} = x, \quad \text{d. i.: } x^m = n$$

Setzt man in diese Gleich. d). für x, y und z die Werte aus den Gleichungen a)., b). und c). ein, so erhält man:

$$\sqrt[m]{n}\cdot\sqrt[m]{r}\cdot\sqrt[m]{q} = \sqrt[m]{nrq}$$

und der gegeb. Ausdruck geht über, in:

$$a\sqrt[m]{n}\cdot b\sqrt[m]{r}\cdot - c\sqrt[m]{q} = -abc\sqrt[m]{nrq}$$

Dies ist obige Behauptung.

Der Beweis lässt sich auch dadurch führen, dass man diesen Lehrsatz als eine Umkehrung des Lehrsatzes 9 betrachtet. — Man vergleiche hierüber den Zusatz 1, Seite 200.

Zusatz 1. Bei der Anwendung des vorstehenden Lehrsatzes ist es oft von grossem Vorteil, dass man vor der Multiplikation **gleichnamiger** Wurzeln diese Wurzeln soviel als möglich reduziert, da nach der Multiplikation etwaige Reduktionen sich nicht mehr so leicht erkennen lassen.

Man siehe die Uebungsbeispiele 2—4 in der Aufgabe 21.

Zusatz 2. Oft kommt es vor, dass man einen gegebenen Wurzelausdruck dadurch vereinfachen, **reduzieren**, kann, indem man etwaige Faktoren (Koeffizienten), die bei demselben stehen, unter das betreffende Wurzelzeichen bringt. Dies geschieht dadurch, dass man nach dem Zusatz 1, Seite 192, den betreffenden Faktor als eine Wurzel mit dem Wurzelexponenten schreibt, welchen die dabeistehende Wurzel hat.

Man siehe nebenstehendes Beispiel und die Uebungsbeispiele in der Aufgabe 24.

Beispiel.

Hat man z. B.: $x\sqrt{\frac{1}{x}}$

und man setzt nach dem Zusatz 1, Seite 192:

$$x = \sqrt{x^2}$$

so erhält man:

$$x\sqrt{\frac{1}{x}} = \sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}}$$

oder nach vorstehendem Lehrsatz 17:

$$x\sqrt{\frac{1}{x}} = \sqrt{x^2\cdot\frac{1}{x}}$$

woraus sich

$$x\sqrt{\frac{1}{x}} = \sqrt{x} \text{ ergibt.}$$

Lehrsatz 18. Ungleichnamige Wurzeln (d. s. solche, welche keine gleichen Wurzelexponenten haben), werden multipliziert, indem man sie nach dem Zusatz 1, Seite 217, gleichnamig macht und dann nach dem Lehrsatz 17 verfährt.

Man beachte den Zusatz 4, Seite 209, und die Erkl. 46.

Vorauss. Gegeben sei z. B.:

$$\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[p]{c}$$

Behaupt.

$$\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[p]{c} = \sqrt[mnp]{a^{np}b^{mp}c^{mn}}$$

Beweis. Nach dem Zusatz 1, S. 217, erhält man:

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m\,.\,np]{a^{np}} = \sqrt[mnp]{a^{np}}$$

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n\,.\,mp]{b^{mp}} = \sqrt[mnp]{b^{mp}}$$

$$\sqrt[p]{c} = \sqrt[p\,.\,mn]{c^{mn}} = \sqrt[mnp]{c^{mn}}$$

mithin ist:

$$\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[p]{c} = \sqrt[mnp]{a^{np}}\cdot\sqrt[mnp]{b^{mp}}\cdot\sqrt[mnp]{c^{mn}}$$

oder:

Erkl. 46. Stellen die zu multiplizierenden Wurzeln **imaginäre Grössen** dar, sind also die Exponenten gerade Zahlen und die Radikanden negativ, so hat dieser Lehrsatz keine Gültigkeit mehr. In solchen Fällen beachte man den Zusatz 4, Seite 201, bezw. den Abschnitt 15

$$\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[p]{c} = \sqrt[mnp]{a^{np}b^{mp}c^{mn}}$$

Aufgabe 21. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Multiplikationen mit Hülfe des Lehrsatzes 16 und nach den bekannten algebraischen Multiplikationsregeln ausführen, dabei beachte man den Zusatz 4, Seite 201.

Uebungsbeispiele: Resultate: Andeutungen:

1). $\sqrt[3]{3}\cdot 7\sqrt[3]{3}\cdot -10\sqrt[3]{3} = 1\cdot 7\cdot -10\cdot(\sqrt[3]{3})^3$
$= -70.3 = -210$. . . man beachte den Lehrsatz 16.

2). $\sqrt{3}.\sqrt{12} = \sqrt{3}.\sqrt{4.3} = \sqrt{3}.2\sqrt{3} = 2(\sqrt{3})^2$. . man beachte zuerst den Zusatz 2, S. 200.
$= 2.3 = 6$

3). $\sqrt{5m}.\sqrt{m} = \sqrt{5}.\sqrt{m}.\sqrt{m} = \sqrt{5}.(\sqrt{m})^2 = m\sqrt{5}$ „ „ „ „ Lehrsatz 9.

4). $2\sqrt{12}.3\sqrt{27} = 2\sqrt{4.3}.3\sqrt{9.3} = 2.2\sqrt{3}.3.3\sqrt{3}$
$= 4\sqrt{3}.9\sqrt{3} = 36(\sqrt{3})^2 = 36.3 = 108$

5). $\sqrt[4]{m}.\sqrt[4]{m}.\sqrt[4]{m}.\sqrt[4]{m} =$? analog dem gelösten Beispiel 1.

6). $2\sqrt[3]{a}.5\sqrt[3]{a}\cdot -7\sqrt[3]{a} =$?

7). $\sqrt{x}.3\sqrt{x} =$?

8). $\sqrt[3]{2m}.\sqrt[3]{m}.\sqrt[3]{m} =$? „ „ „ „ 3.

9). $\sqrt{5x}.\sqrt{x} =$?

10). $\sqrt{a}.\sqrt{16a} =$?

11). $\sqrt{2}.\sqrt{50} =$? „ „ „ „ 4.

12). $\sqrt{7}.2\sqrt{28} =$?

13). $\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot -\sqrt[3]{54} =$?

14). $\sqrt[3]{27d}\cdot -2\sqrt[3]{8d}\cdot 7\sqrt[3]{64d} =$. . . ?

Aufgabe 22. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Multiplikationen mit Hülfe des Lehrsatzes 17 und nach den bekannten algebr. Multiplikationsregeln ausführen, dabei den Zusatz 4, Seite 201.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{3.6}=\sqrt{18}=\sqrt{9.2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

man benutze den Lehrsatz 17 und reduziere das somit erhaltene Resultat.

2). $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{9.3}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$

3). $4\sqrt{2}\cdot3\sqrt{8}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{5}{16}\sqrt{2}=4\cdot3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{16}\cdot\sqrt{2.8.2.2}$

$$=\frac{15}{8}\cdot\sqrt[3]{2^6}=\frac{15}{8}\cdot2^3=15$$

man multipliziere die den neuen Radikanden bildenden Zahlen nicht aus, sondern versuche Potenzen herzustellen, da sich dieselben leicht radizieren lassen.

4). $2\sqrt{12}\cdot3\sqrt{24}=2.3\sqrt{12.24}\ \ldots\ldots\ldots$

$$=6\sqrt{4.3.4.3.2}=6\sqrt{4^2.3^2.2}$$

$$=6.4.3\sqrt{2}=72\sqrt{2}$$

durch Zerlegung des Radikanden in Faktoren erhält man Potenzen, aus welchen man die Wurzel ziehen kann.

5). $4\sqrt{6}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot5\sqrt{1\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{5}}=4\cdot\frac{2}{3}\cdot5\cdot\frac{1}{8}\cdot\sqrt{6.2.1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}$

$$=\frac{5}{3}\cdot\sqrt{\frac{6.2.3.1}{2.5}}=\frac{5}{3}\sqrt{\frac{18}{5}}\ \ldots\ldots\ldots$$

$$=\frac{5}{3}\sqrt{\frac{9.2.5}{5.5}}=\frac{5}{3}\sqrt{\frac{3^2.10}{5^2}}=\frac{5.3}{3.5}\sqrt{10}=\sqrt{10}$$

um aus dem Nenner des Bruches die Wurzel ziehen zu können, mache man denselben nach dem Zusatz 2, Seite 203, **rational**, indem man Zähler und Nenner mit 5 multipliziert.

6). $2\sqrt[3]{3}\left(\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}+4\sqrt[3]{\frac{1}{3}}-3\sqrt[3]{3^2}\right)\ \ldots\ldots$

$$=2\sqrt[3]{27}-4\sqrt[3]{3\cdot\frac{8}{3}}+8\sqrt[3]{3.\frac{1}{3}}-6\sqrt[3]{3.3^2}$$

$$=2.3-4.2+8.1-6.3=6-8+8-18=-12$$

man beachte die **Erkl.** 32, Seite 16.

7). $(2\sqrt{30}-3\sqrt{5}+5\sqrt{3})\cdot(\sqrt{8}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\ \ldots\ldots$

$$=2\sqrt{30.8}-3\sqrt{5.8}+5\sqrt{3.8}+2\sqrt{30.3}-3\sqrt{5.3}+5\sqrt{3.3}-$$

$$2\sqrt{30.5}+3\sqrt{5.5}-5\sqrt{3.5}$$

$$=2\sqrt{15.16}-3\sqrt{10.4}+5\sqrt{6.4}+2\sqrt{10.9}-3\sqrt{15}+5\sqrt{3^2}-$$

$$2\sqrt{6.25}+3\sqrt{5^2}-5\sqrt{15}$$

$$=8\sqrt{15}-6\sqrt{10}+10\sqrt{6}+6\sqrt{10}-3\sqrt{15}+15-10\sqrt{6}+15-5\sqrt{15}=30$$

man beachte die Erkl. 33, Seite 16.

8). $(\sqrt{600}-\sqrt{800})\cdot(\sqrt{0,2}-\sqrt{0,01})\ \ldots\ldots\ldots$

$$=\left(\sqrt{600}-\sqrt{800}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{5}}-\sqrt{\frac{1}{100}}\right)$$

$$=\sqrt{600.\frac{1}{5}}-\sqrt{\frac{800.1}{5}}-\sqrt{\frac{600.1}{100}}+\sqrt{800\cdot\frac{1}{100}}$$

$$=\sqrt{120}-\sqrt{160}-\sqrt{6}+\sqrt{8}=\sqrt{4.30}-\sqrt{16.10}-\sqrt{6}+\sqrt{4.2}$$

$$=2\sqrt{30}-4\sqrt{10}-\sqrt{6}+2\sqrt{2}$$

Dezimalbrüche formt man am besten in gewöhnliche Brüche um.

Uebungsbeispiele:	**Resultate:**	**Andeutungen:**

9). $\sqrt[x+1]{a^3bc}\cdot\sqrt[x+1]{a^7b^xc^{13-x}}\cdot\sqrt[x+1]{a^{x-9}b^0c^{2x-13}}$ man benütze zuerst den Lehrs. 17, dann führe man die Multiplikation der Potenzen aus und benutze schliesslich die Lehrsätze 9 u. 5.

$$= \sqrt[x+1]{a^3.a^7.a^{x-9}.b.b^x.b^0.c.c^{13-x}.c^{2x-13}}$$

$$= \sqrt[x+1]{a^{x+1}b^{x+1}c^{x+1}} = \sqrt[x+1]{a^{x+1}}\cdot\sqrt[x+1]{b^{x+1}}\cdot\sqrt[x+1]{c^{x+1}} = abc$$

10). $$\sqrt[x]{\left(\frac{a^{2x}}{a^3}\right)^m}\cdot\sqrt[x]{\left(\frac{a^{5x}}{a^9}\right)^m}\cdot\sqrt[x]{\left(\frac{a^{12}}{a^x}\right)^m} = \sqrt[x]{\left(\frac{a^{2x}}{a^3}\right)^m\cdot\left(\frac{a^{5x}}{a^9}\right)^m\cdot\left(\frac{a^{12}}{a^x}\right)^m}$$

$$= \sqrt[x]{\left(\frac{a^{2x}}{a^3}\cdot\frac{a^{5x}}{a^9}\cdot\frac{a^{12}}{a^x}\right)^m} = \sqrt[x]{\left(\frac{a^{7x}.a^{12}}{a^{12}a^x}\right)^m} = \sqrt[x]{(a^{6x})^m}$$

$$= \sqrt[x]{a^{6mx}} = a^{\frac{6mx}{x}} = a^{6m}$$

11). $$\sqrt[2m]{\sqrt[3n]{x^3}}\cdot\sqrt[6m]{\sqrt[n]{xy^2}}\cdot\sqrt[m]{\sqrt[6n]{xy^4}}\cdot\sqrt[3m]{\sqrt[2n]{x}} = \sqrt[6mn]{x^3}\cdot\sqrt[6mn]{xy^2}\cdot\sqrt[6mn]{xy^4}\cdot\sqrt[6mn]{x}$$

$$= \sqrt[6mn]{x^6y^6} = \sqrt[6mn]{(xy)^6} = \sqrt[mn]{xy}$$

12). $$(a\sqrt{a}+b\sqrt{b})(\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}) = a\sqrt{a^4}+b\sqrt{a^3b}-a\sqrt{ab^3}-b\sqrt{b^4}$$

$$= a.a^2+b\sqrt{a^2.a.b}-a\sqrt{a.b^2.b}-b.b^2$$

$$= a^3+ab\sqrt{ab}-ab\sqrt{ab}-b^3 = a^3-b^3$$

13). $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2-2.\sqrt{3}.\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2$ Anstatt die durch: $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ angedeutete Multiplikation: $(\sqrt{3}-\sqrt{2}).(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ auszuführen, benutze man den Lehrsatz 12, Seite 46.

$$= 3-2\sqrt{6}+2 = 5-2\sqrt{6}$$

14). $$(\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b})^2 = (\sqrt[x]{a})^2+2.\sqrt[x]{a}.\sqrt[x]{b}+(\sqrt[x]{b})^2$$

$$= \sqrt[x]{a^2}+2\sqrt[x]{ab}+\sqrt[x]{b^2}$$

15). $$(3-5\sqrt{3})^2 = 3^2-2.3.5\sqrt{3}+(5\sqrt{3})^2 = 9-30\sqrt{3}+5^2(\sqrt{3})^2$$

$$= 9-30\sqrt{3}+25.3 = 84-30\sqrt{3} = 6(14-5\sqrt{3})$$

16). $$(\sqrt{3-x}-\sqrt{2+x})^2 = (\sqrt{3-x})^2-2.\sqrt{3-x}.\sqrt{2+x}+(\sqrt{2+x})^2$$

$$= 3-x-2.\sqrt{(3-x)(2+x)}+2+x$$

$$= 5-2\sqrt{(3-x)(2+x)}$$

17). $(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})^3 = (\sqrt[3]{3})^3-3(\sqrt[3]{3})^2.\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}.(\sqrt[3]{2})^2-(\sqrt[3]{2})^3$. . analog wie in dem Beispiel 13 benutze man hier den Lehrs. 13, Seite 51.

$$= 3-3\sqrt[3]{3^2}.\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{2^2}-2$$

$$= 3-3\sqrt[3]{18}+3\sqrt[3]{12}-2 = 1-3\sqrt[3]{18}+3\sqrt[3]{12}$$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

18). $(1-2\sqrt{2})^3 = 1^3-3.1^2.2\sqrt{2}+3.1.(2\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^3$

$= 1-6\sqrt{2}+3.2^2.(\sqrt{2})^2-2^3(\sqrt{2})^3$

$= 1-6\sqrt{2}+12.2-8\sqrt{2^3} = 1-6\sqrt{2}+24-8.\sqrt{2^2.2}$

$= 1-6\sqrt{2}+24-16\sqrt{2} = 25-22\sqrt{2}$

19). $(3+\sqrt{2}).(3-\sqrt{2}) = 3^2-(\sqrt{2})^2$ Anstatt die angedeutete Multiplikation auszuführen, benutze man die in dem Lehrsatz 17, Seite 70, aufgestellte Relation: $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

$= 9-2 = 7$

20). $(6\sqrt{7}+3\sqrt{11}).(6\sqrt{7}-3\sqrt{11}) = (6\sqrt{7})^2-(3\sqrt{11})^2 = 6^2(\sqrt{7})^2-3^2(\sqrt{11})^2$

$= 36.7-9.11 = 252-99 = 153$

21). $\left(\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}-\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}+\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}\right)$

$= \left(\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}\right)^2$

$= \frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y} = \frac{(x-y)(x-y)}{(x+y)(x-y)}-\frac{(x+y)(x+y)}{(x-y)(x+y)}$

$= \frac{(x-y)^2-(x+y)^2}{x^2-y^2} = \frac{x^2-2xy+y^2-x^2-2xy-y^2}{x^2-y^2}$

$= \frac{-4xy}{x^2-y^2} = \frac{4xy}{y^2-x^2}$

22). $\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}} = \sqrt{(9+\sqrt{17})(9-\sqrt{17})} = \sqrt{9^2-(\sqrt{17})^2}$

$= \sqrt{81-17} = \sqrt{64} = 8$

23). $\sqrt[m]{2a^2-3\sqrt{b}}\cdot\sqrt[m]{2a^2+3\sqrt{b}} = \sqrt[m]{(2a^2-3\sqrt{b})(2a^2+3\sqrt{b})}$

$= \sqrt[m]{(2a^2)^2-(3\sqrt{b})^2} = \sqrt[m]{4a^4-3^2(\sqrt{b})^2} = \sqrt[m]{4a^4-9b}$

24). $\sqrt[4]{\sqrt{23}-\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{23}+\sqrt{7}}+\sqrt[6]{5\sqrt{2}-7}\cdot\sqrt[6]{5\sqrt{2}+7}$

$= \sqrt[4]{(\sqrt{23}-\sqrt{7})(\sqrt{23}+\sqrt{7})}+\sqrt[6]{(5\sqrt{2}-7)(5\sqrt{2}+7)}$

$= \sqrt[4]{(\sqrt{23})^2-(\sqrt{7})^2}+\sqrt[6]{(5\sqrt{2})^2-7^2}$

$= \sqrt[4]{23-7}+\sqrt[6]{5^2(\sqrt{2})^2-49} = \sqrt[4]{16}+\sqrt[6]{50-49}$

$= \sqrt[2]{\sqrt[2]{16}}+\sqrt[6]{1} = \sqrt[2]{4}+1 = 2+1 = 3$

25). $\sqrt{\underbrace{a+b}_{m}+\underbrace{2\sqrt{ab}}_{n}}\cdot\sqrt{\underbrace{a+b}_{m}-\underbrace{2\sqrt{ab}}_{n}} =$ man fasse in jedem der Radikanden, wie durch die Buchstaben m und n angedeutet ist, 2 Glieder als ein einziges zusammen, damit man wiederum den Lehrsatz 17, Seite 70, anwenden kann.

$\sqrt{(\underbrace{a+b}_{m}+\underbrace{2\sqrt{ab}}_{n})(\underbrace{a+b}_{m}-\underbrace{2\sqrt{ab}}_{n})} =$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

$$= \sqrt{(a+b)^2 - (2\sqrt{ab})^2} = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2 - 2^2(\sqrt{ab})^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab} = \sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \sqrt{(a-b)^2} = a - b$$

26). $\sqrt{ax+a} \cdot \sqrt{ax^2+ax} = \sqrt{a(x+1)} \cdot \sqrt{ax(x+1)}$. . . Ehe man die angedeutete Multiplikation ausführt, scheide man in den Radikanden etwaige Faktoren aus, wodurch die am Schlusse auszuführende Radizierung leichter zu bewerkstelligen ist.

$$= \sqrt{a(x+1) . a . x . (x+1)} = \sqrt{a^2 x (x+1)^2}$$

$$= \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{(x+1)^2} \cdot \sqrt{x} = a(x+1)\sqrt{x}$$

27). $\sqrt{mx - m} \cdot \sqrt{mx^2 - m} = \sqrt{m(x-1)} \cdot \sqrt{m(x^2-1)}$

$$= \sqrt{m(x-1) . m(x^2-1)} = \sqrt{m^2(x-1)(x-1)(x+1)}$$

$$= \sqrt{m^2(x-1)^2(x+1)} = m(x-1)\sqrt{x+1}$$

28). $\sqrt{5} . \sqrt{10} =$? analog dem gelösten Beispiel 1.

29). $\sqrt[3]{2} . \sqrt[3]{4} =$?

30). $2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{27} \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{32} =$. . . ? „ „ „ „ 3.

31). $3\sqrt{30} . 5\sqrt{18} =$?

32). $2\sqrt{16} . 3\sqrt{5} . \sqrt{24} =$?

33). $4\sqrt[3]{16} . 3\sqrt[3]{108} =$?

34). $3\sqrt{5} \cdot -2\sqrt{6} . -4\sqrt{8} =$?

35). $2\sqrt[5]{3^2} \cdot -4\sqrt[5]{3^3} =$?

36). $2\sqrt{15} \cdot \frac{1}{7}\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} =$. . . ?

37). $4\sqrt{8}(3\sqrt{5} - 8\sqrt{7} + 5\sqrt{2}) =$. . ? „ „ „ „ 6.

38). $(2\sqrt{6} - \sqrt{12} - \sqrt{24} + \sqrt{48}) . \sqrt{2} =$?

39). $(2\sqrt{30} - 7\sqrt{9} - 3\sqrt{48} + 3\sqrt{27}) . 4\sqrt{10} =$?

40). $(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{8} - \sqrt{27}) =$. . . ? „ „ „ „ 7.

41). $(2\sqrt{10} + \sqrt{3}) . (\sqrt{10} - 3\sqrt{3}) =$. ?

42). $(\sqrt{3} + 3\sqrt{5} - 5\sqrt{6}) . (7\sqrt{8} - 3\sqrt{5} - \sqrt{3}) =$?

43). $\left(3\sqrt{15} - 7\sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{1\frac{4}{5}} + 2\sqrt{9\frac{4}{5}}\right) =$?

44). $\left(\sqrt{2} - 3\sqrt{8}\right) \cdot \left(2\sqrt{0{,}5} - \frac{1}{3}\sqrt{0{,}125}\right) =$? . . . „ „ „ „ 8.

45). $(0{,}1\sqrt{0{,}01} - 0{,}2\sqrt{0{,}02}) \cdot (0{,}4\sqrt{0{,}04} + 0{,}5\sqrt{0{,}05}) =$?

46). $\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \sqrt{2}\right) =$. . ?

47). $(\sqrt{24} + 2\sqrt{54} - 8\sqrt{96})(2\sqrt{6} - 4\sqrt{24} + 4\sqrt{150}) =$?

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

48). $(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{25})(\sqrt{2}+\sqrt{9}-\sqrt{125}) = ?$

49). $(2\sqrt{5}-2\sqrt{3})\cdot(4\sqrt{3}-\sqrt{5})\cdot(3\sqrt{3}+6\sqrt{5}) = ?$

50). $(3\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{9})\cdot(2\sqrt[3]{6}-4\sqrt[3]{3}) = ?$

51). $(3\sqrt{5}+2\sqrt{6})\cdot(2\sqrt{5}-3\sqrt{6})\cdot(2\sqrt{3}+4\sqrt{5}) = ?$

52). $\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{a^3}\cdot\sqrt[x]{a^{x-4}} = \ldots\ldots ?$ analog dem gelösten Beispiel 9.

53). $\sqrt[x]{a^x b^3}\cdot\sqrt[x]{a^{3x} b^7} = \ldots\ldots ?$

54). $\sqrt[5m]{a^{2mn-3x}}\cdot\sqrt[5m]{a^{5x-8mn}}\cdot\sqrt[5m]{a^{12mn-2x}} = ?$

55). $\sqrt{m}\cdot\sqrt{\frac{1}{m}} = \ldots\ldots ?$

56). $\sqrt[5]{\frac{a+b}{m}}\cdot\sqrt[5]{\frac{(a+b)^3}{m^2}}\cdot\sqrt[5]{m^3(a+b)} = ?$

57). $5\sqrt[3]{(m+3n)^2}\cdot -3\sqrt[3]{(m+3n)} = \ldots ?$

58). $\sqrt[3x+1]{m^{10x+7}}\cdot\sqrt[3x+1]{m^{5x-2}} = \ldots\ldots ?$

59). $\frac{a^{m+2}b^3}{c^{4n-5}}\sqrt[7]{\frac{x^{-10}b^{m-3}}{c^{7-4n}}}\cdot\frac{a^3 b^{2-6m}}{c^5}\cdot\sqrt[7]{\frac{a^{17}b^{-m-4}}{c^{4n}}} = ?$

60). $\sqrt[3]{(4ab^2c)^x}\cdot\sqrt[3]{(2a^2bc^2)^x} = \ldots\ldots ?$ analog dem gelösten Beispiel 10.

61). $\sqrt[6]{\sqrt[8]{x^5y^7z^{-11}}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt[12]{x^{-53}y^5z^3}} = ?$ „ „ „ „ 11.

62). $\sqrt[3x]{\sqrt[4y]{\frac{m^{4x-5}n^{7-3x}}{p^{2x-y}}}}\cdot\sqrt[6y]{\sqrt[2x]{\frac{m^{8x+5}n^{15x-7}}{p^{22x+y}}}} = ?$

63). $\sqrt{ab}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}\right) = \ldots ?$ „ „ „ „ 12.

64). $(x\sqrt{x^3}-y\sqrt{y^3})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = \ldots ?$

65). $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = \ldots\ldots ?$ „ „ „ „ 13.

66). $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 = \ldots\ldots ?$

67). $(1-\sqrt{5})^2 = \ldots\ldots ?$

68). $(-1-\sqrt{3})^2 = \ldots\ldots ?$

69). $(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2 = \ldots\ldots ?$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
70). $(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})^2 =$	?	
71). $(m-\sqrt{n})^2 =$	?	
72). $(\sqrt[3]{a^2bc}-\sqrt[3]{ab^2c^2})^2 =$	?	
73). $(\sqrt{7-3x}+\sqrt{4x-3})^2 =$	?	
74). $(\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{n^2})^4 =$	?	man erhebe das gegebene Binom nach dem Lehrsatz 16, Seite 61, erst in die 2. Potenz und das erhaltene Resultat erhebe man, wenn es reduziert ist, nochmals in die 2. Potenz.
75). $\left(\sqrt{\frac{a-b}{b-c}}-\sqrt{\frac{b-c}{a-b}}\right)^2 =$	?	
76). $\left(\sqrt{\frac{3m}{2x}}-\sqrt{\frac{2x}{3m}}\right)^2 =$	?	
77). $(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{5})^3 =$	?	analog dem gelösten Beispiel 17.
78). $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6})^3 =$	?	
79). $(3-3\sqrt{3})^3 =$	?	
80). $(-1-2\sqrt{2})^3 =$	?	
81). $(1-\sqrt{2})^6 =$	?	man erhebe das gegebene Binom nach dem Lehrsatz 16, Seite 61, erst in die 3. Potenz und das hierdurch entstehende Resultat, nachdem es reduziert ist, in die 2. Potenz.
82). $(4+\sqrt{3})\cdot(4-\sqrt{3}) =$	?	analog dem gelösten Beispiel 19.
83). $(x-\sqrt{a})\cdot(x+\sqrt{a}) =$	?	
84). $(\sqrt{2a}-\sqrt{2b})\cdot(\sqrt{2a}+\sqrt{2b}) =$	?	
85). $(7-2\sqrt{3})\cdot(7+2\sqrt{3}) =$	?	
86). $(3\sqrt{2}+2\sqrt{11})\cdot(3\sqrt{2}-2\sqrt{11}) =$	?	
87). $(\sqrt{m}+\sqrt{m-n})\cdot(\sqrt{m}-\sqrt{m-n}) =$	?	
88). $(\sqrt{2x+5}-2\sqrt{x})\cdot(\sqrt{2x+5}+2\sqrt{x}) =$	?	
89). $(\sqrt{a+b-c}+\sqrt{a-b+c})\cdot(\sqrt{a+b-c}-\sqrt{a-b+c}) =$	?	
90). $\sqrt[3]{6-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{6+2\sqrt{5}} =$	?	analog dem gelösten Beispiel 22.
91). $\sqrt{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\cdot\sqrt{\sqrt{m}-\sqrt{n}} =$	?	
92). $\sqrt[3]{\sqrt{12}-2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{12}+2}+\sqrt[3]{9+\sqrt{15}}\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{15}} =$	?	
93). $\sqrt{m+n+2\sqrt{mn}}\cdot\sqrt{m+n-2\sqrt{mn}} =$	?	analog dem gelösten Beispiel 25.
94). $\left(a\sqrt{\frac{a}{b}}-b\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\cdot\left(a\sqrt{\frac{a}{b}}+b\sqrt{\frac{b}{a}}\right) =$	?	
95). $(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}) =$	?	
96). $(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{10})\cdot(\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{3}) =$	?	

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

97). $\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}} = ?$

98). $\sqrt[3]{2m+\sqrt{m^2-1}}\cdot\sqrt[3]{2m-\sqrt{m^2-1}} = ?$

99). $\sqrt{2m-2n}\cdot\sqrt{2m^2-2n^2} = \ldots ?$ analog dem gelösten Beispiel 26.

100). $\sqrt{a^2-a}\cdot\sqrt{a^3-a} = \ldots ?$

Aufgabe 23. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Multiplikationen mit Hülfe des Lehrsatzes 18 und nach den bekannten algebraischen Multiplikationsregeln ausführen, dabei den Zusatz 4, Seite 201, beachten.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{b} = \sqrt[3.4]{a^4}\cdot\sqrt[4.3]{b^3} = \sqrt[12]{a^4}\cdot\sqrt[12]{b^3} = \sqrt[12]{a^4b^3}$ man beachte den Lehrsatz 18.

2). $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a} = \sqrt[3.4]{a^4}\cdot\sqrt[4.3]{a^3} = \sqrt[12]{a^4}\cdot\sqrt[12]{a^3} = \sqrt[12]{a^7}$

3). $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{3} = \sqrt[2.3]{2^3}\cdot\sqrt[3.2]{5^2}\cdot\sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{8}\cdot\sqrt[6]{25}\cdot\sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{600}$ der Generalwurzelexponent ist hier $= 6$.

4). $\sqrt[nx]{a^y}\cdot\sqrt[ny]{a^x}\cdot\sqrt[xy]{a} = \sqrt[nx.y]{a^{y.y}}\cdot\sqrt[ny.x]{a^{x.x}}\cdot\sqrt[xy.n]{a^n}$ der Generalwurzelexponent ist hier $= nxy$.

$= \sqrt[nxy]{a^{yy}}\cdot\sqrt[nxy]{a^{xx}}\cdot\sqrt[nxy]{a^n} = \sqrt[nxy]{a^{yy}\cdot a^{xx}\cdot a^n}$

$= \sqrt[nxy]{a^{xx+yy+n}}$

5). $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{\frac{m}{x}} = \sqrt[2.3]{x^3}\cdot\sqrt[3.2]{\left(\frac{m}{x}\right)^2} = \sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{\frac{m^2}{x^2}} = \sqrt[6]{x^3\cdot\frac{m^2}{x^2}} = \sqrt[6]{m^2x}$

6). $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[m+1]{a^3} = \sqrt[m.3(m+1)]{a^{3(m+1)}}\cdot\sqrt[3.m(m+1)]{a^{2.m(m+1)}}\cdot\sqrt[(m+1).3m]{a^{3.3m}}$. . der Generalwurzelexponent ist hier $= 3m(m+1)$

$= \sqrt[3m(m+1)]{a^{3m+3}}\cdot\sqrt[3m(m+1)]{a^{2mm+2m}}\cdot\sqrt[3m(m+1)]{a^{9m}}$

$= \sqrt[3m(m+1)]{a^{3m+3}\cdot a^{2mm+2m}\cdot a^{9m}} = \sqrt[3m(m+1)]{a^{2mm+14m+3}}$

7). $\sqrt[10]{a^3b^2c}\cdot\sqrt[5]{ab^3c^2}\cdot\sqrt[4]{abc^3}\cdot\sqrt[6]{a^2b^2c^2}$ der Generalwurzelexponent ist $= 60$

$= \sqrt[10.6]{(a^3b^2c)^6}\cdot\sqrt[5.12]{(ab^3c^2)^{12}}\cdot\sqrt[4.15]{(abc^3)^{15}}\cdot\sqrt[6.10]{(a^2b^2c^2)^{10}}$

$= \sqrt[60]{a^{18}b^{12}c^6}\cdot\sqrt[60]{a^{12}b^{36}c^{24}}\cdot\sqrt[60]{a^{15}b^{15}c^{45}}\cdot\sqrt[60]{a^{20}b^{20}c^{20}}$

$= \sqrt[60]{a^{18}b^{12}c^6\cdot a^{12}b^{36}c^{24}\cdot a^{15}b^{15}c^{45}\cdot a^{20}b^{20}c^{20}} = \sqrt[60]{a^{65}b^{83}c^{95}}$

Uebungsbeispiele:	**Resultate:**	**Andeutungen:**

8). $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \sqrt[2.3]{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3} \cdot \sqrt[3.2]{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}$

$= \sqrt[6]{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3 . (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}$

9). $(\sqrt[x]{a}-\sqrt[y]{b})^2 = (\sqrt[x]{a})^2 - 2\sqrt[x]{a} . \sqrt[y]{b} + (\sqrt[y]{b})^2$ man benutze den Lehrsatz 12, S. 46.

$= \sqrt[x]{a^2} - 2\sqrt[x.y]{a^y} . \sqrt[y.x]{b^x} + \sqrt[y]{b^2} = \sqrt[x]{a^2} - 2\sqrt[xy]{a^y b^x} + \sqrt[y]{b^2}$

10). $\sqrt[3]{m} . \sqrt[5]{n} =$? analog dem gelösten Beispiel 1.

11). $\sqrt[4]{m} . \sqrt[6]{m} =$?

12). $\sqrt{x} . \sqrt[3]{x} =$?

13). $\sqrt{2} . \sqrt[3]{5} =$?

14). $\sqrt{x} . \sqrt[6]{y} =$?

15). $\sqrt[9]{7} . \sqrt[3]{7} =$?

16). $\sqrt[3]{a^5} . \sqrt[5]{a^7} =$?

17). $\sqrt[6]{a^5} . \sqrt[8]{a^7} =$?

18). $\sqrt[9]{a} . \sqrt[3]{b} . \sqrt[12]{a} =$? „ „ „ „ 3.

19). $\sqrt{2} . \sqrt[3]{3} . \sqrt[4]{4} . \sqrt[12]{12} =$?

20). $\sqrt[4]{a^7} . \sqrt[9]{a^4} . \sqrt{a^3} =$?

21). $\sqrt[n]{a^m} . \sqrt[r]{a^s} =$?

22). $\sqrt[m]{x} . \sqrt[n]{x} =$?

23). $\sqrt[xy]{a^m} . \sqrt[yz]{a^n} =$?

24). $\sqrt[a]{x} . \sqrt[b]{y} . \sqrt[c]{z} =$?

25). $\sqrt[m]{a} . \sqrt[n]{\frac{bc}{a}} =$? „ „ „ „ 5.

26). $\sqrt[3]{x} . \sqrt[4]{\frac{y}{x}} =$?

27). $\sqrt[3]{a} . \sqrt[9]{\frac{b}{a}} =$?

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

28). $\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \ldots\ldots ?$

29). $\sqrt[6]{\frac{m}{n}}\cdot\sqrt[18]{\frac{n}{m}} = \ldots\ldots ?$

30). $\sqrt{q}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{q}} = \ldots\ldots ?$

31). $\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \ldots\ldots ?$

32). $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \ldots\ldots ?$

33). $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6n]{b} = \ldots\ldots ?$

34). $\sqrt[2n+1]{x}\cdot\sqrt[3n]{x} = \ldots\ldots ?$

35). $\sqrt[n+1]{y^2}\cdot\sqrt[n-1]{y^3}\cdot\sqrt[n^2-1]{y^4} = \ldots\ldots ?$

36). $a\sqrt[x]{a^3b^4}\cdot\sqrt{ab^5}\cdot\sqrt[3]{a^8b^{-4}}\cdot\sqrt[x]{a^{-3}b^{-4}} = ?$

37). $\sqrt[x-1]{\frac{a^3b^4}{m^6n^7}}\cdot\sqrt[x+1]{\frac{m^6n^{10}}{ab^3}} = \ldots ?$

38). $\frac{m+1}{m-2}\sqrt[3]{\frac{4x^4}{3y^5}}\cdot\frac{m^2-4}{m^2-1}\sqrt{\frac{3y^5}{2x^4}} = ?$

39). $\sqrt{2\sqrt{3}-3\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{2\sqrt{15}+4} = \ldots ?$ analog dem gelösten Beispiel 8.

40). $(\sqrt[2]{3}-\sqrt[3]{2})^2 = \ldots\ldots ?$ „ „ „ „ 9.

41). $(\sqrt[3]{4}-\sqrt{5})^3 = \ldots\ldots ?$

42). $(2\sqrt{2}-2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[4]{2})\cdot(5\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}) = ?$. . . man beachte die Erkl. 33, S. 16.

Aufgabe 24. Man soll die in nachfolgenden Uebungsbeispielen vor den Wurzelzeichen stehenden Faktoren nach dem Zusatz 2 des Lehrsatzes 17 unter die betreffenden Wurzelzeichen bringen, dabei den Zusatz 4, Seite 201, beachten.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $5\sqrt{2} = \sqrt{5^2}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{5^2\cdot 2} = \sqrt{25\cdot 2} = \sqrt{50}$. . . man beachte den Zusatz 2, S. 226.

2). $3\frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{8} = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2\cdot 8} = \sqrt{\frac{49\cdot 8}{4}} = \sqrt{98}$

3). $2\cdot\sqrt[3]{0,5} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{0,5} = \sqrt[3]{2^3\cdot 0,5} = \sqrt[3]{8\cdot 0,5} = \sqrt[3]{4}$

4). $3m\sqrt[3]{\frac{1}{m^3}} = \sqrt[3]{(3m)^3}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{m^3}} = \sqrt[3]{\frac{3^3\cdot m^3\cdot 1}{m^3}} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

5). $2\sqrt[3]{\frac{3}{80}} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{80}} = \sqrt[3]{\frac{2^3\cdot 3}{80}} = \sqrt[3]{\frac{8\cdot 3}{80}} = \sqrt[3]{\frac{3}{10}} = \sqrt[3]{0,3}$

6). $\frac{mn^{-2}}{ab^2}\sqrt{\frac{a^3b^4}{m^2n^{-5}}} = \sqrt{\left(\frac{mn^{-2}}{ab^2}\right)^2}\cdot\sqrt{\frac{a^3b^4}{m^2n^{-5}}} = \sqrt{\frac{m^2n^{-4}}{a^2b^4}\cdot\frac{a^3b^4}{m^2n^{-5}}} = \sqrt{an}$

7). $(\sqrt{5}-2)\cdot\sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}\cdot\sqrt{9+4\sqrt{5}}$

$= \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2\cdot(9+4\sqrt{5})} = \sqrt{(5-4\sqrt{5}+4)\cdot(9+4\sqrt{5})}$

$= \sqrt{(9-4\sqrt{5})\cdot(9+4\sqrt{5})} = \sqrt{9^2-(4\sqrt{5})^2}$

$= \sqrt{81-4^2\cdot(\sqrt{5})^2} = \sqrt{81-16\cdot 5} = \sqrt{81-80} = \sqrt{1} = 1$

8). $\sqrt[5]{a^2\sqrt{a}} = \sqrt[5]{\sqrt{(a^2)^2}\cdot\sqrt{a}} = \sqrt[5]{\sqrt{a^4\cdot a}} = \sqrt[5]{\sqrt{a^5}} = \sqrt[10]{a^5} = \sqrt{a}$

9). $2\sqrt{0,5\sqrt{0,5\sqrt{0,5}}} = 2\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$ die Dezimalbrüche verwandelt man am besten zuerst in gewöhnliche Brüche.

$= 2\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}}}} = 2\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{1}{2^3}}} = 2\sqrt{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{2^3}}}$

$= 2\sqrt[8]{\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{2^3}} = 2\sqrt[8]{\frac{1}{2^7}} = \sqrt[8]{2^8\cdot\frac{1}{2^7}} = \sqrt[8]{2}$

10). $a\sqrt[n]{a^{-1}\sqrt[n]{a^{-1}\sqrt[n]{a^{-1}}}} = a\sqrt[n]{a^{-1}\sqrt[n]{\sqrt[n]{(a^{-1})^n\cdot a^{-1}}}}$

$= a\sqrt[n]{a^{-1}\sqrt[nn]{a^{-n}\cdot a^{-1}}} = a\sqrt[n]{a^{-1}\sqrt[nn]{a^{-n-1}}} = a\sqrt[n]{\sqrt[nn]{(a^{-1})^{nn}\cdot a^{-n-1}}}$

$= a\sqrt[nnn]{a^{-nn-n-1}} = \sqrt[nnn]{a^{nnn}\cdot a^{-nn-n-1}} = \sqrt[n^3]{a^{n^3-n^2-n-1}}$

11). $2\sqrt{2} =$? analog dem gelösten Beispiel 1.

12). $7\sqrt{5} =$?

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
13). $m\sqrt{n} =$	?	
14). $a\sqrt[x]{b} =$	?	
15). $5\sqrt{0,6} =$	?	
16). $6\sqrt{3\frac{1}{2}} =$	?	
17). $4\sqrt{0,25} =$	?	 analog dem gelösten Beispiel 3.
18). $5\sqrt[4]{0,0256} =$	?	
19). $7m\sqrt{x} =$	?	 „ „ „ „ 4.
20). $a\sqrt{\frac{x}{a}} =$	?	
21). $m\sqrt{\frac{b}{m}} =$	?	
22). $6\sqrt{\frac{5}{6}} =$	?	
23). $ab\sqrt{\frac{1}{ab}} =$	?	
24). $2\sqrt[3]{\frac{5}{2}} =$	?	
25). $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}} =$	?	
26). $(a+x)\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} =$	?	
27). $(m-n)\sqrt{\frac{m+n}{m-n}} =$	?	
28). $\frac{a^2b^3}{c}\cdot\sqrt[3]{\frac{c^4}{a^5b^4}} =$	?	 „ „ „ „ 6.
29). $\frac{x^{-3}y^{-6}}{z^{-2}}\sqrt[4]{x^{-7}y^{13}z^{25}} =$. . .	?	
30). $\frac{ab^2c^3}{d^4}\sqrt[m]{\frac{d^{4m-4}}{a^{m-1}b^{2m-2}c^{3m-3}}} =$. .	?	
31). $(1-\sqrt{3})\cdot\sqrt{4+2\sqrt{3}} =$	?	 „ „ „ „ 7.
32). $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot\sqrt{5+2\sqrt{6}} =$. . .	?	
33). $\sqrt[3]{m\sqrt{m}} =$	?	 „ „ „ „ 8.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
34). $\sqrt{3\sqrt[3]{5}} =$	?	
35). $\sqrt[3]{5\sqrt[4]{7}} =$	?	
36). $\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b}} =$	?	
37). $\sqrt[7]{a^2\sqrt[3]{a}} =$	?	
38). $\sqrt{0{,}25\sqrt{0{,}25\sqrt{0{,}25}}} =$	?	analog dem gelösten Beispiel 9.
39). $a\sqrt[x]{a\sqrt[x]{a}} =$	?	
40). $a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}} =$	?	
41). $2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}} =$	?	
42). $5\sqrt{0{,}2\sqrt{0{,}2\sqrt{0{,}2}}} =$	?	
43). $2\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} =$	?	
44). $m\sqrt{m^{-1}\sqrt{m^{-1}\sqrt{m^{-1}}}} =$. . .	?	
45). $x\sqrt[n]{x^{1-n}\sqrt[n]{x^{1-n}\sqrt[n]{x^{1-n}}}} =$. .	?	

13). Ueber die Division von Wurzeln.

In Betreff der Division von Wurzeln kann man, je nachdem die zu dividierenden Wurzeln gleich, gleichnamig oder ungleichnamig sind, drei Arten unterscheiden, nämlich:

1). Division **gleicher** Wurzeln
— siehe den Lehrsatz 19 —

2). Division **gleichnamiger** Wurzeln
— siehe den Lehrsatz 20 —

3). Division **ungleichnamiger** Wurzeln
— siehe den Lehrsatz 21. —

Lehrsatz 19. Gleiche Wurzeln (das sind solche, welche gleiche Radikanden und gleiche Wurzelexponenten haben) **werden dividiert, indem man ihre Koeffizienten dividiert und die Wurzeln selbst weglässt.**

Man beachte den Zusatz 4, Seite 201.

Vorauss. Gegeben sei z. B.:

a). $8\sqrt[3]{a} : 4\sqrt[3]{a}$

b). $\sqrt[3]{a+b} : \sqrt[3]{a+b}$

c). $\sqrt[x]{m} : -\sqrt[x]{m}$

Behaupt.

a). $8\sqrt[3]{a} : 4\sqrt[3]{a} = \frac{+8}{+4} = 2$

b). $\sqrt[x]{a+b} : \sqrt[x]{a+b} = \frac{+1}{+1} = 1$

c). $\sqrt[m]{x} : -\sqrt[m]{x} = \frac{+1}{-1} = -1$

Erkl. 47. Eine Zahl a (Dividend) durch eine Zahl b (Divisor) dividieren heisst: eine dritte Zahl c (den Quotienten) finden, die mit b multipliziert a ergibt, in Zeichen:

Ist: $\frac{a}{b} = c$, dann muss

$b \cdot c = a$ sein.

Hiernach ist z. B.:

$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} = 1$, denn:

$1 \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a}$

Beweis.

a). $\frac{8\sqrt[3]{a}}{4\sqrt[3]{a}} = \frac{8}{4} \cdot \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}}$

Da nun nach der Definition des Dividierens (siehe Erkl. 47):

$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} = 1$ sein muss, so ist:

$\frac{8\sqrt[3]{a}}{4\sqrt[3]{a}} = \frac{8}{4} \cdot 1$ oder $= \frac{8}{4} = 2$

b). $\frac{\sqrt[x]{a+b}}{\sqrt[x]{a+b}} = \frac{+1 \cdot \sqrt[x]{a+b}}{+1 \cdot \sqrt[x]{a+b}} =$

$\frac{+1}{+1} \cdot \frac{\sqrt[x]{a+b}}{\sqrt[x]{a+b}}$

mithin analog wie vorhin:

$\frac{\sqrt[x]{a+b}}{\sqrt[x]{a+b}} = \frac{+1}{+1} \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$

c). wie unter b).

Lehrsatz 20. Gleichnamige Wurzeln (das sind solche, welche gleiche Wurzelexponenten haben) **werden dividiert, indem man den Quotient der Radikanden bildet, denselben durch den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten radiziert und dem so erhaltenen Resultat den Quotient der etwaigen Koeffizienten als Faktor beischreibt.**

Man beachte den Zusatz 4, Seite 201, und die Erkl. 48.

Erkl. 48. Stellen die zu dividierenden Wurzeln imaginäre Grössen dar, sind also die Wurzelexponenten gerade Zahlen und die Radikanden negativ, so hat dieser Lehrsatz keine Gültigkeit. In solchen Fällen beachte man den Zusatz 4, Seite 201, bezw. den Abschnitt 15.

Vorauss. Gegeben sei z. B.:

$$a\sqrt[m]{n} : -b\sqrt[m]{r}$$

Behaupt.

$$\frac{a\sqrt[m]{n}}{-b\sqrt[m]{r}} = -\frac{a}{b} \cdot \sqrt[m]{\frac{n}{r}}$$

Beweis.

$$\frac{a\sqrt[m]{n}}{-b\sqrt[m]{r}} = \frac{a}{-b} \cdot \frac{\sqrt[m]{n}}{\sqrt[m]{r}} = -\frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt[m]{n}}{\sqrt[m]{r}}$$

Setzt man nun:

a). . . $\frac{\sqrt[m]{n}}{\sqrt[m]{r}} = x$, so ist auch:

$$\left(\frac{\sqrt[m]{n}}{\sqrt[m]{r}}\right)^m = x^m \text{ oder:}$$

$$\frac{(\sqrt[m]{n})^m}{(\sqrt[m]{r})^m} = x^m$$

$$\frac{n}{r} = x^m \text{ woraus sich}$$

b). . . $\sqrt[m]{\frac{n}{r}} = x$ ergibt.

Aus den Gleichungen a). und b). erhält man:

$$\frac{\sqrt[m]{n}}{\sqrt[m]{r}} = \sqrt[m]{\frac{n}{r}}$$

was auch schon durch die Umkehrung des Lehrsatzes 10 in dem Zusatz 1, Seite 203, ausgesprochen ist.

Hiernach ist:

$$\frac{a\sqrt[m]{n}}{-b\sqrt[m]{r}} = -\frac{a}{b}\frac{\sqrt[m]{n}}{\sqrt[m]{r}} = -\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{n}{r}}$$

was zu beweisen war.

Lehrsatz 21. Ungleichnamige Wurzeln (d. s. solche, welche keine gleiche Wurzelexponenten haben) **werden dividiert, indem man sie nach dem Zusatz 1,** Seite 217, **gleichnamig macht und schliesslich nach dem vorstehenden Lehrsatz 20 verfährt.**

Man beachte den Zusatz 4, Seite 201, und die Erkl. 49.

Vorauss. Gegeben sei z. B.:

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{b}$$

Behaupt. $$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}}$$

Beweis. Nach dem Zusatz 1, S. 217, erhält man:

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m.n]{a^n}$$

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n.m]{b^m},$$ mithin ist:

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[mn]{a^n}}{\sqrt[mn]{b^m}} \text{ oder } = \sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}}$$

Erkl. 49. Stellen die zu dividierenden Wurzeln **imaginäre** Grössen dar, sind also die Exponenten gerade Zahlen und die Radikanden negativ, so hat dieser Lehrsatz keine Gültigkeit mehr. In solchen Fällen beachte man den Zusatz 4, Seite 201, bezw. den Abschn. 15.

Zusatz 1. Die vorstehenden Lehrsätze 20 und 21 pflegt man nur dann anzuwenden, wenn durch dieselben angedeutete Division der Radikanden ohne Rest aufgeht; ist dies nicht der Fall, so formt man, wie im nachfolgenden Zusatz 2 gezeigt wird, den gegebenen Quotienten so um, dass der Divisor keine Wurzelzeichen mehr enthält.

Man beachte auch den Zusatz 2, Seite 203.

Zusatz 2. Hat man Quotienten, deren Divisoren (Nenner) Wurzeln enthalten, so ist es meistens vorteilhaft, die Wurzelzeichen aus den Divisoren wegzuschaffen, da man hierdurch meistens Ausdrücke erhält, die für numerische Berechnungen bequemer sind.

Das Fortschaffen der Wurzeln aus dem Divisor eines Quotienten führt den Namen:

Das Rationalmachen des Divisors (Nenners).

Hierbei lassen sich folgende 3 Hauptfälle unterscheiden:

1). der Divisor ist **eingliedrig**, d. h. er ist ein **Monom**;

Beispiele.

1). $$\frac{a}{3\sqrt{a}} = \frac{a.\sqrt{a}}{3.\sqrt{a}.\sqrt{a}} = \frac{a\sqrt{a}}{3\sqrt{a^2}} = \frac{a\sqrt{a}}{3a} = \frac{1}{3}\sqrt{a}$$

2). $$\frac{2a^4b^2}{\sqrt[3]{2ab^{-1}}} = \frac{2a^4b^2\sqrt[3]{4a^2b^4}}{\sqrt[3]{2ab^{-1}}.\sqrt[3]{4a^2b^4}} = \frac{2a^4b^2\sqrt[3]{4a^2b^3.b}}{\sqrt[3]{8a^3b^3}} = \frac{2a^4b^2.b\sqrt[3]{4a^2b}}{2ab} = a^3b^2\sqrt[3]{4a^2b}$$

2). der Divisor ist **zweigliedrig**, d. h. er ist ein **Binom**, und **enthält nur Quadratwurzeln**; und

3). der Divisor ist **mehrgliedrig**, d. h. er ist ein **Trinom**, allgemein **Polynom**, und **enthält ebenfalls nur Quadratwurzeln.**

Im 1ten Falle, also wenn der Divisor ein Monom ist, wird in allen Fällen die Wegschaffung des Wurzelzeichens im Divisor dadurch erreicht, indem man Dividend und Divisor des Quotienten mit einer solchen Wurzelgrösse multipliziert, dass die hiernach im Divisor angedeutete Multiplikation und Radizierung ausgeführt werden kann, womit der Divisor in eine rationale Grösse umgewandelt ist.

Man siehe nebenstehende Beispiele 1 und 2 und die Uebungsbeispiele in der Aufgabe 28.

Im 2ten Falle, also wenn der Divisor ein Binom ist und derselbe nur Quadratwurzeln enthält, multipliziere man Dividend und Divisor mit einem solchen Binom, dass man im Divisor die Form: $(a+b).(a-b)$ erhält, indem man hierfür: a^2-b^2 setzen kann, wodurch erreicht wird, dass, wenn a und b Ausdrücke mit Quadratwurzeln vorstellen, diese Quadratwurzeln gegen die 2te Potenz gehoben werden können.

Man siehe nebenstehende Beispiele 3 und 4 und die Uebungsbeispiele in der Aufgabe 28.

Im 3ten Falle, also wenn der Divisor ein Polynom ist und derselbe nur Quadratwurzeln enthält, wiederhole man das für den 2ten Fall angegebene Verfahren.

Man siehe die Uebungsbeispiele in der Aufgabe 28.

Es soll nicht gesagt sein, dass mit den 3 angeführten Fällen die Fälle erschöpft sind, in welchen man die Divisoren rational machen kann, es sind dies nur die wichtigsten und am häufigsten vorkommenden Fälle. Die meisten übrigen Fälle sind, wie an nebenstehendem Beispiel 5 gezeigt ist, in ihrer Behandlung zu umständlich und deshalb ohne praktischen Wert.

Im übrigen siehe man die gelösten Uebungsbeispiele in der Aufgabe 28.

Beispiele.

3). $$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}.(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2}).(\sqrt{3}+\sqrt{2})} =$$

$$\frac{(\sqrt{3})^2+\sqrt{3}.\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3+\sqrt{6}}{3-2} =$$

$$\frac{3+\sqrt{6}}{1} = 3+\sqrt{6}$$

4). $$\frac{4}{3+\sqrt{5}} = \frac{4.(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5}).(3-\sqrt{5})} =$$

$$\frac{4(3-\sqrt{5})}{3^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{4(3-\sqrt{5})}{9-5} =$$

$$\frac{4(3-\sqrt{5})}{4} = 3-\sqrt{5}$$

5.) In dem Quotienten: $\frac{c}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$ soll der Divisor rational gemacht werden.

Beachtet man, dass:

$$a^3-b^3 = (a-b).(a^2+ab+b^2)$$

also auch:

$$\sqrt[3]{a^3}-\sqrt[3]{b^3} = (\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}).(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$$

oder:

$$a-b = (\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}).(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}) \text{ ist}$$

und man multipliziert Dividend und Divisor des gegebenen Quotienten mit:

$$(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$$

so erhält man:

$$\frac{c}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \frac{c.(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}).(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}$$

oder:

$$\frac{c}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \frac{c(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$$

Der Divisor ist hiernach **rational** gemacht, der erhaltene Ausdruck aber sicherlich nicht einfacher als der gegebene.

Aufgabe 25. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Divisionen mit Hülfe des Lehrsatzes 19 und nach den bekannten algebr. Divisionsregeln ausführen.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $2\sqrt[3]{3} : 7\sqrt[3]{3} =$	$\frac{2}{7}$	man beachte den Lehrsatz 19.
2). $10\sqrt[m]{a-b} : -2\sqrt[m]{a-b}$	-5	
3). $-\sqrt{3} : \sqrt{3} =$	-1	
4). $4\sqrt{6} : 2\sqrt{6} =$	?	
5). $17\sqrt[m]{a} : 2\sqrt[m]{a} =$	?	
6). $\sqrt[m]{x} : 7\sqrt[m]{x} =$	?	
7). $6\sqrt[3]{\frac{a}{b}} : -30\sqrt[3]{\frac{a}{b}} =$	?	
8). $\sqrt[n+1]{m-r} : -2\sqrt[n+1]{m-r} =$	?	
9). $-ab^2\sqrt[3]{2} : ab\sqrt[3]{2} =$	?	
10). $(m^2-n^2)\sqrt[7]{q} : (m+n)\sqrt[7]{q} =$. . .	?	
11). $-\sqrt[3]{2} : -\frac{1}{8}\sqrt[3]{2} =$	?	
12). $\frac{a^2b^3}{m^3x}\sqrt[5]{m^3} : -\frac{ab^3}{m^2x^4}\sqrt[5]{m^3} =$. . .	?	

Aufgabe 26. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Divisionen mit Hülfe des Lehrs. 20 und nach den bekannten algebraischen Divisionsregeln ausführen, dabei den Zusatz 4, Seite 201, beachten.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} =$	$\sqrt{3}$	man beachte den Lehrsatz 20.
2). $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} =$. . .	3	
3). $\frac{\sqrt{48m}}{\sqrt{6m}} = \sqrt{\frac{48m}{6m}} = \sqrt{8} = \sqrt{4.2} = 2\sqrt{2}$		

Uebungsbeispiele:	**Resultate:**	**Andeutungen:**

4). $15\sqrt[4]{8}:3\sqrt[4]{4} = \frac{15}{3}\cdot\sqrt[4]{\frac{8}{4}} = \;.\;.\;5\sqrt[4]{2}$

5). $12\sqrt[5]{18a^3b^4}:6\sqrt[5]{9a^3b} = \frac{12}{6}\sqrt[5]{\frac{18a^3b^4}{9a^3b}} = 2\sqrt[5]{2b^3}$

6). $\sqrt[9]{\frac{a^{17}b^3c^5}{d^8f^5}}:\sqrt[9]{\frac{a^8c^5d}{b^6f^5}} = \sqrt[9]{\frac{a^{17}b^3c^5}{d^8f^5}:\frac{a^8c^5d}{b^6f^5}}$

$= \sqrt[9]{\frac{a^{17}b^3c^5.\,b^6f^5}{d^8f^5.\,a^8c^5d}} = \sqrt[9]{\frac{a^9b^9}{d^9}} = \frac{ab}{d}$

7). $2\sqrt{a^2-b^2}:\sqrt{a^3-a^2b} = 2\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^3-a^2b}} = 2\sqrt{\frac{(a+b)(a-b)}{a^2(a-b)}}$

$= 2\sqrt{\frac{a+b}{a^2}} = 2\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a^2}} = \frac{2}{a}\sqrt{a+b}$

8). $\sqrt[17]{(a^2bc)^2(ab^2c)^3}.\sqrt[17]{(abc^2)^4(a^2b^2c^2)^3} = \sqrt[17]{(a^2bc)^2(ab^2c)^3(abc^2)^4(a^2b^2c^2)^3}$

$= \sqrt[17]{a^4b^2c^2.\,a^3b^6c^3.\,a^4b^4c^8.\,a^6b^6c^6} = \sqrt[17]{a^{17}b^{18}c^{19}}$

$= \sqrt[17]{a^{17}b^{17}bc^{17}c^2} = abc\sqrt[17]{bc^2}$

9). $(2\sqrt{15}-6\sqrt{20}+14\sqrt{25}):2\sqrt{5} = \frac{2\sqrt{15}}{2\sqrt{5}}-\frac{6\sqrt{20}}{2\sqrt{5}}+\frac{14\sqrt{25}}{2\sqrt{5}}$ — man beachte die Erkl. 36 Seite 26.

$= \sqrt{3}-3\sqrt{4}+7\sqrt{5} = \sqrt{3}-6+7\sqrt{5}$

10). $\frac{m}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{m^2}}{\sqrt{m}} = \sqrt{\frac{m^2}{m}} = \sqrt{m}$ um in derartigen Ausdrücken die darin angedeutete Division nach dem Lehrsatz 20 ausführen zu können, schreibe man den Dividenden nach dem Zusatz 1, Seite 192, als eine Wurzel mit demselben Wurzelexponenten, welchen der Divisor hat.

11). $\frac{m^2p^3q^4}{\sqrt[3]{mp^2q^5}} = \frac{\sqrt[3]{(m^2p^3q^4)^3}}{\sqrt[3]{mp^2q^5}} = \sqrt[3]{\frac{(m^2p^3q^4)^3}{mp^2q^5}}$

$= \sqrt[3]{\frac{m^6p^9q^{12}}{mp^2q^5}} = \sqrt[3]{m^5p^7q^7}$

$= \sqrt[3]{m^3.\,m^2.\,p^6.\,p.\,q^6.\,q} = mp^2q^2\sqrt[3]{m^2pq}$

12). $1:\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{1^m}.\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{1:\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\frac{b}{a}}$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:

13). $(a-b):(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}) = \left((\sqrt[3]{a})^3-(\sqrt[3]{b})^3\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)$

$$= (\sqrt[3]{a^3}-\sqrt[3]{b^3}):(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$$

$$\begin{array}{l|l}
\overbrace{\sqrt[3]{a^3}-\sqrt[3]{b^3}}^{\text{Dividend}} & \overbrace{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}^{\text{Divisor}} \\
\hline
\sqrt[3]{a^3}-\sqrt[3]{a^2b} & \underbrace{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}_{\text{Resultat}} \\
-\quad + & \\
\hline
\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{b^3} & \\
\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2} & \\
-\quad + & \\
\hline
\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{b^3} & \\
\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{b^3} & \\
-\quad + & \\
\hline
= \quad = &
\end{array}$$

Der gegebene Ausdruck deutet nach der Erkl. 37, Seite 27, eine Partialdivision an. Schreibt man die Glieder des im Dividenden stehenden Binomiums nach dem Zusatz 1, Seite 191, als Potenzen, so erhält man die bekannte Divisionsform: $(x^3-y^3):(x-y)$ von welchen man weiss, dass sie **ohne Rest** aufgehen. — Man siehe die Beispiele 87—88, Seite 37, und beachte den sich hieraus ergebenden Satz 4.

14). $(m-n):(\sqrt{m}+\sqrt{n}) = (\sqrt{m}+\sqrt{n})\cdot(\sqrt{m}-\sqrt{n}):(\sqrt{m}+\sqrt{n})$

$$= \sqrt{m}-\sqrt{n}$$

man beachte den Zusatz 3, Seite 192.

15). $\sqrt[3]{3a^2b^2c^4-4a^4b^2c^2+5a^2b^4c^2}:\sqrt[3]{\frac{3c}{ab}-\frac{4a}{bc}+\frac{5b}{ca}}$

$$= \sqrt[3]{\left(3a^2b^2c^4-4a^4b^2c^2+5a^2b^4c^2\right):\left(\frac{3c}{ab}-\frac{4a}{bc}+\frac{5b}{ca}\right)}$$

. . . um die in dem Radikanden angedeutete Partialdivision nach der Erkl. 37, Seite 27, ausführen zu können, ordne man Divisor und Dividend u. verfahre analog dem gelösten Beispiel 13.

$$= \sqrt[3]{(-4a^4b^2c^2+5a^2b^4c^2+3a^2b^2c^4):(-4ab^{-1}c^{-1}+5a^{-1}bc^{-1}+3a^{-1}b^{-1}c)}$$

$$\begin{array}{l|l}
\overbrace{-4a^4b^2c^2+5a^2b^4c^2+3a^2b^2c^4}^{\text{Dividend}} & \overbrace{-4ab^{-1}c^{-1}+5a^{-1}bc^{-1}+3a^{-1}b^{-1}c}^{\text{Divisor}} \\
\hline
-4a^4b^2c^2+5a^2b^4c^2+3a^2b^2c^4 & \underbrace{a^3b^3c^3}_{\text{Quotient}} \\
+\qquad -\qquad - & \\
\hline
= \qquad = \qquad = &
\end{array}$$

$$= \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = abc \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

Man hätte auch die Radikanden, nachdem die Brüche im 2. Radikanden gleichnamig gemacht sind, in Faktoren zerlegen können.

16). $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} =$? analog dem gelösten Beispiel 1.

17). $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} =$?

18). $\frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3}} =$?

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
19). $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}} = \ldots\ldots\ldots$	?	
20). $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{153}}{\sqrt{17}} - \frac{\sqrt{304}}{\sqrt{19}} = \ldots$	?	
21). $\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a}} = \ldots\ldots\ldots$	?	
22). $\frac{\sqrt{a^2 m}}{\sqrt{m}} = \ldots\ldots\ldots$	?	
23). $\frac{\sqrt[3]{5m^2}}{\sqrt[3]{5m}} = \ldots\ldots\ldots$	?	analog dem gelösten Beispiel 3.
24). $3\sqrt{6} : 2\sqrt{3} = \ldots\ldots\ldots$	?	„ „ „ „ 4.
25). $8\sqrt[3]{54} : 4\sqrt[3]{2} = \ldots\ldots\ldots$	?	
26). $2a\sqrt{ab} : 3\sqrt{a} = \ldots\ldots\ldots$	?	
27). $\sqrt[6]{a^9 b^3 c^6} : \sqrt[6]{a^6 b^{-3} c^0} = \ldots\ldots$	?	
28). $\sqrt[m]{x^{3m+2}} : \sqrt[m]{x^{2m+2}} = \ldots\ldots$	?	
29). $18\sqrt[x]{(2a+b)^{3x}} : 6\sqrt[x]{(2a+b)^{2x}} = \ldots$	?	
30). $\sqrt[3]{\frac{a^6 b^2 c}{m^5}} : \sqrt[3]{\frac{a^3 b^2 c^4}{m^2}} = \ldots\ldots$	?	„ „ „ „ 6.
31). $\sqrt[x]{\frac{a^{x-4} b^7}{c^{x-6} d^x}} : \sqrt[x]{\frac{b^{7-x} c^6}{a^4}} = \ldots$	?	
32). $\sqrt[mx]{\frac{a^{x-2} b^{x-4}}{c^{x-6}}} : \sqrt[mx]{\frac{b^{-4}}{a^2 c^{-6}}} = \ldots$	?	
33). $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}} : \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}} = \ldots\ldots$	?	
34). $\frac{51a^3 b}{14x^4}\sqrt[5]{\frac{a^{11} c^3}{b^4 x}} : \frac{34a^4 c}{35b^2 x^5}\sqrt[5]{\frac{bx^9}{a^9 c^7}} =$	?	
35). $\sqrt[19]{(x^2yz)^3 (x^2y^2z)^2} . \sqrt[19]{(xyz)^5 (xy^2z)^4} =$	?	„ „ „ „ 8.
36). $(\sqrt{12} - \sqrt{18} + \sqrt{6}) : \sqrt{6} = \ldots$	?	„ „ „ „ 9.
37). $(10\sqrt{12} - 2\sqrt{18}) : 2\sqrt{3} = \ldots\ldots$	?	
38). $(9\sqrt[3]{54} + 12\sqrt[3]{18} - 21\sqrt[3]{72}) : -3\sqrt[3]{9} =$	?	

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
39). $\frac{x}{\sqrt{x}} =$	?	analog dem gelösten Beispiel 10.
40). $\frac{ax}{\sqrt{x}} =$	?	
41). $\frac{a^2b^2c^2}{\sqrt{abc}} =$	?	
42). $3a^2b^3 : 2\sqrt[3]{a^2b} =$	?	
43). $6 : \sqrt{\frac{2}{3}} =$	?	
44). $20 : 5\sqrt{\frac{4}{5}} =$	?	
45). $m : \sqrt{\frac{m}{n}} =$	?	
46). $1 : \sqrt{0{,}04} =$	?	Dezimalbrüche schreibe man, sobald dies möglich ist, in Form von gewöhnlichen Brüchen.
47). $1 : \sqrt[3]{0{,}008} =$	?	
48). $1 : \sqrt[3]{1\frac{13}{16}} =$	?	
49). $(a-b) : (\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}) =$	?	analog dem gelösten Beispiel 13.
50). $(a+b) : (\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b}) =$	?	
51). $(a-b) : (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}) =$	?	Diese Divisionen ergeben unendl. Reihen. (51–53)
52). $(a-b) : (\sqrt[2n]{a} + \sqrt[2n]{b}) =$	?	
53). $(a+b) : (\sqrt[2n+1]{a} + \sqrt[2n+1]{b}) =$	?	
54). $(x-y) : (\sqrt{x} + \sqrt{y}) =$	?	analog dem gelösten Beispiel 14.
55). $(1-a) : (1-\sqrt{a}) =$	?	
56). $(2-3a) : (\sqrt{2} - \sqrt{3a}) =$	?	

Aufgabe 27. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Divisionen mit Hülfe des Lehrsatzes 21 und nach den bekannten algebr. Divisionsregeln ausführen, dabei den Zusatz 4, Seite 201, beachten.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[2.3]{a^3}}{\sqrt[3.2]{a^2}} = \sqrt[6]{\frac{a^3}{a^2}} = \sqrt[6]{a} \quad \ldots\ldots$$ man beachte den Lehrsatz 21.

2). $$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}} = \frac{\sqrt[2.5]{x^5}}{\sqrt[5.2]{x^2}} = \sqrt[10]{\frac{x^5}{x^2}} = \sqrt[10]{x^3}$$

3). $$\frac{\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[15]{m^7}} = \frac{\sqrt[3.5]{m^{2\cdot 5}}}{\sqrt[15]{m^7}} = \sqrt[15]{\frac{m^{10}}{m^7}} = \sqrt[15]{m^3} \quad \ldots\ldots$$ Der Generalwurzelexponent ist hier $= 15$.

$$= \sqrt[5]{m} \quad \ldots\ldots$$ man beachte schliesslich den Zusatz 3, Seite 211.

4). $$\frac{\sqrt[4]{ab^2}}{\sqrt[3]{a^2b}} = \frac{\sqrt[4.3]{(ab^2)^3}}{\sqrt[3.4]{(a^2b)^4}} = \sqrt[12]{\frac{a^3b^6}{a^8b^4}} = \sqrt[12]{\frac{b^2}{a^5}} \quad \ldots\ldots$$ nunmehr beachte man noch den Zusatz 2, Seite 203, und mache den Nenner **rational**.

$$= \sqrt[12]{\frac{b^2 . a^7}{a^5 . a^7}} = \sqrt[12]{\frac{a^7b^2}{a^{12}}} = \frac{\sqrt[12]{a^7b^2}}{a} = \frac{1}{a}\sqrt[12]{a^7b^2}$$

5). $$\sqrt{\frac{a}{b}} : \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \sqrt[2.3]{\left(\frac{a}{b}\right)^3} : \sqrt[3.2]{\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt[6]{\frac{a^3}{b^3}} : \sqrt[6]{\frac{b^2}{a^2}}$$

$$= \sqrt[6]{\frac{a^3}{b^3} : \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt[6]{\frac{a^3 . a^2}{a^2 . b^2}} = \sqrt[6]{\frac{a^5}{b^5}}$$

$$= \sqrt[6]{\frac{a^5 . b}{b^5 . b}} = \sqrt[6]{\frac{a^5b}{b^6}} = \frac{\sqrt[6]{a^5b}}{b} = \frac{1}{b}\sqrt[6]{a^5b}$$

6). $$\sqrt[6]{\frac{a^{-3}b^{-4}}{c^{-3}}} : \sqrt[4]{\frac{a^{-2}b^{-1}}{c}} : \sqrt[35]{\frac{a^{-3}b^{-2}}{c}} \quad \ldots\ldots$$ man diviere erst die beiden ersten Wurzeln und was herauskommt dividiere man durch die 3. Wurzel. Der Generalwurzelexponent ist: $3 . 4 . 35$ oder 420.

$$= \sqrt[6.70]{\left(\frac{a^{-3}b^{-4}}{c^{-3}}\right)^{70}} : \sqrt[4.105]{\left(\frac{a^{-2}b^{-1}}{c}\right)^{105}} : \sqrt[35.12]{\left(\frac{a^{-3}b^{-2}}{c}\right)^{12}}$$

$$= \sqrt[420]{\frac{a^{-210}b^{-280}}{c^{-210}} : \frac{a^{-210}b^{-105}}{c^{105}} : \frac{a^{-36}b^{-24}}{c^{12}}}$$

$$= \sqrt[420]{\frac{a^{-210}b^{-280}}{c^{-210}} . \frac{c^{105}}{a^{-210}b^{-105}} . \frac{c^{12}}{a^{-36}b^{-24}}} = \sqrt[420]{\frac{a^{36}c^{327}}{b^{151}}}$$

7). $$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2}} = \ldots\ldots\ldots\ldots ? \ldots\ldots$$ analog dem gelösten Beispiel 1.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
8). $\sqrt{18} : \sqrt[3]{2} =$	 ?	
9). $\sqrt[3]{x} : \sqrt[5]{x} =$	 ?	
10). $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[6]{2}} =$	 ?	
11). $\sqrt[4]{m^7} : \sqrt[6]{m} =$	 ?	
12). $\frac{\sqrt[9]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} =$	 ?	 analog dem gelösten Beispiel 4.
13). $\sqrt[5]{6} : \sqrt[3]{36} =$	 ?	
14). $\sqrt[5]{a} : 2\sqrt[4]{a^3} =$	 ?	
15). $8\sqrt{5} : 2\sqrt[3]{4} =$	 ?	 die Koeffizienten dividiere man für sich allein.
16). $8\sqrt{3} : 2\sqrt[4]{1\frac{1}{2}} =$	 ?	
17). $a\sqrt[4]{ab^{-3}} : b\sqrt{ab} =$	 ?	
18). $\sqrt[4]{(a^3-2b)^3} : \sqrt{a^3-2b} =$	 ?	
19). $24\sqrt[3]{x^2yz^2} : 12\sqrt[4]{x^3y^2z} =$	 ?	
20). $\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}} : \frac{4}{5}\sqrt[4]{\frac{b}{a^3}} =$	 ?	 analog dem gelösten Beispiel 5.
21). $\sqrt[4]{\frac{a^{-3}b}{c^{-2}}} : \frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{a^3b^{-6}}{c^8}} =$	. . ?	
22). $\sqrt[20]{\frac{x^2y^3}{z^2}} : \sqrt[10]{\frac{x^5y^3}{z^4}} : \sqrt[5]{\frac{x^{-2}b^{-5}}{z^{-3}}} =$	?	 " " " " 6.
23). $(2\sqrt{2} - 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{2}) : 4\sqrt[3]{2} =$	. . ?	 man beachte die Erkl. 36, S. 26.

Aufgabe 28. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen Quotienten so umformen, dass die Divisoren (Nenner) keine Wurzeln mehr enthalten, d. h. man soll diese Divisoren **rational** machen, dabei den Zusatz 4, Seite 201, beachten.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $\frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{x\sqrt{x}}{x} = \sqrt{x}$. . man beachte den im Zusatz 2, Seite 212, aufgestellten 1. Fall.

2). $\frac{5}{\sqrt[3]{10}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{10^2}}{\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{10^2}} = \frac{5\sqrt[3]{100}}{\sqrt[3]{10^3}} = \frac{5\sqrt[3]{100}}{10} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{100}$

3). $\frac{10}{3\sqrt{5}} = \frac{10 \cdot \sqrt{5}}{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{3\sqrt{5^2}} = \frac{10\sqrt{5}}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3}\sqrt{5}$

4). $\frac{x}{\sqrt[8]{a^3}} = \frac{x \cdot \sqrt[8]{a^5}}{\sqrt[8]{a^3} \cdot \sqrt[8]{a^5}} = \frac{x \cdot \sqrt[8]{a^5}}{\sqrt[8]{a^8}} = \frac{x\sqrt[8]{a^5}}{a} = \frac{x}{a} \cdot \sqrt[8]{a^5}$

5). $\frac{2+\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{(2+\sqrt{8}) \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}$

$= \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{16}}{2} = \frac{2\sqrt{2}+4}{2} = \sqrt{2}+2$

6). $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a-b}} = \frac{(a^2-b^2) \cdot \sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b} \cdot \sqrt{a-b}} = \frac{(a^2-b^2) \cdot \sqrt{a-b}}{(\sqrt{a-b})^2}$

$= \frac{(a^2-b^2)\sqrt{a-b}}{a-b} = \frac{(a+b)(a-b)\sqrt{a-b}}{a-b} = (a+b)\sqrt{a-b}$

7). $\frac{a}{\sqrt{b}} =$? analog dem gelösten Beispiel 1.

8). $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} =$?

9). $\frac{5}{\sqrt{2}} =$?

10). $\frac{7}{\sqrt[3]{2}} =$? „ „ „ „ 2.

11). $\frac{1}{\sqrt[8]{a^5}} =$?

12). $\frac{x}{\sqrt[5]{x}} =$?

13). $\frac{a}{\sqrt{ab}} =$?

14). $\frac{xm}{\sqrt[5]{x^2m^3}} =$?

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
15). $\frac{x}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} =$	?	man multipliziere Zähler u. Nenner mit: $\sqrt[n]{x}$
16). $\frac{x}{\sqrt[n]{x}} =$	?	man multipliziere Zähler u. Nenner mit: $\sqrt[n]{x^{n-1}}$
17). $\frac{ab}{\sqrt[n]{a^{n-1}b^{n-1}}} =$	?	
18). $\frac{5-\sqrt{4,5}-4\sqrt{24,5}}{\sqrt{2}} =$	?	analog dem gelösten Beispiel 5.
19). $\frac{a+b}{\sqrt{a+b}} =$	?	„ „ „ „ 6.
20). $\frac{m^2-n^2}{\sqrt{m-n}} =$	?	
21). $\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}} =$	?	
22). $\sqrt[4]{a^8-a^4x^2} : \sqrt{a^2+x} =$	?	man multipliziere Dividend u. Divisor mit $\sqrt{a^2+x}$, dann multipliziere man nach dem Lehrsatz 21 die im Dividenden erhaltenen Wurzeln und reduziere das somit erhaltene Resultat durch Ausscheiden von gemeinschaftlichen Faktoren.

23). $$\frac{2}{2-\sqrt{2}} = \frac{2.(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2}).(2+\sqrt{2})} = \frac{2(2+\sqrt{2})}{2^2-(\sqrt{2})^2}$$ man beachte den im Zusatz 2, Seite 242, aufgestellten 2. Fall.

$$= \frac{2(2+\sqrt{2})}{4-2} = \frac{2(2+\sqrt{2})}{2} = 2+\sqrt{2}$$

24). $$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1.(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1).(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2}-1$$

25). $$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}.(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2}).(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{4}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+2}{3-2} = \frac{\sqrt{6}+2}{1} = 2+\sqrt{6}$$

26). $$\frac{3\sqrt{5}-8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}-4\sqrt{5}} = \frac{(3\sqrt{5}-8\sqrt{2}).(3\sqrt{3}+4\sqrt{5})}{(3\sqrt{3}-4\sqrt{5}).(3\sqrt{3}+4\sqrt{5})} =$$

$$\frac{9\sqrt{15}-24\sqrt{6}+12\sqrt{25}-32\sqrt{10}}{(3\sqrt{3})^2-(4\sqrt{5})^2} = \frac{9\sqrt{15}-24\sqrt{6}+60-32\sqrt{10}}{9.3-16.5} =$$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

$$\frac{9\sqrt{15}-24\sqrt{6}+60-32\sqrt{10}}{-33}=$$

$$\frac{24\sqrt{6}-9\sqrt{15}-60+32\sqrt{10}}{33}$$. . . um im Nenner das Minuszeichen noch wegzubringen, wurde Zähler und Nenner mit: -1 multipliziert.

27). $$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{1.(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b}).(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

28). $$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y}).(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y}).(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}$$

$$=\frac{(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}.\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2}{x-y}=\frac{x-2\sqrt{xy}+y}{x-y}$$

29). $\frac{1}{2+\sqrt{5}}$ = ... ? analog dem gelösten Beispiel 23.

30). $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ = ... ?

31). $\frac{5}{7-\sqrt{2}}$ = ... ?

32). $\frac{9}{\sqrt{19}+4}$ = ... ?

33). $\frac{9}{3\sqrt{3}-5}$ = ... ?

34). $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ = ... ?

35). $\frac{180}{9\sqrt{5}+21}$ = ... ?

36). $\frac{66}{13-7\sqrt{3}}$ = ... ?

37). $\frac{90}{5\sqrt{3}-\sqrt{30}}$ = ... ?

38). $\frac{38\sqrt{2}}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$ = ... ?

39). $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ = ... ?

40). $\frac{1+2\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}$ = ... ?

41). $\frac{\sqrt{1\frac{1}{15}}-1}{5\sqrt{\frac{3}{5}}+4}$ = ... ?

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

42). $\dfrac{7\sqrt{12}-4\sqrt{27}}{8\sqrt{3}+2\sqrt{2}} = \ldots\ldots\ldots ?$

43). $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \ldots\ldots\ldots ?$

44). $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}-a} = \ldots\ldots\ldots ?$

45). $\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}} = \ldots\ldots\ldots ?$

46). $\dfrac{y\sqrt{x+y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x}} = \ldots\ldots\ldots ?$

47). $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = \ldots\ldots ?$

48). $\dfrac{2b}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} = \ldots\ldots ?$

49). $\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \ldots\ldots ?$

50). $\dfrac{12}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \dfrac{12(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

man beachte den im Zusatz 2, Seite 242, aufgestellten 3. Fall, indem man die beiden ersten Summanden im Divisor als ein einziges Glied zusammenfasst und wie in dem Beispiel 23 verfährt.

$$= \frac{12(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{12(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{12(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{5+2\sqrt{15}+3-2} = \frac{12(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{6+2\sqrt{15}}$$

man kürze hier zunächst Zähler u. und Nenner durch 2.

$$= \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3+\sqrt{15}} = \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(3-\sqrt{15})}{(3+\sqrt{15})\cdot(3-\sqrt{15})}$$

. . man verfahre weiter wie in dem Beispiel 23.

$$= \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(3-\sqrt{15})}{3^2-(\sqrt{15})^2} = \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(3-\sqrt{15})}{-6}$$

$$= -(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(3-\sqrt{15}) = (\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})(3-\sqrt{15})$$

51). $\dfrac{1+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \dfrac{(1+3\sqrt{2}-2\sqrt{3})\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2})} =$

$$\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{12}-2\sqrt{18}+\sqrt{3}+3\sqrt{6}-2\sqrt{9}-\sqrt{2}-3\sqrt{4}+2\sqrt{6}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} =$$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

$$= \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{4.3}-2\sqrt{9.2}+\sqrt{3}+3\sqrt{6}-2.3-\sqrt{2}-3.2+2\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2+2\sqrt{6}.\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2-2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+6\sqrt{3}-6\sqrt{2}+\sqrt{3}+3\sqrt{6}-6-\sqrt{2}-6+2\sqrt{6}}{6+2\sqrt{18}+3-2}$$

$$= \frac{6\sqrt{6}+7\sqrt{3}-7\sqrt{2}-12}{7+2\sqrt{18}} = \frac{6\sqrt{6}+7\sqrt{3}-7\sqrt{2}-12}{7+2\sqrt{9.2}}$$

$$= \frac{6\sqrt{6}+7\sqrt{3}-7\sqrt{2}-12}{7+6\sqrt{2}} = \frac{(6\sqrt{6}+7\sqrt{3}-7\sqrt{2}-12)(7-6\sqrt{2})}{(7+6\sqrt{2}).(7-6\sqrt{2})}$$

$$= \frac{42\sqrt{6}+49\sqrt{3}-49\sqrt{2}-84-36\sqrt{12}-42\sqrt{6}+42\sqrt{4}+72\sqrt{2}}{7^2-(6\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{42\sqrt{6}+49\sqrt{3}-49\sqrt{2}-84-72\sqrt{3}-42\sqrt{6}+84+72\sqrt{2}}{49-6^2.(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{-23\sqrt{3}+23\sqrt{2}}{49-72} = \frac{-23\sqrt{3}+23\sqrt{2}}{-23} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

52). $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}} = \ldots\ldots ?$ analog den gelösten Beispielen 50 u. 51.

53). $\frac{259}{5+\sqrt{7}+\sqrt{11}} = \ldots\ldots ?$

54). $\frac{12}{3-\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \ldots\ldots ?$

55). $\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\sqrt{2}} = \ldots\ldots ?$

56). $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{8}+\sqrt{6}}{\sqrt{10}+\sqrt{8}-\sqrt{6}} = \ldots\ldots ?$

57). $\frac{2+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \ldots\ldots ?$

58). $\frac{1}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \ldots\ldots ?$

59). $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z}} = \ldots\ldots ?$

60). $\frac{a^2+a\sqrt{b}-\sqrt{ab}-a}{a+\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \ldots\ldots ?$

61). $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}} = ?$

Uebungsbeispiele: | **Resultate:** | **Andeutungen:**

62). $\dfrac{1}{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}} = \dots\dots ?$ man wende zweimal den Satz: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$ an.

63). $\dfrac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}} = \dots\dots ?$ man multipliziere Zähler u. Nenner mit $\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}$, wonach man im Nenner nur noch Quadratwurzeln hat, alsdann verfahre man nach dem Beispiel 23.

64). $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}} = \dots\dots ?$

65). $\dfrac{1}{\sqrt{x-\sqrt{y}}} = \dots\dots ?$ man verfahre erst nach dem im Zusatz 2, Seite 242, aufgestellten 1. Fall, dann nach dem 2. Fall.

66). $\dfrac{13}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}} = \dots\dots ?$

67). $3:\sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \dots\dots ?$

68). $\dfrac{1-a}{\sqrt{1-\sqrt{a}}} = \dots\dots ?$

69). $\dfrac{8\sqrt{2-3\sqrt{2}}}{4\sqrt[4]{5+3\sqrt{3}}} = \dots\dots ?$ die bei dem Rationalmachen des Nenners im Zähler vorkommenden Multiplikationen **ungleichnamiger** Wurzeln führe man nach d. Lehrs. 18, S. 220 aus.

70). $\left(\sqrt[3]{\dfrac{a}{(a-x)^2}}:\sqrt[6]{\dfrac{a^{-2}}{(a-x)^2}}\right)\cdot\left(\sqrt{\dfrac{a^3}{a-x}}:\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{a-x}}\right)$ man führe zuerst die in den einzelnen Klammern stehenden angedeuteten Divisionen aus, dann multipliziere man und mache schliesslich den Divisor des erhaltenen Quotienten **rational.**

71). $\dfrac{5}{3-\sqrt[3]{12}} = \dfrac{5}{\sqrt[3]{3^3}-\sqrt[3]{12}} = \dots ?$ nachdem man im Nenner die Differenz zweier **Kubikwurzeln** hergestellt hat, verfahre man nach dem im Zusatz 2, Seite 242 aufgestellten Beispiel 5, indem man Zähler und Nenner mit

$$\sqrt[3]{(3^3)^2}+\sqrt[3]{3^3.\,12}+\sqrt[3]{12^2}$$

multipliziert.

72). $\dfrac{1}{2+\sqrt[5]{2}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2^5}+\sqrt[5]{2}} = \dots ?$ man stelle für die fünfte Wurzeln ähnliche Betrachtungen an, wie es für die 3. in dem Beispiel 5 des Zusatzes 2, Seite 242, geschehen ist.

73). $\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{m}}{a-\sqrt{m}}} = \dots\dots ?$ man betrachte zunächst den Radikanden für sich und mache den Nenner desselben rational; dann hat man noch die Wurzel aus einem Quotienten, wobei man den Zusatz 2, Seite 203, beachte.

74). $\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}} = \dots\dots ?$

75). $\sqrt{\dfrac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}} = \dots\dots ?$

14). Ueber die Radizierung algebraischer Summen und dekadischer Zahlen.

In den vorhergehenden Abschnitten wurde gezeigt, wie man ein Produkt, ein Bruch, eine Potenz und eine Wurzel radiziert. Aus Zahlen konnte bis jetzt nur dann die Wurzel gezogen werden, wenn sie sich als Potenzen darstellen liessen, die mit der betreff. Wurzel gleiche Exponenten hatten, so z. B. aus

$\sqrt[3]{27}$, indem man

$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3}$ schreiben kann und sich hieraus

$\sqrt[3]{27} = 3$ ergibt.

In diesem Abschnitt sollen nun die Regeln aufgestellt werden nach welchen man **algebr. Summen**, sogen. **Aggregate**, und **beliebige Zahlen** radizieren kann.

Da, wie aus nachstehendem ersichtlich, die Operationen nach welchen die Radizierung algebr. Summen und dekadischer Zahlen ausgeführt wird, verschieden sind, indem sie sich nach den betreffenden Wurzelexponenten richten und da ausserdem die Radizierung dekadischer Zahlen auf die algebraischer Summen zurückgeführt wird, so kann man bei der Radizierung algebraischer Summen und dekadischer Zahlen folgende Operationen unterscheiden:

a). **Quadratwurzelausziehung** aus **algebraischen Summen**,

b). **Quadratwurzelausziehung** aus **dekadischen Zahlen**,

c). **Kubikwurzelausziehung** aus **algebraischen Summen**,

d). **Kubikwurzelausziehung** aus **dekadischen Zahlen**,

e). **Ausziehung höherer Wurzeln** aus **algebraischen Summen**,

f). **Ausziehung höherer Wurzeln** aus **dekadischen Zahlen**.

a). Quadratwurzelausziehung aus algebraischen Summen.

Bei der Quadratwurzelausziehung aus algebraischen Summen kann man 2 Fälle unterscheiden, nämlich:

α). die gedachte Wurzel ist **rational**, d. h. es gibt ein genau angebbarer Ausdruck, der in die 2te Potenz erhoben gleich der gegebenen algebr. Summe ist,

oder, was man allerdings oft nicht sofort beurteilen kann:

β). die gedachte Wurzel ist **irrational**, d. h. es gibt kein genau angebbarer Ausdruck, welcher der angeführten Bedingung genügt.

α). Ausziehung rationaler Quadratwurzeln, deren Radikanden algebraische Summen sind.

Um eine Regel für die gedachte Quadratwurzelausziehung aufstellen zu können, mache man folgende Betrachtung:

Nach dem auf Seite 54 aufgestellten Lehrsatz 14, ist z. B.:

$$(a+b+c)^2 = a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$

oder, wenn man die rechte Seite alphabetisch, bezw. nach Potenzen der Hauptgrösse a ordnet:

$$(a+b+c)^2 = a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$$

Hieraus ergibt sich nun, dass auch:

$$\sqrt{(a+b+c)^2} = \sqrt{a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2}$$

oder:

1). $\sqrt{a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2} = a+b+c$ ist.

Hat man nun einen algebr. Ausdruck, z. B.:

$$a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$$

welcher alphabetisch und nach Potenzen eines und desselben Buchstabens geordnet ist und man will die Quadratwurzel aus demselben ziehen, so ist aus vorstehender Relation 1). ersichtlich, dass die gesuchte Wurzel wiederum eine Summe sein muss und dass man das 1. Glied dieser Wurzel, nämlich a findet, indem man aus dem 1. Glied des Radikanden, nämlich aus a^2, die 2. Wurzel zieht. Nimmt man nun das Quadrat des soeben gefundenen 1. Gliedes der Wurzel von dem zu radizierenden Ausdruck weg, so bleibt als Rest der geordnete Ausdruck:

$$2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$$

Hieraus ist ersichtlich, dass man das zu bestimmende 2. Glied der Wurzel, nämlich b findet, wenn man mit dem doppelten 1. Glied, nämlich mit $2a$, in das erste Glied des Restes dividiert. Nimmt man nun das doppelte Produkt des 1. Gliedes mal dem soeben bestimmten 2. Glied der Wurzel und auch noch das Quadrat des soeben bestimmten 2. Gliedes von dem früheren Rest des Radikanden weg, so bleibt als neuer Rest der geordnete Ausdruck:

$2ac+2bc+c^2$ für welchen man auch:

$(2a+2b)c+c^2$ gesetzt denken kann.

Hieraus ist ersichtlich, dass man das noch zu bestimmende 3. Glied der Wurzel, nämlich c findet, wenn man mit der doppelten Summe der beiden bereits bestimmten ersten Glieder der Wurzel, nämlich mit $2a+2b$, den zuletzt erhaltenen Rest dividiert. Subtrahiert man nun das Produkt, gebildet aus der doppelten Summe der beiden ersten Glieder und dem soeben gefundenen 3. Gliede der Wurzel und auch noch das Quadrat des soeben bestimmten 3. Gliedes von dem letzten Rest des Radikanden, so ist für das gegebene Beispiel die Wurzelausziehung erledigt.

Sollten bei anderen Beispielen noch weitere Glieder im Rest verbleiben, so zeigt ein be-

treffendes Beispiel, dass man weitere analoge Betrachtungen anstellen kann, bezw. dass man auf analoge Weise weiter verfahren kann.

Aus dieser Betrachtung, welche man noch an verschiedenen anderen Beispielen anstellen kann, lässt sich nachstehende Regel ableiten:

Regel 1. Man zieht aus einer algebraischen Summe die Quadratwurzel, indem man:

1). die gegebene algebraische Summe alphabetisch und nach Potenzen einer Hauptgrösse ordnet (siehe die Erkl. 51), dann

2). aus dem ersten Gliede des geordneten Radikanden die Quadratwurzel zieht, wodurch das 1. Glied a der gesuchten Wurzel bestimmt wird, dann

3). das Quadrat dieses 1. Gliedes, nämlich a^2, von dem Radikanden subtrahiert und den Rest des Radikanden wieder in geordneter Form niederschreibt, dann

4). mit dem doppelten Produkte des vorhin bestimmten 1. Gliedes der Wurzel, nämlich mit $2a$, in das 1. Glied des Restes des Radikanden dividiert, wodurch das 2. Glied b der gesuchten Wurzel bestimmt wird, dann

5). das doppelte Produkt des 1. Gliedes a und des soeben bestimmten 2. Gliedes b der Wurzel und auch noch das Quadrat des soeben gefundenen 2. Gliedes, nämlich b^2, von dem Rest des Radikanden subtrahiert.

Nunmehr können 2 Fälle eintreten, entweder es bleibt kein Rest mehr, wie in nebenstehendem Beispiel 1, oder es bleibt noch ein Rest. Im 1. Fall ist die Wurzelausziehung fertig und die erhaltene Wurzel ist ein Binomium; im 2. Fall ist die Wurzelausziehung noch nicht fertig und man verfährt alsdann weiter, indem man:

6). den erhaltenen Rest ordnet und mit dem doppelten Produkt der Summe der beiden ersten Glieder der Wurzel, nämlich mit $2a + 2b$, in diesen Rest dividiert. Dies geschieht, indem man nur mit dem 1. Glied des Divisors (mit $2a$) in das 1. Glied des Dividenden, des Radikandenrestes, dividiert, womit das 3. Glied c der gesuchten Wurzel bestimmt wird, dann

7). das doppelte Produkt der Summe der beiden ersten Glieder und des so-

Beispiel 1.

$$\sqrt{4x^4 + 12x^2y^3 + 9y^6} = \underbrace{2x^2}_{a} + \underbrace{3y^3}_{b}$$

$$\begin{array}{rl}
 & -4x^4 \quad (= a^2 = (2x^2)^2) \\
\hline
(2a = 2.2x^2 =)\ 4x^2 & \big|\ 12x^2y^3 + 9y^6 \\
 & -12x^2y^3 - 9y^6 \quad (2a.b + b^2 = 2.2x^2.3y^3 + (3y^3)^2) \\
\hline
 & \quad \cdot \qquad \cdot
\end{array}$$

Beispiel 2.

$$\sqrt{x^2 + 4xy + 6xz + 4y^2 + 12yz + 9z^2} = \underbrace{x}_{a} + \underbrace{2y}_{b} + \underbrace{3z}_{c}$$

$$\begin{array}{rl}
 & -x^2 \quad (= a^2) \\
\hline
(2a =)\ 2x & \big|\ 4xy + 6xz + 4y^2 + 12yz + 9z^2 \\
 & -4xy \qquad\quad - 4y^2 \quad (= 2ab + b^2) \\
\hline
(2a + 2b =)\ 2x + 4y & \big|\ 6xz + 12yz + 9z^2 \\
 & -6xz - 12yz - 9z^2 \quad (= 2ac + 2bc + c^2) \\
\hline
 & \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot
\end{array}$$

eben bestimmten 3. Gliedes c der Wurzel und auch noch das Quadrat des soeben gefundenen 3. Gliedes, nämlich c^2, von dem Rest des Radikanden subtrahiert.

Nunmehr können wieder 2 Fälle eintreten, entweder es bleibt kein Rest mehr, wie in umstehendem Beispiel 2, oder es bleibt noch ein Rest. Im 1. Fall ist die Wurzelausziehung fertig und die erhaltene Wurzel ist ein Trinomium; im 2. Fall ist die Wurzelausziehung noch nicht fertig und man verfährt weiter, indem man:

8). den erhaltenen Rest wieder ordnet und ganz analog wie unter 6). und 7). angegeben und aus nebenstehendem Beispiel 3 ersichtlich ist, verfährt, u.s.f.

Die Probe für die Richtigkeit der ausgeführten Operation besteht darin, dass die erhaltene Wurzel in die 2[te] Potenz erhoben den zu radizierenden Ausdruck ergeben muss.

Man siehe die nebenstehenden Beispiele 1—3, beachte die Erkl. 51 und die Regeln 2 und 3.

Erkl. 50. Bemerkt sei hier, dass nach dem Lehrsatz 1, Seite 187, der gefundenen ganzen Wurzel jedes der Vorzeichen $+$ oder $-$ entspricht. Man siehe die Andeutung zu dem gelösten Beispiel 1 in der folgenden Aufgabe 29.

Erkl. 51. Beim ordnen des Radikanden und der einzelnen Reste, welche sich bei der Quadratwurzelausziehung ergeben, ist es nicht nötig, dass die ganze Summe geordnet ist, es genügt stets, wenn das 1. Glied jedesmal seine richtige Stelle einnimmt (man siehe nebensteh. Beisp. 3).

Beispiel 3.

$$\sqrt{4x^2-12xy+9y^2+4xz-6yz+z^2-8xv+12yv-4zv+4v^2} = \underbrace{2x}_{a}\underbrace{-3y}_{b}\underbrace{+z}_{c}\underbrace{-2v}_{d}$$

$+4x^2$ (= a²)
$-$

(2a =) $4x \mid -12xy+9y^2+4xz-6yz+z^2-8xv+12yv-4zv+4v^2$
$-12xy+9y^2$ (= 2ab + b²)
$+ \quad -$

(2a + 2b =) $4x-6y \mid 4xz-6yz+z^2-8xv+12yv-4zv+4v^2$
$4xz-6yz+z^2$ (= 2ac + 2bc + c²)
$- \quad + \quad -$

(2a + 2b + 2c =) $4x-6y+2z \mid -8xv+12yv-4zv+4v^2$
$-8xv+12yv-4zv+4v^2$ (= 2ad + 2bd + 2cd + d²)
$+ \quad - \quad + \quad -$
" " " "

In Betreff des Ordnens des Radikanden und des jeweiligen Restes siehe man die Erkl. 51.

Aufgabe 29. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Radizierungen nach vorstehender Regel 1 ausführen, dabei den Zusatz 4, Seite 201, beachten.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $\sqrt{16p^2-48pq+36q^2} =$. . .	$4p-6q$	Nach der vorstehenden Regel 1, ist:

$$\sqrt{16p^2-48pq+36q^2} = \underbrace{4p}_{a}\underbrace{-6q}_{b}$$

$-16p^2$ (= a²)

(2a =) $8p \mid -48pq+36q^2$
$-48pq+36q^2$ (= 2ab + b²)
$+ \quad -$
" "

$= \pm(4p-6q)$. . Soll man auf die Vorzeichen, welche der Wur-

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
		zel zukommen, Rücksicht nehmen, also soll man den ganzen Radikanden als eine **allgemeine** Grösse betrachten, so ist nach dem Zusatz 4, Seite 201: $\sqrt{16p^2-48pq+36q^2} = \sqrt{+1.(16p^2-48pq+36q^2)} = \sqrt{+1}.\sqrt{16p^2-48pq+36q^2} = \pm 1.(4p-6q) = \pm(4p-6q)$
2). $\sqrt{a^{2m}+2a^m x^n+x^{2n}} = \ldots$	$a^m+x^n \ldots$ $= \pm(a^m+x^n)$	$\sqrt{a^{2m}+2a^m x^n+x^{2n}} = \underbrace{a^m}_{a}+\underbrace{x^n}_{b}$; $\pm a^{2m}$; $2a^m \mid 2a^m x^n+x^{2n}$; $2a^m x^n+x^{2n}$; $-\quad -$
3). $\sqrt{\frac{4}{9}a^2x^2-abxy+\frac{9}{16}b^2y^2} =$	$\frac{2}{3}ax-\frac{3}{4}by \ldots$ $= \pm\left(\frac{2}{3}ax-\frac{3}{4}by\right)$	$\sqrt{\frac{4}{9}a^2x^2-abxy+\frac{9}{16}b^2y^2} = \underbrace{\frac{2}{3}ax}_{a}-\underbrace{\frac{3}{4}by}_{b}$; $\pm\frac{4}{9}a^2x^2$; $\frac{4}{3}ax \mid -abxy+\frac{9}{16}b^2y^2$; $-abxy+\frac{9}{16}b^2y^2$; $+\quad -$
4). $\sqrt{25a^{-14}b^{-6}-30a^{-6}b^2+9a^2b^{10}} =$	$5a^{-7}b^{-3}-3ab^5 \ldots$ $= \pm\left(\frac{5}{a^7b^3}-3ab^5\right)$	analog wie in den vorhergehenden Beispielen.
5). $\sqrt{2+a^2x^{-2}+a^{-2}x^2} =$	$\pm\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right) \ldots$	Um zu untersuchen ob geordnet ist, bringt man am besten die negativen Exponenten weg. Ordnet man nach der Hauptgrösse a, so denke man sich der Zahl 2 den Faktor a^0 ($=1$) beigesetzt. Hiernach erhält man: $\sqrt{2+a^2x^{-2}+a^{-2}x^2} = \sqrt{\frac{a^2}{x^2}+2.a^0+\frac{x^2}{a^2}}$ nunmehr verfahre man analog wie in den vorhergehenden Beispielen.
6). $\sqrt{x+2\sqrt{xy}+y} = \ldots$	$\pm(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \ldots$	$\sqrt{x+2\sqrt{xy}+y} = \underbrace{\sqrt{x}}_{a}+\underbrace{\sqrt{y}}_{b}$; $\pm x$; $2\sqrt{x} \mid 2\sqrt{xy}+y$; $2\sqrt{xy}+y$; $-\quad -$
7). $\sqrt{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}} =$	$\pm\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right) \ldots$	$\sqrt{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}} = \underbrace{\sqrt[3]{x}}_{a}$ *) $+\underbrace{\sqrt[3]{y}}_{b}$; $\pm\sqrt[3]{x^2}$; $2\sqrt[3]{x} \mid 2\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$; $2\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$; $-\quad -$

*). Man beachte, dass

$$\sqrt{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[3]{\sqrt{x^2}} = \sqrt[3]{x} \text{ ist.}$$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

8). $\sqrt{\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[12]{x^2y^3} + \sqrt{y}} = \pm\left(\sqrt[6]{x} - \sqrt[4]{y}\right)$. .

$$\begin{array}{l|l} & \sqrt{\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[12]{x^2y^3} + \sqrt{y}} = \underbrace{\sqrt[6]{x}}_{a}{}^{*)} - \underbrace{\sqrt[4]{y}}_{b}{}^{**)} \\ & \pm\sqrt[3]{x} \\ \hline 2\sqrt[6]{x} & -2\sqrt[12]{x^2y^3} + \sqrt{y} \\ & -2\sqrt[12]{x^2y^3} + \sqrt{y} \\ & \;+ \qquad\qquad\;\; - \\ \hline & \quad = \qquad\quad = \end{array}$$

*). Man beachte, dass $\sqrt{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[6]{x}$ ist.

**). Man beachte, dass

$$\frac{\sqrt[12]{x^2y^3}}{\sqrt[6]{x}} = \sqrt[12]{\frac{x^2y^3}{x^2}} = \sqrt[12]{y^3} = \sqrt[4]{y} \text{ ist.}$$

9). $\sqrt{4x^2 + 16x^6 + 12x^3 - 24x^5 - 7x^4}$

$= \pm(4x^3 - 3x^2 - 2x)$. . . den Radikanden geordnet, erhält man analog dem Beispiel 2, Seite 259:

$$\begin{array}{l|l} & \sqrt{16x^6 - 24x^5 - 7x^4 + 12x^3 + 4x^2} = \underbrace{4x^3}_{a} - \underbrace{3x^2}_{b} - \underbrace{2x}_{c} \\ & \pm 16x^6 \\ \hline 8x^3 & -24x^5 - 7x^4 + 12x^3 + 4x^2 \\ & -24x^5 + 9x^4 \\ & \;+ \qquad\;\; - \\ \hline 8x^3 - 6x^2 & -16x^4 + 12x^3 + 4x^2 \\ & -16x^4 + 12x^3 + 4x^2 \\ & \;+ \qquad\; - \qquad\; - \\ \hline & \quad = \qquad = \qquad = \end{array}$$

10). $\sqrt{4a^4 - 12a + 25a^{-2} - 24a^{-5} + 16a^{-8}}$

$= \pm(2a^2 - 3a^{-1} + 4a^{-4})$. . in Betreff des Ordnens verfahre man wie in dem Beispiel 5, im übrigen analog wie vorhin.

$= \pm\left(2a^2 - \frac{3}{a} + \frac{4}{a^4}\right)$

11). $\sqrt{a^2b - 2ab\sqrt{ab} + ab^2 + 2ab\sqrt{a} - 2ab\sqrt{b} + ab}$

$= \pm(a\sqrt{b} - b\sqrt{a} + \sqrt{ab})$ analog den Beispielen 6, 7, 8 und 9.

12). $\sqrt{4x^2 - 12xy + 9y^2 + 4xz - 6yz + z^2 - 8xv + 12yv - 4zv + 4v^2}$

$= \pm(2x - 3y + z - 2v)$. . analog dem Beispiel 3, Seite 260.

13). $\sqrt{4m^2 - 12mx^2 + 9x^4} =$? . . . analog dem gelösten Beispiel 1.

14). $\sqrt{9x^6y^8 - 30x^5y^4z^5 + 25x^4z^{10}}$. . . ?

15). $\sqrt{a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2} =$?

16). $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2} =$? . . . Bei der Untersuchung ob geordnet ist, beachte man, dass der Zahl 2 der Faktor x^0 ($= 1$) beigegeben werden kann.

17). $\sqrt{a^{6m} - 2a^{3m}b^{5m} + b^{10m}} =$. . . ? . . . analog dem gelösten Beispiel 2.

18). $\sqrt{\frac{9}{25}x^4 - \frac{4}{5}x^2y^3 + \frac{4}{9}y^6} =$. . ?

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:

19). $\sqrt{25a^{-4m}b^{-6p} - 70a^{m}b^{-p} + 49a^{6m}b^{4p}} = ?$. . . analog dem gelösten Beispiel 4.

20). $\sqrt{\frac{25}{64} \cdot \frac{c^{-2}d^{-2}}{a^{-2}b^{-2}} - \frac{3a^2}{5d^2} + \frac{144}{625} \cdot \frac{a^2d^{-2}}{b^2c^{-2}}} = ?$

21). $\sqrt{a + 2\sqrt{ab} + b} =$? „ „ „ „ 6.

22). $\sqrt{4a - 12\sqrt{ab} + 9b} =$?

23). $\sqrt{\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{xy} + \sqrt{y}} =$. . . ?

24). $\sqrt{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[12]{x^2y^3} + \sqrt{y}} =$. . . ? „ „ „ „ 7.

25). $\sqrt{9\sqrt[3]{a^2} - 24\sqrt[6]{a^2b^3} + 16b} =$. . ?

26). $\sqrt{\sqrt[m]{x^2} - 2\sqrt[mn]{x^ny^m} + \sqrt[n]{y^2}} =$. . ?

27). $\sqrt{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4} =$. . ? „ „ „ „ 9.

28). $\sqrt{a^2 + 4ab + 6ac + 4b^2 + 12bc + 9c^2} = ?$

29). $\sqrt{9a^4 - 12a^3 + 34a^2 - 20a + 25} =$?

30). $\sqrt{1 - 2x^3 + x^4 - 2x + 3x^2} =$. . ?

31). $\sqrt{9a^6b^4 - 12a^4b^5 + 4a^2b^6 + 24a^5b^3c^3 - 16a^3b^4c^3 + 16a^4b^2c^6} = ?$

32). $\sqrt{\frac{6a^6b^4}{25c^6d^8} - \frac{12a^5b^5}{35c^7d^9} - \frac{232a^4b^6}{735c^8d^{10}} + \frac{16a^2b^8}{81c^{10}d^{12}} + \frac{16a^3b^7}{63c^9d^{11}}} = ?$ wenn man bei Brüchen im Zweifel ist, ob dieselben geordnet sind, kann man sie vorerst gleichnamig machen, ist aber hier nicht nötig.

33). $\sqrt{9x^{2m+2} + 42x^{4m-2} + 103x^{6m-6} + 126x^{8m-10} + 81x^{10m-14}} = ?$

34). $\sqrt{2a + 2a^{-1} + 3 + a^2 + a^{-2}} =$. . ?

35). $\sqrt{x - 2\sqrt[6]{x^3y^2} + \sqrt[4]{x^2z} + \sqrt[3]{y^2} - \sqrt[12]{b^4z^3} + \frac{1}{4}\sqrt{z}} = ?$ analog dem gelösten Beispiel 11, auch kann man vorteilhaft erst die sämmtlichen Summanden in gleichnamige Wurzeln umformen.

36). $\sqrt{17x^2 - 12x + 4 + 9x^6 - 12x^5 + 22x^4 - 24x^3} = ?$ analog dem gelösten Beispiel 12.

37). $\sqrt{2acm^2 - 2abm - 2adm - 2bcm - 2cdm + 2bd + a^2m^2 + c^2m^2 + b^2 + d^2} = ?$

38). $\sqrt{x^2 - 6xy + 10xz - 14xv + 9y^2 - 30yz + 42yv + 25z^2 - 70zv + 49v^2} = ?$

β). Ausziehung irrationaler Quadratwurzeln, deren Radikanden algebraische Summen sind.

Hat man aus einer algebraischen Summe die Quadratwurzel zu ziehen und die nach Regel 1, Seite 259, auszuführende Operation geht, soweit man sie auch fortsetzen mag, ohne Rest nicht auf, was man bei einiger Uebung bald erkennt, so existiert kein genau angebbarer Wert, der in die 2te Potenz erhoben, die zu radizierende Summe ergibt, d. h. die betreffende Wurzel ist **irrational**.

In diesem Falle beachte man folgende Regel:

Regel 2. Bei der Ausziehung irrationaler Quadratwurzeln, deren Radikanden algebraische Summen sind, verfahre man ganz genau so, wie in der Regel 1, Seite 259, angegeben ist und bestimme auf diese Weise eine beliebige Anzahl Glieder der fraglichen Wurzel, welche in Form einer unendlichen Reihe erscheint.

Die Probe für die Richtigkeit der gemachten angenäherten Radizierung besteht darin, dass, wenn man die unendliche Reihe in deren Form die Wurzel erscheint, an irgend einer Stelle abbricht und diesen Teil der Wurzel quadriert und hierzu noch den betreffenden Rest des Radikanden addiert, die zu radizierende Summe herauskommen muss.

Man siehe die nebenstehenden Beispiele und beachte die Erkl. 52 u. 53.

Erkl. 52. Die in der Regel 2 angedeutete Radizierung hat nur dann und hauptsächlich nur in der höheren Analysis besonderen Wert, wenn die Wurzel in Form einer **konvergenten** Reihe (siehe Erkl. 73, Seite 168) erscheint, d. h. wenn die Summe einer Anzahl Glieder der Wurzel sich um so mehr einem bestimmten Grenzwerte (dem Radikanden) nähert, je mehr Glieder man zur Bildung dieser Summe nimmt. Diese Summen sind dann **Näherungswerte** der gesuchten Wurzel. Das Bildungsgesetz der Glieder solcher Reihen lässt sich erkennen und deshalb kann man solche Reihen beliebig erweitern.

Erkl. 53. Stösst man bei der Ausziehung von Quadratwurzeln, deren Radikanden algebraische Summen sind, auf irrationale Wurzeln, so unterbleibt meistens die Radizierung, ausgenommen in denjenigen Fällen in welchen dies besonders verlangt wird. Man versucht in diesen Fällen die zu radizierende Summe in solche Faktoren zu zerlegen, aus welchen

Beispiel 1.

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} - \dots$$

$$\begin{array}{l}
\pm 1 \\
\hline
2 \,|\, -x \\
\quad -x + \frac{x^2}{4} \\
\quad + \quad - \\
\hline
2-x \,|\, -\frac{x^2}{4} \\
\quad -\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{64} \\
\quad + \quad - \quad - \\
\hline
2 - x - \frac{x^2}{4} \,|\, -\frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{64} \\
\quad -\frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{64} + \frac{x^6}{256} \\
\quad + \quad - \quad - \quad - \\
\hline
2 - x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} \,|\, -\frac{5x^4}{64} - \frac{x^5}{64} - \frac{x^6}{256}
\end{array}$$

u. s. f., u. s. f.

Probe: Bricht man am dritten Gliede der Wurzel ab, so muss:

$$\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right)^2 + \text{dem } 3^{\text{ten}} \text{ Reste, nämlich:}$$

$$\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right)^2 - \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{64} = 1 - x \text{ sein,}$$

wovon man sich leicht überzeugen kann.

Beispiel 2.

Gegeben sei:

$$\sqrt{\frac{a^2b^2c^4}{4} - \frac{a^3b^2c^4}{4} + \frac{a^2b^3c^4}{4}}$$

Wollte man diese Radizierung ausführen, so wird man bald merken, dass die Wurzel irrational ist. Man setzt daher:

$$\sqrt{\frac{a^2b^2c^4}{4} - \frac{a^3b^2c^4}{4} - \frac{a^2b^3c^4}{4}} =$$

$$\sqrt{\frac{a^2b^2c^4}{4}\left(1 - a + b\right)} =$$

$$\frac{abc^2}{2} \cdot \sqrt{1 - a + b}$$

man teilweise die Wurzel ziehen kann, wodurch wenigstens der gegebene Ausdruck reduziert wird.

Man siehe nebenstehendes Beispiel 2 und die entsprechenden Beispiele in dem Abschnitt: **Vermischte Aufgaben.**

Aufgabe 30. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Radizierungen nach vorstehender Regel 2 näherungsweise ausführen, dabei die Erkl. 50 beachten.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $\sqrt{1+x} = \pm\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\frac{7}{256}x^5-\ldots\right)$ analog wie das Beispiel 1, Seite 148.

2). $\sqrt{1-x} = \pm\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4-\frac{7}{256}x^5-\ldots\right)$ dies kann man auch aus dem Beispiel 1 ableiten, wenn man für x die Grösse: $-x$ setzt.

3). $\sqrt{1+m} = \ldots\ldots\ldots ?$

4). $\sqrt{1-m} = \ldots\ldots\ldots ?$

5). $\sqrt{x^2-y^2} = \ldots\ldots\ldots ?$

6). $\sqrt{a^2+b^2} = \ldots\ldots\ldots ?$

7). $\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} = \ldots\ldots\ldots ?$ das Resultat erhält man, wenn die aus Beispiel 5 sich ergebende Reihe nach den Regeln der Partialdivision in 1 dividiert.

8). $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \ldots\ldots\ldots ?$ analog wie Beispiel 7.

9). $\sqrt{x^2+x+1} = \ldots\ldots\ldots ?$

10). $\sqrt{x^2-x-1} = \ldots\ldots\ldots ?$

Aufgabe 31. Man soll mit Hülfe der in den Uebungsbeispielen der vorhergehenden Aufgabe sich ergebenden Reihen die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Quadratwurzelausziehungen näherungsweise ausführen.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $\sqrt{2}$ ist näherungsweise $= \ldots \pm 1{,}414214\ldots$... man setze:

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{49}}$$

dann setze man in dem Beispiel 1 der Aufgabe 30 für x überall den Wert: $\frac{1}{49}$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
		und berechne eine Anzahl der Glieder der nunmehr konvergenten Reihe. Man hätte auch $\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{9}}$ setzen und das Beispiel 2 in Aufgabe 30 benutzen können.
2). $\sqrt{30}$ ist näherungsweise = . . .	$\pm$ 5,477226....	. . . man setze: $\sqrt{30} = \frac{11}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{121}}$ und benutze das gelöste Beispiel 2 der Aufgabe 30, wie vorhin, indem man: $x = \frac{1}{121}$ setzt.
3). $\sqrt{10}$ = ...	? . .	man setze: $\sqrt{10} = \frac{10}{3}\sqrt{1 - \frac{1}{10}}$
4). $\sqrt{3}$ = ...	? . .	„ „ $\sqrt{3} = \frac{12}{7}\sqrt{1 + \frac{1}{48}}$
5). $\sqrt{17}$ = ...	? . .	„ „ $\sqrt{17} = \frac{17}{4}\sqrt{1 - \frac{1}{17}}$
6). $\sqrt{11}$ = ...	? . .	„ „ $\sqrt{11} = \frac{10}{3}\sqrt{1 - \frac{1}{100}}$
7). $\sqrt{5}$ = ...	? . .	„ „ $\sqrt{5} = \frac{20}{9}\sqrt{1 + \frac{1}{80}}$
8). $\sqrt{6}$ = ...	? . .	„ „ $\sqrt{6} = \frac{5}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{25}}$
9). $\sqrt{7}$ = ...	? . .	„ „ $\sqrt{7} = \frac{8}{3}\sqrt{1 - \frac{1}{64}}$
10). $\sqrt{82}$ ist näherungsweise = . .	$\pm$ 9,0553852....	man setze: $\sqrt{82} = \sqrt{9^2 + 1}$ und benutze die in dem Beispiel 6 der Aufgabe 30 sich ergebende Reihe, indem man $a = 9$ und $b = 1$ setzt.
11). $\sqrt{101}$ = ...	? . .	analog wie Beispiel 10.
12). $\sqrt{48}$ = ...	? . .	man setze: $\sqrt{48} = \sqrt{7^2 - 1}$ und benutze die in dem Beispiel 5 der Aufgabe 30 sich ergebende Reihe, indem dem man $x = 7$ und $y = 1$ setzt.

b). Quadratwurzelausziehung dekadischer Zahlen.

Da man jede dekadische Zahl in Form einer Summe schreiben kann, z. B.:

$$2968 = 2000 + 900 + 60 + 8$$

und wie nachstehend gezeigt wird, die Quadratwurzelausziehung dekadischer Zahlen auf die algebraischer Summen zurückführen kann, so wurde die Quadratwurzelausziehung dekadischer Zahlen in dem Abschnitt: „Die Radizicrung algebraischer Summen“ aufgenommen.

Die Quadratwurzelausziehung aus dekadischen Zahlen kann man, je nachdem die zu radizierenden Zahlen ganz oder gebrochen sind, einteilen in:

α). die Quadratwurzelausziehung aus **ganzen Zahlen,**
β). die Quadratwurzelausziehung aus **Dezimalbrüchen,**
γ). die Quadratwurzelausziehung aus **gewöhnlichen Brüchen.**

Bei jeder dieser drei Operationen unterscheidet man wieder zwei Fälle, nämlich:

1). die zu radizierenden Zahlen sind sogenannte **Quadratzahlen**, bezw. die betreff. Wurzeln sind **rational** oder sogenannte **genaue Quadratwurzeln**, und
2). die zu radizierenden Zahlen sind keine sog. Quadratzahlen, bezw. die betreffenden Wurzeln sind **irrational** oder sog. **ungenaue Quadratwurzeln.**

α). Ausziehung rationaler Quadratwurzeln, deren Radikanden ganze Zahlen sind.

Bei der Ausziehung rationaler Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen kann man 2 Fälle unterscheiden, nämlich:

1). die zu suchende Wurzel lässt sich mittelst Kenntnis einer gewissen Reihe sog. Quadratzahlen **direkt** bestimmen

oder:

2). dies ist nicht der Fall. Für diesen Fall muss eine Regel aufgestellt werden, nach welcher die zu bestimmende Wurzel gefunden werden kann.

$1^2 = 1$	dies sind Quadratzahlen	. . . $\sqrt{1} = 1$
$2^2 = 4$		. . . $\sqrt{4} = 2$
$3^2 = 9$		. . . $\sqrt{9} = 3$
$4^2 = 16$		. . . $\sqrt{16} = 4$
$5^2 = 25$		. . . $\sqrt{25} = 5$
$6^2 = 36$		. . . $\sqrt{36} = 6$
$7^2 = 49$		. . . $\sqrt{49} = 7$
$8^2 = 64$		. . . $\sqrt{64} = 8$
$9^2 = 81$		. . . $\sqrt{81} = 9$
$10^2 = 100$		. . . $\sqrt{100} = 10$
$11^2 = 121$		. . . $\sqrt{121} = 11$
$12^2 = 144$		. . . $\sqrt{144} = 12$
u. s. f.		

Ehe nun zur Aufstellung einer Regel geschritten wird, nach welcher man die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl ziehen kann, muss zunächst festgestellt werden, wie man aus der Anzahl der Ziffern einer gegebenen Zahl auf die Anzahl der Ziffern der zu bestimmenden Quadratwurzeln schliessen kann, und dies geschieht mittelst des nachstehenden Lehrsatzes:

Lehrsatz 22. Die Quadratwurzel aus einer nziffrigen Zahl hat $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n+1}{2}$ Ziffern, nämlich je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl vorstellt.

Beweis. Quadriert man der Reihe nach je die kleinste und die grösste 1-, 2-, 3-, 4- ziffrige Zahl und schreibt diese somit erhaltenen Potenzen nach Antwort der Frage 15, Seite 180, in Wurzelform, wie folgt:

$1^2 = 1$	 $\sqrt{1}$	$= \sqrt{1^2}$	$= 1$	
$9^2 = 81$	 $\sqrt{81}$	$= \sqrt{9^2}$	$= 9$	
$10^2 = 100$	 $\sqrt{100}$	$= \sqrt{10^2}$	$= 10$	
$99^2 = 9801$	... $\sqrt{9801}$	$= \sqrt{99^2}$	$= 99$	
$100^2 = 10000$	... $\sqrt{10000}$	$= \sqrt{100^2}$	$= 100$	
$999^2 = 998001$	.. $\sqrt{998001}$	$= \sqrt{999^2}$	$= 999$	
$1000^2 = 1000000$	.. $\sqrt{1000000}$	$= \sqrt{1000^2}$	$= 1000$	
$9999^2 = 99980001$	.. $\sqrt{99980001}$	$= \sqrt{9999^2}$	$= 9999$	
u. s. f.		u. s. f.		

so ersieht man aus dieser Zusammenstellung, dass:

1). das Quadrat einer einziffrigen Zahl mindestens eine und höchstens zwei Ziffern hat und dass umgekehrt die Quadratwurzel aus einer ein- oder zweiziffrigen Zahl nur eine einziffrige Zahl sein kann;

2). das Quadrat einer zweiziffrigen Zahl mindestens drei und höchstens vier Ziffern hat und dass umgekehrt die Quadratwurzel aus einer drei- oder vierziffrigen Zahl nur eine zweiziffrige Zahl sein kann;

3). das Quadrat einer dreiziffrigen Zahl mindestens fünf und höchstens sechs Ziffern hat und dass umgekehrt die Quadratwurzel aus einer fünf- oder sechsziffrigen Zahl nur eine dreiziffrige Zahl sein kann, u.s.f.

Setzt man diese Betrachtung fort, so kommt man zu dem **allgemeinen Schluss**, dass:

das Quadrat einer nziffrigen Zahl mindestens $2n - 1$ und höchstens $2n$ Ziffern hat und dass umgekehrt die Quadratwurzel aus einer nziffrigen Zahl nur eine $\frac{n+1}{2}$ oder $\frac{n}{2}$ziffrige Zahl sein kann, nämlich je nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist.

Erkl. 54. Aus vorstehendem Lehrsatz ergibt sich, dass aus der Anzahl der Ziffern einer Zahl auf die Anzahl der Ziffern der Quadratwurzel aus dieser Zahl geschlossen werden kann. **Teilt man nämlich die zu radizierende Zahl von rechts nach links in Klassen zu je zweien, wobei die letzte Klasse zur Linken ein- oder zweiziffrig sein kann, so ist die Anzahl der hierdurch entstehenden Klassen gleich der Anzahl der Ziffern der zu bestimmenden Quadratwurzel.**

Man siehe nebenstehende Beispiele.

Beispiele.

1). Gegeben sei:

$$\sqrt{96845281}$$

teilt man den Radikanden von rechts nach links in Klassen zu je zwei, wie folgt:

$$\sqrt{96|84|52|81}$$

so erhält man 4 solcher Klassen, mithin muss die zu bestimmende Quadratwurzel 4 Ziffern enthalten.

2). Gegeben sei:

$$\sqrt{27225}$$

teilt man den Radikanden von rechts nach links in Klassen zu je zwei, wie folgt:

$$\sqrt{2|72|25}$$

so erhält man 3 solcher Klassen, mithin muss die zu bestimmende Quadratwurzel 3 Ziffern enthalten.

Um nun eine Regel aufstellen zu können, nach welcher man die Quadratwurzel aus einer beliebigen ganzen Zahl ziehen kann, beachte man, dass jede Zahl sich in eine Summe, bezw. in eine nach Potenzen von 10 geordnete Summe zerlegen lässt, mithin deren Quadrat nach dem Lehrsatze 14, Seite 54, gebildet werden kann, wodurch umgekehrt die Quadratwurzelausziehung dekadischer Zahlen auf die algebraischer Summen zurückgeführt wird.

Wählt man eine beliebige Zahl, z. B.: 6497, deren Ziffern der Reihe nach allgemein mit: a, b, c und d bezeichnet seien, und schreibt dieselbe in der Form:

$$\underset{abcd}{6497} = \underset{a.1000}{6000} + \underset{b.100}{400} + \underset{c.10}{90} + \underset{d}{7}$$

oder in der Form:

$$\underset{abcd}{6497} = \underset{a.10^3}{6.10^3} + \underset{b.10^2}{4.10^2} + \underset{c.10}{9.10} + \underset{d}{7}$$

so erhält man nach dem Lehrsatz 14, Seite 54, für das Quadrat der in dieser Summenform dargestellten Zahl:

$$\underset{abcd}{6497^2} = (\underset{a.10^3}{6.10^3} + \underset{b.10^2}{4.10^2} + \underset{c.10}{9.10} + \underset{d}{7})^2$$

$$= \underset{(a.10^3)^2}{(6.10^3)^2} + \underset{2.b.10^2.a.10^3}{2.4.10^2.6.10^3} + \underset{(b.10^2)^2}{(4.10^2)^2} + \underset{2.c.10\,(a.10^3+b.10^2)}{2.9.10(6.10^3+4.10^2)} +$$

$$\underset{(c.10)^2}{(9.10)^2} + \underset{2.d\,(a.10^3+b.10^2+c.10)}{2.7(6.10^3+4.10^2+9.10)} + \underset{d^2}{7^2}$$

oder, wenn man die einzelnen Summanden nach Potenzen von 10 wie folgt ordnet:

$$\underset{abcd}{6497^2} = \underset{a^2.10^6}{6^2.10^6} + \underset{2ab.10^5}{2.6.4.10^5} + \underset{b^2.10^4}{4^2.10^4} + \underset{2c\,(10a+b).10^3}{2.9\,(60+4).10^3} + \underset{c^2.10^2}{9^2.10^2} + \underset{2d\,(100a+10b+c).10}{2.7\,(600+40+9).10} + \underset{d^2}{7^2}$$

Berechnet man jetzt die einzelnen Summanden und bildet die Summe derselben, so erhält man:

$$\begin{array}{rrl}
\underset{abcd}{6497^2} = & 36\,00\,00\,00 & \ldots = 6^2.10^6 \ldots\ldots = a^2.10^6 \\
 & +4\,80\,00\,00 & \ldots = 2.6.4.10^5 \ldots = 2ab.10^5 \\
 & +\;16\,00\,00 & \ldots = 4^2.10^4 \ldots\ldots = b^2.10^4 \\
 & +1\,15\,20\,00 & \ldots = 2.9\,(60+4) \ldots = 2c\,(10a+b).10^3 \\
 & +\;81\,00 & \ldots = 9^2.10^2 \ldots\ldots = c^2.10^2 \\
 & +\;9\,08\,60 & \ldots = 2.7\,(600+40+9).10 = 2d\,(100a+10b+c).10 \\
 & +\;49 & \ldots = 7^2 \ldots\ldots = d^2 \\
\hline
6497^2 = & 42\,21\,10\,09 &
\end{array}$$

Lässt man schliesslich die bei vorstehender Addition nicht in Betracht kommenden Nullen, welche zugleich die betreffenden Potenzen von 10 darstellen, weg, und zwar ohne hierbei die gegenseitigen Stellungen der zu addierenden übrig bleibenden Ziffern zu ändern, wovon man sich dadurch überzeugt, dass man (entsprechend dem vorstehenden Lehrsatze 22) die zu addierenden Posten durch Vertikalstriche von rechts nach links in Klassen zu je zwei abteilt, so erhält man nachstehendes Schema:

Schema.

6497^2 (abcd)	$= 36$	..	..		$= a^2$	1. Zeile	
	$+ 4$	8.	..		$= 2ab$	2. „	
	$+$	16	..		$= b^2$	3. „	
	$+ 1$	15	2.		$= 2c(10a+b)$...	4. „	
	$+$		81		$= c^2$	5. „	
	$+$	9	08	6.	$= 2d(100a+10b+c)$	6. „	
	$+$			49	$= d^2$	7. „	
6497^2 (abcd)	$= 42$	21	11	09			

Hat man nun umgekehrt aus der Zahl 42211109 die Quadratwurzel zu ziehen und man teilt dieselbe von rechts nach links in Klassen zu je zwei, wodurch man nach der Erkl. 54 auf die Anzahl der Ziffern der zu bestimmenden Wurzel schliessen kann, welche Ziffern der Reihe nach mit a, b, c und d bezeichnet seien, so ersieht man aus vorstehendem Schema Folgendes:

a). Die 1. Klasse links (siehe Zeile 1 des Schemas) enthält das Quadrat des ersten Gliedes a der Wurzel, nämlich a^2 (= 36) 1).

1). Sucht man also die Zahl, deren Quadrat der in der 1. Klasse stehenden Zahl am nächsten kommt, so hat man das 1. Glied a der Wurzel gefunden; a ist für das gegebene Beispiel = 6.

b). Hängt man der 1. Klasse die **erste Ziffer** der 2. Klasse an, so enthält die somit gebildete Zahl das doppelte Produkt des 1. und des 2. Gliedes der fraglichen Wurzel, nämlich $2ab$ (= 48) 2).
(siehe 2. Zeile des Schemas.)

2). Subtrahiert man hiernach das Quadrat des nach 1). gefundenen 1. Gliedes a der Wurzel, nämlich a^2 (= 36) von der 1. Klasse und fügt dem Reste die 1. Ziffer der 2. Klasse an und dividiert mit dem doppelten Produkt des 1. Gliedes, nämlich mit $2a$ (2.6) in die soeben gebildete Zahl, so erhält man die 2. Ziffer der Wurzel, nämlich b (= 4).

c). Hängt man der unter b). gebildeten Zahl die 2. Ziffer der 2. Klasse an, so enthält diese Zahl das Quadrat des 2. Gliedes, nämlich b^2 (= 16) (siehe 3. Zeile des Schemas.)

d). Hängt man der unter c). gebildeten Zahl die **erste Ziffer** der 3. Klasse an, so enthält diese somit gebildete Zahl das doppelte Produkt des 3. Gliedes c der fraglichen Wurzel und der aus den beiden ersten Ziffern a und b der Wurzel gebildeten Zahl $(10a+b)$, nämlich $2c(10a+b)$ 3).
(siehe 4. Zeile des Schemas.)

3). Subtrahiert man von der unter b). gebildeten Zahl das doppelte Produkt des 1. und 2. Gliedes der Wurzel, nämlich: $2ab$ (= 2.6.4), und hängt dem Reste die 2. Ziffer der 2. Klasse an und subtrahiert von dieser gebildeten Zahl das Quadrat des 2. Gliedes der Wurzel, nämlich b^2 (= 16), und fügt schliesslich dem Reste die **1. Ziffer** der 3. Klasse an und dividiert die somit gebildete Zahl durch das doppelte Produkt der aus den 2 ersten Gliedern der Wurzel gebildeten Zahl, nämlich durch $2(10a+b)$, in diesem Beispiel = 2(6.10+4) = 2.64 = 128, so erhält man die 3. Ziffer der Wurzel, nämlich c (= 9).

e). Hängt man der unter d). gebildeten Zahl die 2. Ziffer der 3. Klasse an, so enthält diese somit gebildete Zahl auch noch das Quadrat des 3. Gliedes der Wurzel, nämlich c^2 (= 81)
(siehe 5. Zeile des Schemas.)

f). Hängt man der unter e). gebildeten Zahl die **erste Ziffer** der 4. Klasse an, so enthält diese somit gebildete Zahl das doppelte Produkt des 4. Gliedes d der Wurzel und der aus den drei ersten Gliedern a, b und c der Wurzel gebildeten Zahl $(100a+10b+c)$, nämlich $2d(100a+10b+c)$ 4).
(siehe 6. Zeile des Schemas.)

4). Analog wie unter 3). findet man die 4. Ziffer d (= 7) der fraglichen Wurzel.

g). Hängt man der unter f). gebildeten Zahl die 2. Ziffer der 4. Klasse an, so enthält diese somit gebildete Zahl (also die ganze gegebene Zahl) auch noch das Quadrat des 4. Gliedes der Wurzel, nämlich d^2 (= 49)
(siehe 7. Zeile des Schemas.)

Hat die zu radizierende Zahl noch mehr Klassen, so ist die weitere Betrachtung eine analoge.

Aus vorstehender Betrachtung kann man nachstehende Regel ableiten:

Regel 3. Man zieht aus einer ganzen Zahl die Quadratwurzel, indem man: Hierbei beachte man nachstehende Beispiele 1, 2 und 3.

1). die gegebene Zahl von rechts nach links in Klassen zu je zwei abteilt. Durch die Anzahl dieser Klassen ist nach dem Lehrsatz 22 die Anzahl der Ziffern der Wurzel bestimmt;

2). diejenige grösste ganze, allgemein durch a bezeichnete Zahl sucht, deren Quadrat in der in der 1. Klasse stehenden Zahl enthalten ist und das Quadrat dieser gefundenen Zahl a von der 1. Klasse subtrahiert;

3). dem nunmehr erhaltenen Reste (derselbe kann auch $= 0$ sein) die **1. Ziffer** der 2. Klasse anhängt und diese somit gebildete Zahl durch das doppelte Produkt der ersten Wurzelziffer, nämlich durch $2a$ dividiert, wodurch man die 2[te], allgemein durch b bezeichnete Ziffer der Wurzel erhält; dann das doppelte Produkt der durch a und b gebildeten Zahl subtrahiert, dem erhaltenen Reste die 2. Ziffer der 2. Klasse anhängt und noch das Quadrat der 2. Ziffer b der Wurzel, nämlich b^2 subtrahiert.

Bleibt hier kein Rest und ist keine Klasse mehr vorhanden, so ist die Radizierung fertig, siehe Beispiel 1. Ist noch ein Rest und keine Klasse mehr vorhanden, so beachte man die Regel 5; ist aber noch ein (oder kein) Rest und noch eine Klasse vorhanden, so verfahre man weiter, indem man:

4). dem nunmehr erhaltenen Reste die **1. Ziffer** der 3. Klasse anhängt und diese somit gebildete Zahl durch das doppelte Produkt der aus den zwei ersten Ziffern a und b der Wurzel gebildeten Zahl, nämlich durch $2\,(10\,a + b)$ dividiert, wodurch man die 3[te], allgemein durch c bezeichnete Ziffer der Wurzel erhält; dann das doppelte Produkt der durch a, b und c gebildeten Zahl, nämlich $2\,(100\,a + 10\,b + c)$ subtrahiert, dem erhaltenen Reste die 2. Ziffer der 3. Klasse anhängt und noch das Quadrat der 3. Ziffer der Wurzel, nämlich c^2, subtrahiert.

Bleibt hier kein Rest und ist keine Klasse mehr vorhanden, so ist die Radizierung fertig

Beispiele.

1). . . . $\sqrt{60|84} = 78$ (ab)

$a^2 = 49$

$2a = 14|118$

$112 = 2ab$

64

$64 = b^2$

$\cdot$

2). . . . $\sqrt{1|51|29} = 123$ (abc)

$a^2 = 1$

$2a = 2|5$

$4 = 2ab$

11

$4 = b^2$

$2(10a+b) = 2.12 = 24|72$

$72 = 2c(10a+b)$

9

$9 = c^2$

$\cdot$

3). $\sqrt{42|21|10|09} = 6497$ (abcd)

$a^2 = 36$

$2ab = 12|62$

$48 = 2ab$

141

$16 = b^2$

$2(10a+b) = 2.64 = 128|1251$

$1152 = 2c(10a+b)$

990

$81 = c^2$

$2(100a+10b+c) = 2.649 = 1298|9090$

$9086 = 2d(100a+10b+c)$

49

$49 = d^2$

$\cdot$

siehe Beispiel 2. Ist noch ein Rest und keine Klasse mehr vorhanden, so beachte man die Regel 5; ist aber noch ein (oder kein) Rest und noch eine Klasse vorhanden, so verfahre man weiter, indem man:

5). analog wie unter 4). u. s. f. verfährt, siehe umstehendes Beispiel 3.

Im übrigen beachte man die Erkl. 55—57.

Erkl. 55. Zur Geläufigkeit der Rechnung ist vor allem erforderlich, dass man die Quadrate aller einziffrigen Zahlen kennt, nämlich:

$1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$, $10^2 = 100$.

Erkl. 56. Sind die nach vorstehender Regel auszuführenden Subtraktionen der Quadrate der einzelnen Ziffern der Wurzeln nicht möglich, so ist der in der betreffenden vorausgegangenen Division erhaltene Quotient zu gross angenommen worden, man muss deshalb für diesen Quotienten (Ziffer der Wurzel) eine um eine Einheit kleinere Zahl nehmen, lässt sich auch dann die gedachte Subtraktion noch nicht ausführen, so muss man jenen Quotienten (Ziffer der Wurzel) noch um eine Einheit kleiner wählen u. s. f. Da hiernach die Ziffern der Wurzel **durch Probieren** bestimmt werden müssen, so hat man sich **besonders in Acht zu nehmen**, dass man die betreffenden Ziffern **nicht zu klein** annimmt, sie müssen stets die grösst möglichen sein.

Erkl. 57. Die mittelst vorstehender Regel angedeutete Operation kann noch dadurch verkürzt werden, indem man statt der 1. Ziffer einer Klasse zugleich die beiden Ziffern dieser Klasse dem jedesmaligen Reste anhängt, dann aber bei der Division die letzte Ziffer ausser Acht lässt und bei der Subtraktion, den Quotienten (Ziffer der Wurzel) gleich mit sich selbst und mit dem Divisor multipliziert, beide Produkte in Gedanken addiert und dann zusammen subtrahiert.

Man siehe nebenstehende Beispiele.

Beispiele.

Mit Hülfe der in nebenstehender Erklärung angeführten Abkürzung gestaltet sich die Berechnung der vorstehenden Beispiele 1—3, wie folgt:

1). $\sqrt{60|84} = 78$
49
14|1184
1184
.

2). $\sqrt{1|51|29} = 123$
1
2|51
44
24|729
729
.

3). $\sqrt{42|21|10|09} = 6497$
36
12|621
496
128|12510
11601
1298|90909
90909
.

Aufgabe 32. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Radizierungen nach vorstehender Regel 3 ausführen, dabei den Zusatz 4, Seite 201, beachten.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $\sqrt{3481} =$	59	. . . Nach der Regel 3, ist: $\sqrt{34\vert 81} = 59$ (ab); $a^2 = 25$; $2a = 10\vert 98$; $90 = 2ab$; 81; $81 = b^2$; $=$ — Nach dem in der Erkl. 57 angegebenen abgekürzten Verfahren, ist: $\sqrt{34\vert 81} = 59$; 25; $10\vert 981$; 981; $=$
	$= \pm 59$	. . . Soll man den Radikanden als eine allgemeine Zahl betrachten, so ist nach dem Zusatz 4, S. 201: $\sqrt{3481} = \sqrt{+1 \,.\, 3481} = \sqrt{+1} \,.\, \sqrt{3481} = \pm 1 \,.\, 59 = \pm 59$
2). $\sqrt{784} =$	28; $= \pm 28$	. . . Nach der Regel 3, ist: $\sqrt{7\vert 84} = 28$ (ab); $a^2 = 4$; $2a = 4\vert 38$; $32 = 2ab$; 64; $64 = b^2$; $=$ — Nach dem in der Erkl. 57 angegebenen abgekürzten Verfahren, ist: $\sqrt{7\vert 84} = 28$; 4; $4\vert 384$; 384; $=$
3). $\sqrt{6400} =$	80; $= \pm 80$	. . . Nach der Regel 3, ist: $\sqrt{64\vert 00} = 80$; 64; $16\vert 0$; 0; 0; 0; $=$
4). $\sqrt{156025} =$	± 395	. . . Nach der Regel 3, ist: $\sqrt{15\vert 60\vert 25} = 395$ (abc); $a^2 = 9$; $2a = 6\vert 66$; $54 = 2ab$; 120; $81 = b^2$; $2(10a+b) = 2 \,.\, 39 = 78\vert 392$; $390 = 2(10a+b)c$; 25; $25 = c^2$; $=$
5). $\sqrt{36864} =$	± 192	. . . Nach dem in der Erkl. 57 angegebenen abgekürzten Verfahren, ist: $\sqrt{3\vert 68\vert 64} = 192$; 1; $2\vert 268$; 261; $38\vert 764$; 764; $=$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:

6). $\sqrt{163216} =$ ± 404 . . . Nach der Regel 3, ist:

$\sqrt{16|32|16} = 404$ (a b c)

$a^2 = 16$

$2a = 8|3$

$0 = 2ab$ } *).

32

$0 = b^2$ }

$2(10a + b) = 2 . 40 = 80|321$

$320 = 2(10a + b)c$

16

$16 = c^2$

*). Da die in diesem Beispiel vorkommenden Subtraktionen von Null ohne Einfluss auf das Resultat sind, so vereinfacht man in den Fällen, in welchen in der Wurzel die Ziffer „Null“ zum Vorschein kommt, die Rechnung dahin, dass man sofort die beiden folgenden Ziffern herunternimmt; dann aber durch das doppelte Produkt der bis dahin gefundenen Wurzel, incl. der Null, dividiert. Vorstehende Radizierung führt man dementsprechend wie folgt aus:

Da man (in Rücksicht der Erkl. 56) sofort ersieht, dass, wenn man mit: $2 . 4 = 8$ dividiert, in der Wurzel die Ziffer „Null“ erscheint, so beachte man vorstehende Andeutung und dividiere durch: . . .

$\sqrt{16|32|16} = 404$ (a b c)

$a^2 = 16$

$2(10a + b) = 2 . 40 = 80|321$

$320 = 2(10a + b) . c$

16

$16 = c^2$

7). $\sqrt{106276}$ ± 326 . . . Nach dem in der Erkl. 57 angegebenen abgekürzten Verfahren, ist:

$\sqrt{10|62|76} = 326$

9

$6|162$

124

$64|3876$

3876

8). $\sqrt{160000} =$ ± 400 . . . Analog dem Beispiel 3 ersieht man sofort: die erste Klasse gibt 4, die beiden anderen Klassen ergeben je 0 als Ziffern der Wurzel.

9). $\sqrt{1336336} =$ ± 1156 . . Nach der Regel 3, ist:

$\sqrt{1|33|63|36} = 1156$ (a b c d)

$a^2 = 1$

$2a = 2|3$

$2 = 2ab$

13

$1 = b^2$

$2(10a + b) = 2 . 11 = 22|126$

$110 = 2(10a + b)c$

163

$25 = c^2$

$2(100a + 10b + c) = 2 . 115 = 230|1383$

$1380 = 2(100a + 10b + c)d$

36

$36 = d^2$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
10). $\sqrt{97535376} =$	± 9876 . . .	Nach dem in der Erkl. 57 angegebenen abgekürzten Verfahren ist:

```
√97|53|53|76  =  9876
 81
18|1653
   1504
196|14953
     13769
1974|118476
     118476
       ·  ·
```

11). $\sqrt{9431041} =$	± 3071 . . .	Wie vorhin erhält man:

```
√9|43|10|41  =  3071
 9
  6|43
     00
 60|4310
    4249
614 | 6141
      6141
        ·
```

12). $\sqrt{9054081} =$	± 3009 . . .	Wie vorhin erhält man:

```
√9|05|40|81  =  3009
 9
  6|05
     00
 60 | 540
      000
600 | 54081
      54081
       ·  ·
```

13). $\sqrt{1081600} =$	± 1040 . . .	Wie vorhin erhält man:

```
√1|08|16|00  =  1040
 1
  2|08
    00
 20 | 816
      816
     208 | 00
            0
            ·
```

14). $\sqrt{454670329} =$	± 21323 . .	Nach der Regel 3, ist:

```
√4|54|67|03|29  =  21323
 4
 4|5
   4
   1 4
     1
42 | 1 3 6
     1 2 6
       1 0 7
           9
426 | 9 8 0
      8 5 2
      1 2 8 3
            4
4264 | 1 2 7 9 2
       1 2 7 9 2
               9
               9
```

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
15). $\sqrt{944578756} =$	± 30734	Nach dem in der Erkl. 57 angegebenen abgekürzten Verfahren, ist:

```
√9|44|57|87|56 = 30734
 9
 6|44
   00
60|4457
   4249
614|20887
    18429
6146|245856
     245856
       .  .
```

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
16). $\sqrt{1024} =$	?	analog dem gelösten Beispiel 1.
17). $\sqrt{361} =$	?	
18). $\sqrt{576} =$	?	
19). $\sqrt{441} =$	?	
20). $\sqrt{6561} =$	?	
21). $\sqrt{6084} =$	?	
22). $\sqrt{8100} =$	?	„ „ „ „ 3.
23). $\sqrt{244036} =$	?	„ „ „ „ 4.
24). $\sqrt{18496} =$	?	
25). $\sqrt{50625} =$	?	
26). $\sqrt{207936} =$	?	„ „ „ „ 5.
27). $\sqrt{16384} =$	?	
28). $\sqrt{627264} =$	?	
29). $\sqrt{42894} =$	?	„ „ „ „ 6.
30). $\sqrt{654481} =$	?	
31). $\sqrt{490000} =$	?	„ „ „ „ 8.
32). $\sqrt{1841449} =$	?	„ „ „ „ 9.
33). $\sqrt{10137856} =$	?	
34). $\sqrt{2328676} =$	?	
35). $\sqrt{51825601} =$	?	„ „ „ „ 10.
36). $\sqrt{3825936} =$	?	
37). $\sqrt{6355441} =$	?	
38). $\sqrt{4401604} =$	?	„ „ „ „ 11.
39). $\sqrt{88529281} =$	?	
40). $\sqrt{16040025} =$	?	
41). $\sqrt{103347556} =$	?	
42). $\sqrt{501264} =$	?	„ „ „ „ 12.
43). $\sqrt{25050025} =$	?	

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
44). $\sqrt{1512900} =$	?	analog dem gelösten Beispiel 13.
45). $\sqrt{42250000} =$	?	
46). $\sqrt{73788100} =$	?	
47). $\sqrt{937645641} =$	?	„ „ „ „ 14.
48). $\sqrt{3466383376} =$	?	
49). $\sqrt{900540081} =$	?	
50). $\sqrt{62523502209} =$	?	

β). Ausziehung rationaler Quadratwurzeln, deren Radikanden Dezimalbrüche sind.

Um eine Regel aufstellen zu können nach welcher man aus einem Dezimalbruch die Quadratwurzel ziehen kann, beachte man, dass sich jeder Dezimalbruch in Form eines gewöhnlichen Bruches, dessen Nenner eine Potenz von 10 ist, schreiben lässt; dass ferner nach dem Lehrsatz 10, Seite 202, die Wurzel aus diesem so erhaltenen Bruch gezogen wird, indem man sie aus Zähler und Nenner zieht, und dass schliesslich durch Multiplikation des Zählers und Nenners mit 10, der Nenner als eine g e r a d e Potenz von 10 dargestellt werden kann, womit erreicht wird, dass man aus dem gedachten Nenner stets die 2te Wurzel ziehen kann.

Man siehe nebenstehende Beispiele.

Hiernach kann man folgende Regel 4 aufstellen:

Beispiele.

1). $13{,}69 = \frac{1369}{100} = \frac{1369}{10^2}$ mithin ist:

$$\sqrt{13{,}69} = \sqrt{\frac{1369}{10^2}} = \frac{\sqrt{1369}}{\sqrt{10^2}} = \frac{\sqrt{1369}}{10}$$

u. s. f.

2). $2{,}890 = \frac{2890}{1000} = \frac{2890}{10^3} = \frac{2890 \, . \, 10}{10^4} = \frac{28900}{10^4}$ mithin ist:

$$\sqrt{2{,}890} = \sqrt{\frac{28900}{10^4}} = \frac{\sqrt{28900}}{10^2} \text{ u. s. f.}$$

3). $0{,}02368 = \frac{2368}{100000} = \frac{2368}{10^5} = \frac{23680}{10^6}$

mithin ist:

$$\sqrt{0{,}02368} = \sqrt{\frac{23680}{10^6}} = \frac{\sqrt{23680}}{\sqrt{10^6}} = \frac{\sqrt{23680}}{10^3} = \frac{\sqrt{23680}}{1000} \text{ u. s. f.}$$

Regel 4. Man zieht aus einem Dezimalbruch die Quadratwurzel, indem man:

1). den Dezimalbruch durch Anhängung einer Null auf eine solche Form bringt, dass die A n z a h l der Dezimalstellen **eine gerade** ist, ... hierdurch wird bezweckt, dass der in Gedanken als gewöhnlicher Bruch geschriebene Dezimalbruch einen Nenner erhält, der eine g e r a d e Potenz von 10 ist, in Folge dessen man die 2te Wurzel aus diesem (nur gedachten) Nenner ziehen kann.

— ist die Anzahl der Dezimalstellen schon eine gerade, so ist dies nicht nötig —

dann

2). das Dezimalkomma wegdenkt und aus der somit gedachten g a n z e n Zahl genau wie in der Regel 3, Seite 271, bezw. in der Erkl. 57, Seite 272, angegeben ist, die Quadratwurzel zieht, ... hierdurch ist der Zähler des gedachten gewöhnlichen Bruches radiziert.

und schliesslich

3). der somit erhaltenen Wurzel soviele Stellen als Dezimalstellen durch ein Komma abtrennt, als die Hälfte der Dezimalstellen des auf eine gerade Anzahl von Dezimalstellen gebrachten Dezimalbruches beträgt, oder was dasselbe ist, das Dezimalkomma hinter die Ziffer der Wurzel setzt, welche man aus der Klasse des Radikanden erhält, hinter welcher dessen Dezimalkomma steht. hierdurch hat man die in dem gedachten gewöhnlichen Bruche angedeutete Division des radizierten Nenners in den radizierten Zähler ausgeführt.

Man siehe die gelösten Beispiele in der folgenden Aufgabe 33.

Aufgabe 33. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Radizierungen nach vorstehender Regel 3 ausführen, dabei den Zusatz 4, Seite 201, beachten.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $\sqrt{146{,}41} =$ $\pm 12{,}1$. . . Man denke sich:

$$\sqrt{146{,}41} = \sqrt{\frac{14641}{100}} = \frac{\sqrt{14641}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{14641}}{\sqrt{10^2}} = \frac{\sqrt{14641}}{10} \text{ gesetzt,}$$

den Zähler: $\sqrt{14641}$ nach der Regel 3, Seite 271, bezw. nach der Erkl. 57, radiziert, und das was herauskommt, durch 10 dividiert, also von der erhaltenen Wurzel eine Stelle durch ein Dezimalkomma abgetrennt. Nach der vorstehenden Regel 4, gestaltet sich die Rechnung, wie folgt:

```
                         √1|46,|41  =  12,1
                    a² = 1              a b c
                    2a = 2|4
                           4    (= 2ab)
                           6
                           4    (= b²)
2(10a + b) = 2 . 12 = 24|24
                          24   (= 2(10a + b) c)
                           1
                           1   (= c²)
                           .
```

2). $\sqrt{33708{,}96} =$ $\pm 183{,}6$. . . Wie in vorhergehendem Beispiel, erhält man mittelst dem in der Erkl. 57 angegebenen abgekürzten Verfahren:

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

$\sqrt{3|37|08,|96} = 183,6$

```
    1
  ------
 2|237
   224
  -------
36|1308
   1089
  --------
366|21996
    21996
   -------
     : :
```

3). $\sqrt{576,4801} =$ $\pm 24,01$. . . Wie vorhin erhält man:

$\sqrt{5|76,|48|01} = 24,01$

```
  4
 ------
4|176
  176
 ------
 48|48
    00
  --------
280|4801
    4801
   ------
     : :
```

4). $\sqrt{4762,104064} =$ $\pm 69,008$. . . Wie vorhin erhält man:

$\sqrt{47|62,|10|40|64} = 69,008$

```
   36
  --------
12|1162
   1161
  --------
 138|110
     000
    ---------
 1380|11040
      00000
     ----------
13800|1104064
      1104064
     ---------
       :   :
```

5). $\sqrt{0,893025} =$ $\pm 0,945$. . . Man denke sich:

$$\sqrt{0,893025} = \sqrt{\frac{893025}{1000000}} =$$

$$\frac{\sqrt{893025}}{\sqrt{10^6}} = \frac{\sqrt{893025}}{10^3}$$

gesetzt, den Zähler: $\sqrt{893025}$ nach der Regel 3, S. 271, bezw. nach der Erkl. 57 radiziert u. das was herauskommt durch 10^3 (= 1000) dividiert, also von der erhaltenen Wurzel drei Stellen durch ein Dezimalkomma abgetrennt, wobei man beachten muss, dass der Zähler nach der Radizierung nur 3 Stellen enthält, mithin eine Null demselben vorgesetzt werden muss.

Nach der vorstehenden Regel 4 und nach der Erkl. 57 gestaltet sich die Rechnung, wenn man sich während der Rechnung das Dezimalkomma mit der vorstehenden Null wegdenkt, wie folgt:

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

$\sqrt{0,|89|30|25} = 0,945$ *).
a b c

(a² =) 81
(2a =) 18 | 830
736
(2 . (10a + b) =) 188 | 9425
9425
= =

*). Denkt man sich, wie nach der Regel 4 geschehen muss, im Radikanden das Dezimalkomma weg, so haben die Nullen, die direkt vor und hinter dem Komma stehen, **keinen Wert**. Die Wurzelausziehung, welche alsdann nach der Regel 3, bezw. nach der Erkl. 57 auszuführen ist, beginnt somit erst mit der Klasse in welcher die erste Ziffer steht, die der durch die gedachte Weglassung des Kommas entstehenden ganzen Zahl angehört. In Betreff des in der Wurzel zu setzenden Kommas, bezw. in Betreff der der nach der Radizierung erhaltenen Zahl (hier 945) vorzusetzenden Nullen, kann man sich auch vorteilhaft merken, dass man für jede Klasse des Radikanden, welche vollständig durch Nullen besetzt ist und vor der gedachten ganzen Zahl steht, in der Wurzel eine Null setzen kann.

6). $\sqrt{0,00056644}$ = ... $\pm$ 0,0238 . . . Wie vorhin erhält man:

$\sqrt{0,|00|05|66|44} = 0,0238$
4
4 | 166
129
46 | 3744
3744
= =

7). $\sqrt{0,000001048576}$ = . . . $\pm$ 0,001024 . . . Wie vorhin erhält man:

$\sqrt{0,|00|00|01|04|85|76} = 0,001024$
1
2 | 04 . . . hier beachte man, dass 0 durch 2 dividiert, 0 zum Quotienten hat und dass nicht auch in 4 dividiert werden darf, denn die Stelle 4 ist nur heruntergenommen zum Zwecke des Abzugs des Quadrats der betreffenden Wurzelziffer.
00
20 | 485
404
204 | 8176
8176
= =

8). $\sqrt{0,09}$ = ... $\pm$ 0,3 . . . Wie vorhin ist:

$\sqrt{0,|09} = 0,3$
9
=

Man beachte, dass:

$$\sqrt{0,09} = \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{3}{10} = 0,3 \text{ ist.}$$

9). $\sqrt{655,36}$ = ... ? . . . analog dem gelösten Beispiel 1.

10). $\sqrt{70,7281}$ = ... ? .

11). $\sqrt{5760,81}$ = ... ? .

12). $\sqrt{11,6964}$ = ... ? .

13). $\sqrt{7,890481}$ = ... ? . . . „ „ „ „ 3.

14). $\sqrt{227,7081}$ = ... ? .

15). $\sqrt{36,00720036}$ = ... ? . . . „ „ „ „ 4.

16). $\sqrt{0,5329}$ = ... ? . . . „ „ „ „ 5.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
17). $\sqrt{0,2209} =$	?	
18). $\sqrt{0,012769} =$	?	
19). $\sqrt{0,001600} =$	?	. . . analog den gelösten Beispielen 6 u. 7.
20). $\sqrt{0,00000000529} =$	?	
21). $\sqrt{0,16} =$	?	. . . „ dem gelösten Beispiel 8.
22). $\sqrt{0,04} =$	?	
23). $\sqrt{0,0016} =$	?	
24). $\sqrt{0,0004} =$	?	

ββ). Ausziehung irrationaler Quadratwurzeln, deren Radikanden ganze Zahlen oder Dezimalbrüche sind.

Hat man aus einer Zahl die Quadratwurzel zu ziehen und die nach der Regel 3, Seite 271, bezw. nach der Regel 4, Seite 277, auszuführende Operation geht nicht ohne Rest auf, **was in den meisten Fällen stattfinden wird**, so existiert kein genau angebbarer Wert, der in die 2te Potenz erhoben die zu radizierende Zahl ergibt, d. h die betreffende Wurzel ist **irrational**, bezw. die zu radizierende Zahl ist keine Quadratzahl.

Da man nun im voraus nicht weiss, ob die zu radizierende Zahl eine Quadratzahl ist oder nicht und man in letzterem Falle die Quadratwurzel wenigstens bis zu einem gewissen Grade der Genauigkeit haben muss, so beachte man bei der Ausziehung der Quadratwurzel aus einer Zahl stets folgende Regeln:

Regel 5. Man zieht aus einer beliebigen ganzen Zahl die Quadratwurzel, indem man:

1). genau nach der Regel 3, Seite 271, verfährt; dann aber im Falle die, nach Benutzung der letzten Klasse des Radikanden, auszuführende Operation nicht ohne Rest aufgegangen ist, also die zu radizierende Zahl keine Quadratzahl, die Wurzel also **irrational** ist,

2). der gegebenen Zahl soviel Paar Nullen als Dezimalstellen anhängt, als die Anzahl der Dezimalstellen beträgt, welche man in der Wurzel bestimmen will, und nach der Regel 4, Seite 277, weiter verfährt.

Nebenstehendes Beispiel 1 gibt hierüber weiteren Aufschluss.

Beispiele.

1). Hat man z. B. $\sqrt{238}$ zu berechnen, so erhält man nach nebenstehender Regel 5, zunächst:

```
√2|38 = 15   dieseWurzel ist nur annähernd richtig.
 1
 ――
2|13
 10
 ――
  38
  25
  ――
  13 . . Rest.
```

Die Probe für die Richtigkeit der bis dahin ausgeführten Radizierung besteht nach der Erkl. 59 darin, dass:

$238 = 15^2 + 13$ sein muss,

was auch stimmt.

Will man die nur annähernd richtige Wurzel 15 bis auf **Zehntel** genau berechnen, so setze man:

$$\sqrt{238} = \sqrt{\frac{23800}{100}} = \frac{\sqrt{23800}}{\sqrt{10^2}} = \frac{\sqrt{23800}}{10}$$

ziehe aus 23800 die Wurzel wie vorhin und dividiere die erhaltene Wurzel durch 10, oder was dasselbe ist, man setze:

$\sqrt{238} = \sqrt{238,00}$ und verfahre nach der Regel 4. Man wird erhalten:

```
√2|38,|00 = 15,4   diese Wurzel ist nur bis Zehntel genau richtig.
 1
 ――
2|13
 10
 ――
  38
  25
  ――
30|130
   120
   ―――
    100
     16
    ―――
     84 . . Rest.
```

Die Probe für die Richtigkeit der bis dahin ausgeführten Radizierung besteht nach der Erkl. 59 darin, dass:

$238,00 = 15,4^2 + 84$ sein muss,

was auch stimmt.

Regel 6. Man zieht aus einem beliebigen Dezimalbruch die Quadratwurzel, indem man:

1). genau nach der Regel 4, Seite 277, verfährt; dann aber im Falle die, nach Benutzung der letzten Klasse des Radikanden, auszuführende Operation nicht ohne Rest aufgegangen ist, also der zu radizierende Dezimalbruch keine Quadratzahl, die Wurzel also **irrational** ist,

2). dem gegebenen Dezimalbruch noch soviel Paar Nullen (siehe auch Erkl. 58) anhängt, als man noch Dezimalstellen der fraglichen Wurzel bestimmen will und wie vorhin angedeutet ist weiter verfährt.

Nebenstehendes Beispiel 2 gibt hierüber weitere Auskunft.

Erkl. 58. Ist der gegebene Dezimalbruch ein **periodischer**, so hänge man statt der in vorstehender Regel 6 erwähnten Nullen, Ziffern der Periode des Dezimalbruchs an.

Man siehe umstehendes Beispiel 3.

Erkl. 59. Die Probe für die Richtigkeit der Ausziehung einer **irrationalen** Quadratwurzel besteht darin, dass die annähernd gefundene Wurzel quadriert und hierzu den letzten Rest addiert, den Radikanden ergeben muss.

Man siehe die Proben in den nebenstehenden Beispielen 1—3.

Erkl. 60. Durch nebenstehende Beispiele 1, 2 und 3 ist dargethan, dass man den Wert einer **irrationalen** Wurzel bis zu einem beliebigen Grade der Genauigkeit bestimmen, dass man sich dem wahren Werte derselben beliebig nähern kann, ohne allerdings denselben je zu erreichen.

Will man die fragl. Wurzel bis auf **Hundertstel** genau berechnen, so setze man analog wie vorhin:

$\sqrt{238} = \sqrt{238{,}0000}$ und verfahre nach der Regel 4. Man wird erhalten:

```
√2|38,|00|00 = 1,542   diese Wurzel ist nur bis
 1                      auf Hundertstel genau.
2|13
  10
   38
   25
30|130
   120
    100
     16
308|840
    616
    2240
       4
    2236 . . Rest.
```

Probe:

238,0000 muss $= 1{,}542^2 + 2236$ sein.

Auf analoge Weise kann man die Wurzel bis auf **Millionstel** genau u. s. f., also bis zu einem beliebigen Grad der Genauigkeit berechnen.

2). Hat man z. B. $\sqrt{234{,}621}$ zu berechnen, so erhält man nach nebenstehender Regel 6, bezw. zunächst nach der Regel 4 und deren Erkl. 75:

```
√234,621 =
√2|34,|62|10 = 15,31   diese Wurzel ist nur an-
 1                      nähernd richtig.
2|134
  125
30|962
   909
306|5310
    3061
    2249 . . Rest.
```

Probe. Nach Erkl. 59:

234,621 muss $= 15{,}31^2 + 2249$ sein.

Will man nun die fragliche Wurzel bis auf 2 weitere Dezimalstellen genau bestimmen, so hänge man dem hier auf eine gerade Anzahl von Dezimalstellen gebrachten Radikanden 234,6210 noch 2 Paar Nullen an und verfahre wie vorhin weiter. Man wird erhalten:

```
√2|34,|62|10|00|00 = 15,3173
 1
2|134
  125
30|962
   909
306|5310
    3061
3062|224900
     214389
30634|1051100
       919029
       132071 . . Rest.   u. s. f., u. s. f.
```

Probe:

234,621 muss $= 15{,}3173^2 +$ 132071 sein.

3). Hat man z. B.: $\sqrt{2{,}312312312\ldots}$ zu berechnen und ist der Radikand ein **periodischer** Dezimalbruch, so erhält man zunächst:

```
√2,|31|23|12 = 1,520
 1
2|131
  125
30|623        2,312312 muss = 1,520² + 1912
   604                     sein.
304|1912
    0000
    1912 . . Rest.
```

Will man noch 2 weitere Dezimalstellen berechnen, so hänge man dem Radikanden 2 Paar der Ziffern an, die der Periode angehören. Man wird erhalten:

```
√2,|31|23|12|31|23 = 1,52062
 1
2|131
  125
30|623                  Probe:
   604
304|1912            2,3123123123 muss =
    0000            1,52062² + 271279 sein.
3040|191231
     182436
30412|879523
      608244
      271279 . . Rest.
```

Erkl. 61. Hat man von einer irrationalen Quadratwurzel bereits 4 oder 5 Dezimalstellen berechnet, so findet man die folgenden 4 oder 5 Dezimalstellen auf rasche Weise, indem man den Rest durch das doppelte Produkt der bereits berechneten Wurzel dividiert.

Diese sehr praktische Regel gründet sich auf folgende Betrachtung:

Bedeutet a eine Zahl aus der die Quadratwurzel gezogen werden soll, b die bis auf 4 oder 5 Dezimalstellen bestimmte Wurzel und schliesslich x der noch fehlende Teil der Wurzel, so besteht zwischen diesen Grössen die Relation:

1). . . . $\sqrt{a} = b + x$

für welche man:

$$a = (b + x)^2 \quad \text{oder:}$$

2). . . . $a = b^2 + 2bx + x^2$ setzen kann.

Ist nun aus der Zahl a die Quadratwurzel z. B. auf 4 Dezimalstellen genau ausgezogen, so stellt die erste, also die höchste Ziffer des noch fehlenden Teils x die Hunderttausendsteln dar, dieser noch fehlende Teil x ist hiernach ein **sehr kleiner** echter Bruch; da nun das Quadrat desselben, nämlich x^2, noch **viel kleiner**

4). Hat man z. B. $\sqrt{2}$ zu berechnen, so berechne man nach vorstehender Regel 6 die ersten 4 Dezimalstellen, wie folgt:

```
√2,|00|00|00|00 = 1,4142 . . . .
 1                \_____/
                     b
2|100
   96
28|400
   281
282|11900
    11296
2828|60400
     56564
      3836 . . . Rest r
```

Will man nun die bis auf 4 Dezimalstellen genau gefundene Wurzel noch auf weitere Dezimalstellen berechnen, so findet man die folgenden 4 Stellen nach nebenstehender Erkl. 61 aus dem Quotienten: $\dfrac{3836}{2 \, . \, 1{,}4142}$

Man erhält für dieselbe: 1356.

Für die zu berechnende Wurzel hat man hiernach: $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ von dessen Richtigkeit man sich überzeugen kann, wenn man die vorhin begonnene Radizierung weiter ausführt.

ist, so kann man diesen Wert für x^2 vernachlässigen und die vorstehende Relation 2). geht über in:

$$a = b^2 + 2bx$$

woraus man:

3). . . . $x = \frac{a - b^2}{2b}$ erhält.

Für die gesuchte Wurzel hat man somit:

4). . . . $\sqrt{a} = b + \frac{a - b^2}{2b}$

Da ferner: $(a - b^2)$ den letzten Rest r darstellt, welchen man nach der Bestimmung der angenäherten Wurzel b erhält, so hat man:

5). . . . $\sqrt{a} = b + \frac{r}{2b}$

was zu beweisen war.

Erkl. 62. Ein Verfahren, die Quadratwurzel annähernd aus einer Zahl zu ziehen, stützt sich auf folgende Betrachtung:

Ist x gegen a eine sehr kleine Zahl, so kann man:

$$\left.\begin{array}{ll} 1). \ldots & \sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a} \\ 2). \ldots & \sqrt{a^2 - x} = a - \frac{x}{2a} \end{array}\right\} \text{setzen,}$$

denn nach der Regel 2, Seite 264, ist z. B.:

$$\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^3} + \cdots\cdots$$

$$\begin{array}{l|l} & +a^2 \\ & - \\ \hline 2a & x \\ & x + \frac{x^2}{4a^2} \\ & - \; - \\ \hline 2a + \frac{x}{a} & - \frac{x^2}{4a^2} \\ & - \frac{x^2}{4a^2} - \frac{x^3}{8a^4} + \frac{x^4}{64a^6} \\ & + \quad\;\; + \quad\;\; - \\ \hline & \frac{x^3}{8a^4} - \frac{x^4}{64a^6} \text{ u. s. f.} \end{array}$$

Bricht man hier ab, so ist schon das dritte Glied der Wurzel, unter der gedachten Voraussetzung, dass x gegen a sehr klein ist, eine noch viel kleinere Grösse, welche man, ohne einen besonderen Fehler zu begehen, vernachlässigen kann. Dasselbe gilt noch viel mehr für die weiteren Glieder der Wurzel.

Man kann also ohne einen grossen Fehler zu begehen:

$$\sqrt{a^2 \pm x} = a \pm \frac{x}{2a} \text{ setzen.}$$

Man siehe nebenstehende Beispiele 5 und 6.

Beispiele.

5). Soll man z. B. $\sqrt{81{,}000002}$ berechnen, so kann man, da der Radikand nahezu eine Quadratzahl ist, hierfür schreiben:

$$\sqrt{81{,}000002} = \sqrt{9^2 + 0{,}000002}$$

Da nun der zweite Summand unter dem Wurzelzeichen gegen den ersten sehr klein ist, so hat man nach nebenstehender Gleich. 1).:

$$\begin{aligned} \sqrt{9^2 + 0{,}000002} &= 9 + \frac{0{,}000002}{2 \cdot 9} \\ &= 9 + 0{,}0000001 \\ &= 9{,}0000001 \end{aligned}$$

6). Soll man z. B. $\sqrt{120\frac{119}{120}}$ berechnen, so kann man, da der Radikand nahezu eine Quadratzahl ist, schreiben:

$$\sqrt{120\frac{119}{120}} = \sqrt{121 - \frac{1}{120}}$$

Da nun der zweite Summand unter dem Wurzelzeichen gegen den ersten sehr klein ist, so hat man nach nebenstehender Gleich. 2).:

$$\begin{aligned} \sqrt{121 - \frac{1}{120}} &= 11 - \frac{1}{120 \cdot 2 \cdot 121} \\ &= 11 - 0{,}00003 \\ &= 10{,}99997 \end{aligned}$$

Erkl. 63. Ein weiteres Verfahren, eine **irrationale** Quadratwurzel annähernd zu bestimmen, liefern die **Kettenbrüche** (man siehe dieses Kapitel).

Soll man z. B. $\sqrt{31}$ bestimmen, so weiss man, da $5^2 = 25$ und $6^2 = 36$ ist, dass die fragl. Wurzel zwischen 5 u. 6 liegen muss, also $= 5$ plus einem **echten** Bruch $\frac{1}{x}$ ist, in Zeichen:

1). . . . $\sqrt{31} = 5 + \frac{1}{x}$

Hieraus erhält man:

$$x = \frac{1}{\sqrt{31}-5} = \frac{\sqrt{31}+5}{6} \quad \ldots \quad \text{denn: } \frac{1}{\sqrt{31}-5} = \frac{1(\sqrt{31}+5)}{(\sqrt{31}-5)(\sqrt{31}+5)} = \frac{\sqrt{31}+5}{(\sqrt{31})^2-5^2} = \frac{\sqrt{31}+5}{31-25} = \frac{\sqrt{31}+5}{6}$$

Setzt man nun:

$$\frac{\sqrt{31}+5}{6} = 1 + \frac{\sqrt{31}-1}{6}$$

so stellt der letzte Quotient einen **echten** Bruch, $\frac{1}{y}$ dar, und man hat:

$$x = 1 + \frac{1}{y}$$

Diesen Wert in Gleich. 1). substituiert, gibt:

2). . . . $\sqrt{31} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{y}}$

Berechnet man aus:

$\frac{\sqrt{31}-1}{6} = \frac{1}{y}$ die Grösse y, wie vorhin x, so erhält man:

$$y = \frac{6}{\sqrt{31}-1} = \frac{\sqrt{31}+1}{5} \quad \ldots \quad \text{denn: } \frac{6}{\sqrt{31}-1} = \frac{6(\sqrt{31}+1)}{(\sqrt{31}-1)(\sqrt{31}+1)} = \frac{6(\sqrt{31}+1)}{(\sqrt{31})^2-1^2} = \frac{6(\sqrt{31}+1)}{31-1} = \frac{6(\sqrt{31}+1)}{30} = \frac{\sqrt{31}+1}{5}$$

Setzt man nun:

$$\frac{\sqrt{31}+1}{5} = 1 + \frac{\sqrt{31}-4}{5}$$

so stellt der letzte Quotient einen **echten** Bruch, $\frac{1}{z}$ dar, und man hat:

$$y = 1 + \frac{1}{z}$$

Diesen Wert in Gleich. 2). substituiert, gibt:

3). . . . $\sqrt{31} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{z}}}$

Berechnet man aus:

$\frac{\sqrt{31}-4}{5} = \frac{1}{z}$ die Grösse z, so erhält man:

$$z = \frac{5}{\sqrt{31}-4} = \frac{\sqrt{31}+4}{3} \quad \ldots \quad \text{denn: } \frac{5}{\sqrt{31}-4} = \frac{5(\sqrt{31}+4)}{(\sqrt{31}-4)\cdot(\sqrt{31}+4)} = \frac{5(\sqrt{31}+4)}{(\sqrt{31})^2-4^2} = \frac{5(\sqrt{31}+4)}{31-16} = \frac{\sqrt{31}+4}{3}$$

Setzt man nun:

$$\frac{\sqrt{31}+4}{3} = 3 + \frac{\sqrt{31}-5}{3}$$

so stellt der letzte Quotient einen **echten** Bruch $\frac{1}{v}$ dar, und man hat:

$$z = 3 + \frac{1}{v}$$

Diesen Wert in Gleich. 3 substituiert, gibt:

$$4). \quad . \; . \; . \quad \sqrt{31} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{v}}}}$$

Auf analoge Weise die Rechnung fortgesetzt, kann man den unter 4). erhaltenen Kettenbruch beliebig erweitern und dann, wie in dem Kapitel: „**Die Dezimal- und Kettenbrüche**“ gezeigt wird, die Näherungswerte bestimmen.

Aufgabe 34. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Radizierungen nach vorstehenden Regeln 5 u. 6 und mit Benutzung des in der Erkl. 61 angegebenen abgekürzten Verfahrens bis auf mindestens 6 Dezimalstellen ausführen, dabei den Zusatz 4, Seite 201, beachten.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $\sqrt{309}$ = ... $\pm$ 17,57839583.... . . Nach vorstehender Regel 5, ist zunächst:

```
√3|09  =  17,....
 1
 ─────
2|209
  189
  ───
   20
```

Da man ersieht, dass die gesuchte Wurzel **irrational** ist und man z. B. 4 weitere Dezimalstellen berechnen will, so hänge man 4 Paar Nullen an und führe die Radizierung, wie folgt weiter aus:

```
√3|09|00|00|00|00 *).  =  17,5783......
 1
 ─────
2|209
  189
 ──────
34|2000
   1725
 ────────
350|27500
    24549
 ──────────
3514|295100
     281184
 ────────────
35156|1391600
      1054689
 ────────────
       336911 . . . Rest.
```

Will man nunmehr noch weitere Dezimalstellen bestimmen, so findet man nach der Erkl. 61 und dem dortigen Beispiel 4 dieselbe aus dem Quotienten:

$$\frac{336911}{2 \cdot 17{,}5783}$$

Man erhält für die weiteren Dezimalstellen =

9583

Für die gesuchte Wurzel hat man somit bis auf 8 Dezimalen genau:

$$\sqrt{309} = 17{,}57839583 \ldots .$$

*). Die Anhängung der Nullen, welche zur Bestimmung weiterer Stellen der Wurzel nötig sind, braucht man nur in Gedanken auszuführen; man hat hierbei nur auf die Stellung des Dezimalkommas in der Wurzel Acht zu geben.

Uebungsbeispiele:	**Resultate:**	**Andeutungen:**
2). $\sqrt{3} =$	$\pm$ 1,73205081....	Wie vorhin erhält man, wenn man sich 4 Paar Nullen als Dezimalstellen angehängt denkt:

$\sqrt{3} \;=\; 1{,}7320 \ldots.$

```
    1
  2|200
    189
 34|1100
    1029
346|7100
    6924
3464|17600
     00000
     17600 . . Rest
```

Die 4 weiteren Dezimalstellen erhält man nach der Erkl. 61 aus dem Quotienten:

$$\frac{17600}{2 \,.\, 1{,}7320} \text{ mit } 5081$$

Für die fragliche Wurzel erhält man somit bis auf 8 Dezimalen genau:

$$\sqrt{3} \;=\; 1{,}73205081 \ldots.$$

3). $\sqrt{3{,}00462} =$ $\pm$ 1,73338398.... . . . Nach der Regel 4 die Dezimalstellen durch Anhängung einer Null auf eine gerade Anzahl gebracht und die Wurzel gezogen, gibt:

$\sqrt{3,|00|46|20} \;=\; 1{,}7333$

```
    1
  2|200
    189
 34|1146
    1029
346|11720
    10389
     1331
    ......
3466|133100
     103989
     29111
```

Will man von hier ab noch weitere Stellen der Wurzel bestimmen, so **denke** man sich dem Radikanden für jede Stelle der Wurzel 2 Nullen angehängt und wie nebenstehend weiter verfahren.

Will man noch mehr Stellen der Wurzel bestimmen, so benutze man die Erkl. 61. Aus dem Quotienten:

$$\frac{29111}{2 \,.\, 1{,}7333}$$ erhält man für 4 weitere Stellen = 8398

Für die fragliche Wurzel erhält man somit bis auf 8 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt{3{,}00462} \;=\; 1{,}73338398 \ldots.$$

4). $\sqrt{0{,}00064} =$ $\pm$ 0,02529781.... . . . Analog den gelösten Beispielen 5, 6 und 7, S. 279 u. 280, erhält man zunächst:

$\sqrt{0,|00|06|40} \;=\; 0{,}0252 \ldots.$

```
     4
   4|240
     225
  50|1500 . . .
     1004
      496
```

An dieser Stelle wie vorhin durch Anhängung zweier Nullen weiter verfahren, erhält man die 4. Ziffer der Wurzel.

Für die Bestimmung noch weiterer Ziffern der Wurzel benutze man die Erkl. 61. Aus dem Quotienten:

$$\frac{496}{2 \,.\, 0{,}0252}$$ erhält man die 4 weiteren Stellen 9781

Für die fragliche Wurzel erhält man somit bis auf 8 Dezimalen genau:

$$\sqrt{0{,}00064} \;=\; 0{,}02529781$$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
5). $\sqrt{783} =$	?	analog dem gelösten Beispiel 1.
6). $\sqrt{3190} =$	?	
7). $\sqrt{5095} =$	?	
8). $\sqrt{18439} =$	?	
9). $\sqrt{7} =$	?	„ „ „ „ 2
10). $\sqrt{5} =$	?	
11). $\sqrt{8} =$	?	
12). $\sqrt{10} =$	?	
13). $\sqrt{11} =$	?	
14). $\sqrt{864{,}342} =$	?	„ „ „ „ 3.
15). $\sqrt{25{,}0400057} =$	?	
16). $\sqrt{5{,}5} =$	?	
17). $\sqrt{4{,}9} =$	?	
18). $\sqrt{36{,}25} =$	?	
19). $\sqrt{1{,}1029} =$	?	
20). $\sqrt{0{,}05} =$	?	„ „ „ „ 4.
21). $\sqrt{0{,}9} =$	?	
22). $\sqrt{0{,}001} =$	?	
23). $\sqrt{0{,}0000004} =$	?	
24). $\sqrt{0{,}24} =$	?	
25). $\sqrt{0{,}0000237} =$	?	
26). $\sqrt{0{,}63\,63\,63\ldots} =$	?	Da der Radikand ein periodischer Dezimalbruch ist, so beachte man das Beispiel 3, bezw. die Erkl. 58, Seite 282.
27). $\sqrt{273{,}273\,273} =$	?	
28). $\sqrt{0{,}002\,002\,002} =$	?	bis auf 10 Dezimalstellen zu berechnen.

γ). Ausziehung der Quadratwurzel aus gewöhnlichen Brüchen.

Bei der Ausziehung der Quadratwurzel aus gewöhnlichen Brüchen, merke man sich folgende Regel und beachte dabei, dass **gemischte** Brüche vor der Radizierung immer erst eingerichtet werden müssen.

Regel 7. Man zieht die Quadratwurzel aus einem gewöhnlichen Bruch, indem man entweder:

a). die Quadratwurzel aus dem Zähler und dem Nenner zieht;

dies geschieht in den Fällen, in welchen Zähler und Nenner Quadratzahlen sind — siehe Beispiel 1 —

oder:

b). den gegebenen Bruch in einen Dezimalbruch verwandelt und aus diesem die Quadratwurzel zieht;

dies geschieht besonders in den Fällen in welchen der gegebene Bruch sich in einen endlichen Dezimalbruch verwandeln lässt, oder auch in den Fällen in welchen man nur einige Dezimalen der Wurzel haben will — s. Beisp. 2 —

oder:

c). indem man nach früherem den Nenner rational macht und aus Zähler und Nenner die Wurzel zieht, wie im ersten Falle;

dies geschieht besonders, wenn der gegebene Bruch sich in keinen endlichen Dezimalbruch verwandeln lässt und ein sehr genaues Resultat verlangt wird — siehe Beispiel 3. —

Beispiele.

1). $\sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

2). $\sqrt{2\frac{5}{8}} = \sqrt{\frac{21}{8}} = \sqrt{2{,}625} = 1{,}620\ldots$

3). $\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 7}{7 \cdot 7}} = \sqrt{\frac{21}{49}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{49}}$

$= \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{1}{7}\sqrt{21}$

Nun berechne man $\sqrt{21}$ so genau als verlangt wird und dividiere das erhaltene Resultat durch 7.

Aufgabe 35. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Radizierungen nach vorstehender Regel 7 ausführen, dabei den Zusatz 4, Seite 201, beachten.

Uebungsbeispiele:	**Resultate:**	**Andeutungen:**
1). $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} =$	$\pm\frac{2}{3}$	nach dem 1. Fall der Regel 7.
2). $\sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} =$	$\pm\frac{5}{4}$	
3). $\sqrt{\frac{5}{8}} = \sqrt{0{,}625} =$	$\pm 0{,}790\ldots$. . .	nach dem 2. Fall der Regel 7 und bis auf 3 Dezimalen genau.
4). $\sqrt{\frac{17}{49}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{17}}{7} = \frac{1}{7}\sqrt{17} = \frac{1}{7} \cdot 4{,}123\ldots$. .	$= \pm 0{,}589\ldots$ bis auf 3 Dezimalen genau.	Nach dem 3. Fall der Regel 7. Man erhält analog dem gelösten Beispiel 1 der Aufgabe 34:

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{\sqrt{17} = 4{,}123\ldots} \\ & 16 \\ \hline 8 & 100 \\ & 81 \\ \hline 82 & 1900 \\ & 1644 \\ \hline 824 & 25600 \\ & 24729 \\ \hline & 871 \end{array}$$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
5). $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2.3}{3.9}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{6} = \frac{1}{3}.2{,}449\ldots$ $= \pm 0{,}816\ldots$		. . . bis auf 3 Dezimalen genau.
6). $\sqrt{\frac{4}{9}} =$	?	 analog dem gelösten Beispiel 1.
7). $\sqrt{\frac{64}{125}} =$	?	
8). $\sqrt{\frac{100}{121}} =$	?	
9). $\sqrt{\frac{3}{4}} =$	?	 „ „ „ „ 4.
10). $\sqrt{\frac{1111}{8100}} =$	?	
11). $\sqrt{1\frac{3}{16}} =$	?	
12). $\sqrt{5\frac{1}{2}} =$	?	 „ „ „ „ 3.
13). $\sqrt{\frac{7}{5}} =$	?	
14). $\sqrt{\frac{284}{10}} =$	?	
15). $\sqrt{\frac{5}{6}} =$	?	
16). $\sqrt{\frac{5}{12}} =$	?	
17). $\sqrt{4\frac{1}{6}} =$	?	
18). $\sqrt{\frac{5}{7}} =$	?	

Aufgabe 36. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen Zahlenausdrücke bis auf 4 Dezimalen genau berechnen, dabei den Zusatz 4, Seite 201, beachten.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $\frac{1}{\sqrt{2}} =$	?	 man mache zuerst den Nenner rational.
2). $\frac{1}{\sqrt{7}} =$	?	
3). $\sqrt{3\sqrt{16}} =$	?	 man berechne zuerst die innere Wurzel.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

4). $\sqrt{3\sqrt{\frac{7}{8}}} = \ldots\ldots ?$

5). $\sqrt{\frac{27\sqrt{4{,}9}}{\sqrt{121}}} = \ldots\ldots ?$

6). $\sqrt{2-\sqrt{2}} = \ldots\ldots ?$. . . Der für die innere Wurzel berechnete Wert muss von 2 subtrahiert und aus dem erhaltenen Resultat die Quadratwurzel gezogen werden.

7). $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \ldots\ldots ?$

8). $\sqrt{3} = \ldots\ldots ?$

9). $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \ldots\ldots ?$

10). $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \ldots\ldots ?$

11). $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \ldots\ldots ?$

12). $5(\sqrt{5}-1) = \ldots\ldots ?$

13). $\frac{5}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \ldots\ldots ?$

14). $\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \ldots\ldots ?$

15). $\frac{5}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \ldots\ldots ?$

16). $\frac{5}{8}\sqrt{10+2\sqrt{8}} = \ldots\ldots ?$

17). $2\sqrt{5-2\sqrt{5}} = \ldots\ldots ?$

18). $\sqrt{\frac{18+\sqrt{5\frac{3}{4}}}{24-\sqrt{16{,}8}}} = \ldots\ldots ?$

19). $5\sqrt{5-3\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \ldots\ldots ?$

Anmerkung. Die gegebenen Ausdrücke unter Nr. 6 bis Nr. 17 stellen, wenn man den Radius eines Kreises = 1 annimmt, die Seiten, Umfänge und Inhalte gewisser regulärer Polygone dar, z. Beisp.:

Nr. 6 stellt die Seite des dem gedachten Kreise eingeschriebenen regulären Achtecks dar;
„ 7 stellt die Seite des betreff. regul. 16-Ecks dar;
„ 8 „ „ „ „ „ „ 3- „ „
„ 9 „ „ „ „ „ „ 12- „ „
„ 10 „ „ „ „ „ „ 24- „ „
„ 11 „ „ „ „ „ „ 10- „ „
„ 12 „ den Umfang „ „ „ 10- „ „
„ 13 „ „ Inhalt „ „ „ 10- „ „
„ 14 „ die Seite „ „ „ 5- „ „
„ 15 „ den Umfang „ „ „ 5- „ „
„ 16 „ „ Inhalt „ „ „ 5- „ „
„ 17 „ die Seite des dem gedachten Kreise umschriebenen regulären Fünfecks dar.

c). Kubikwurzelausziehung aus algebraischen Summen.

Bei der Kubikwurzelausziehung aus algebraischen Summen kann man 2 Fälle unterscheiden, nämlich:

α). die gedachte Wurzel ist **rational**, d. h. es gibt ein genau angebbarer Ausdruck, der in die 3[te] Potenz erhoben gleich der gegebenen algebr. Summe ist, was man allerdings oft nicht sofort beurteilen kann,

oder:

β). die gedachte Wurzel ist **irrational**, d. h. es gibt kein genau angebbarer Ausdruck, welcher der angeführten Bedingung genügt.

α). Ausziehung rationaler Kubikwurzeln, deren Radikanden algebraische Summen sind.

Um eine Regel für die gedachte Kubikwurzelausziehung aufstellen zu können, mache man folgende Betrachtung:

Nach dem auf Seite 57 aufgestellten Lehrsatz 15, ist z. B.:

$$(a+b+c)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$$

oder, wenn man die rechte Seite alphabetisch, bezw. nach Potenzen der Hauptgrösse a ordnet:

$$(a+b+c)^3 = a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$$

Hieraus ergibt sich nun, dass auch:

$$\sqrt[3]{(a+b+c)^3} = \sqrt[3]{a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6ab+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3}$$

oder:

$$1). \quad \sqrt[3]{a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6ab+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3} = a+b+c \text{ ist.}$$

Hat man nun einen algebr. Ausdruck, z. B.:

$$a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6ab+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$$

welcher alphabetisch und nach Potenzen eines und desselben Buchstabens geordnet ist und man will die Kubikwurzel aus demselben ziehen, so ist aus vorstehender Relation 1). ersichtlich, dass die gesuchte Wurzel wiederum eine Summe sein muss und dass man das 1. Glied dieser Wurzel, nämlich a findet, indem man aus dem 1. Glied des Radikanden, nämlich aus a^3, die 3. Wurzel zieht. Nimmt man nun den Kubus des soeben gefundenen 1. Gliedes der Wurzel von dem zu radizierenden Ausdruck weg, so bleibt als Rest der geordnete Ausdruck:

$$3a^2b+3a^2c+3ab^2+6ab+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$$

Hieraus ist ersichtlich, dass man das zu bestimmende 2. Glied der Wurzel, nämlich b findet, wenn man mit dem 3fachen Produkte des Quadrats des 1. Gliedes, nämlich mit $3a^2$, in das erste Glied des Restes dividiert. Nimmt man nun das dreifache Produkt des Quadrats des 1. Gliedes a mal dem soeben bestimmten 2. Glied b der Wurzel und auch noch das 3fache Produkt des 1. Gliedes a mal dem Quadrat des 2. Gliedes b und auch noch den Kubus des 2. Gliedes b von dem Rest des Radikanden weg, so bleibt als neuer Rest der geordnete Ausdruck:

$$3a^2c+6ab+3ac^2+3b^2c+3bc^2+c^3$$

für welchen man auch:

$$3(a^2+2ab+b^2) . c+3(a+b) . c^2+c^3$$

oder:

$$3(a+b)^2 . c+3(a+b) . c^2+c^3$$

gesetzt denken kann.

Hieraus ist ersichtlich, dass man das noch zu bestimmende 3. Glied der Wurzel, nämlich c findet, wenn man mit dem 3fachen Prokukt des Quadrats der Summe der bereits bestimmten beiden ersten Glieder der Wurzel, nämlich mit: $3(a+b)^2$, bezw. mit $3a^2+6ab+3b^2$ den zuletzt erhaltenen Rest dividiert. Subtrahiert man nun das 3fache Produkt des Quadrats der Summe der beiden ersten Glieder mal dem soeben gefundenen 3. Gliede c der Wurzel und auch das 3fache Produkt der Summe der beiden ersten Glieder mal dem Quadrat des gefund. 3. Gliedes c und schliesslich auch noch den Kubus dieses 3. Gliedes c von dem zuletzt erhaltenen Rest des Radikanden, so ist für das gegebene Beispiel die Wurzelausziehung erledigt.

Aus dieser Betrachtung, welche man noch an verschiedenen anderen Beispielen anstellen kann, lässt sich nachstehende Regel ableiten:

Regel 8. Man zieht aus einer algebraischen Summe die Kubikwurzel, indem man:

1). die gegebene algebraische Summe alphabetisch und nach Potenzen einer Hauptgrösse ordnet (siehe die Erkl. 51, Seite 260); dann

2). aus dem ersten Gliede des geordneten Radikanden die Kubikwurzel zieht, wodurch das 1. Glied a der gesuchten Wurzel bestimmt wird; dann

3). den Kubus dieses ersten Gliedes, nämlich a^3, von dem Radikanden subtrahiert und den Rest des Radikanden wieder in geordneter Form niederschreibt; dann

4). mit dem 3fachen Produkte des Quadrats des vorhin bestimmten 1. Gliedes der Wurzel, nämlich mit $3a^2$, in das 1. Glied des Restes des Radikanden dividiert, wodurch das 2. Glied b der gesuchten Wurzel bestimmt wird; dann

5). das 3fache Produkt des Quadrats des 1. Gliedes a mal dem soeben bestimmten 2. Gliede b der Wurzel, näm- $3a^2b$, und auch das 3fache Produkt des 1. Gliedes a mal dem Quadrat des 2. Gliedes b, nämlich $3ab^2$, und schliesslich auch noch den Kubus des soeben gefundenen 2. Gliedes b, nämlich b^3, von dem Rest des Radikanden subtrahiert.

Nunmehr können 2 Fälle eintreten, entweder es bleibt kein Rest mehr, wie in nebenstehendem Beispiel 1, oder es bleibt noch ein Rest. Im 1. Fall ist die Wurzelausziehung fertig und

Beispiel 1.

$$\sqrt[3]{8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3} = \underset{a}{2x} - \underset{b}{y}$$

$$\begin{array}{l} -8x^3 \quad (= a^3) \\ + \\ \hline (3a^2 =)\ 12x^2 \mid -12x^2y + 6xy^2 - y^3 \\ \qquad\qquad -12x^2y + 6xy^2 - y^3 \quad (= 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\ \qquad\qquad + \qquad\quad - \qquad\quad + \\ \hline \qquad\qquad\quad " \qquad\quad " \qquad\quad " \end{array}$$

die erhaltene Wurzel ist ein Binomium; im 2. Fall ist die Wurzelausziehung noch nicht fertig und man verfährt alsdann weiter, indem man:

6). den erhaltenen Rest ordnet und mit dem 3fachen Produkt des Quadrats der Summe der beiden ersten Glieder der Wurzel, nämlich mit: $3(a+b)^2$, d. i. $= 3a^2 + 6ab + 3b^2$, in diesen Rest dividiert. Dies geschieht, indem man nur mit dem 1. Glied des Dividenden (mit $3a^2$) in das 1. Glied des Radikandenrestes dividiert, womit das 3. Glied c der gesuchten Wurzel bestimmt wird; dann:

7). das 3fache Produkt des Quadrats der Summe der beiden ersten Glieder mal dem soeben gefundenen 3. Gliede c, nämlich $3(a+b)^2 . c$, d. i. $= 3a^2c + 6abc + 3b^2c$, und auch das 3fache Produkt der Summe der beiden ersten Glieder mal dem Quadrat des 3. Gliedes c, nämlich $3(a+b) . c^2$, d. i. $= 3ac^2 + 3bc^2$, und auch noch schliesslich den Kubus des soeben gefundenen 3. Gliedes c, nämlich c^3, von dem Rest des Radikanden subtrahiert.

Nunmehr können wieder 2 Fälle eintreten, entweder es bleibt kein Rest mehr, wie in nebenstehendem Beisp. 2, oder es bleibt noch ein Rest. Im 1. Fall ist die Wurzelausziehung fertig und die erhaltene Wurzel ist ein Trinomium; im 2. Fall ist die Wurzelausziehung noch nicht fertig und man verfährt weiter, indem man:

8). den erhaltenen Rest wieder ordnet und ganz analog wie unter 6). und 7). angegeben, verfährt, u. s. f.

Die Probe für die Richtigkeit der ausgeführten Operation besteht darin, dass die erhaltene Wurzel in die 3te Potenz erhoben den radizierten Ausdruck ergeben muss.

Im übrigen siehe man die nebenstehenden Beispiele und die Regeln 9 und 10.

Beispiel 2.

$$\sqrt[3]{8x^6 - 36x^5 + 114x^4 - 207x^3 + 285x^2 - 225x + 125} = \underbrace{2x^2}_{a} - \underbrace{3x}_{b} + \underbrace{5}_{c}$$

$$\begin{array}{rl}
 & -8x^6 \quad (= 3a^2) \\
 & + \\
\hline
(3a^2 =)\ 12x^4 & -36x^5 + 114x^4 - 207x^3 + 285x^2 - 225x + 125 \\
 & -36x^5 + 54x^4 - 27x^3 \quad (= 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\
 & + \quad - \quad + \\
\hline
(3(a+b)^2 =)\ 12x^4 - 36x^3 + 27x^2 & 60x^4 - 180x^3 + 285x^2 - 225x + 125 \\
 & 60x^4 - 180x^3 + 135x^2 \quad (= 3(a+b)^2 . c) \\
 & + \quad - \\
\hline
 & 150x^2 - 225x + 125 \\
 & 150x^2 - 225x + 125 \quad (= 3(a+b) . c^2 + c^3) \\
 & - \quad + \quad - \\
\hline
\end{array}$$

Aufgabe 37. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Radizierungen nach vorstehender Regel 8 ausführen, dabei den Zusatz 4, Seite 201, beachten.

Uebungsbeispiele: | **Resultate:** | **Andeutungen:**

1). $\sqrt[3]{8-60x+150x^2-125x^3} = \;.\;.\; 2-5x$. . Da der gegebene Radikand nach steigenden Potenzen von x geordnet ist, so erhält man:

$$\sqrt[3]{8-60x+150x^2-125x^3} = \underbrace{2}_{a} - \underbrace{5x}_{b}$$

$$\pm 8 \;(=a^3)$$

$$(3a^2 =)\; 12 \;\Big|\; -60x+150x^2-125x^3$$

$$-60x+150x^2-125x^3 \;(=3a^2b+3ab^2+b^3)$$

$$+ \quad - \quad +$$

$$= \quad = \quad =$$

2). $\sqrt[3]{54x^{10}y^{16}-216x^{12}y^{18}+\frac{1}{8}x^5y^{12}-\frac{9}{2}x^8y^{14}} = \frac{1}{2}x^2y^4-6x^4y^6$ Ordnet man den Radikanden nach steigenden Potenzen, so erhält man:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}x^6y^{12}-\frac{9}{2}x^8y^{14}+54x^{10}y^{16}-216x^{12}y^{18}} = \underbrace{\frac{1}{2}x^2y^4}_{a} - \underbrace{6x^4y^6}_{b}$$

$$\pm \frac{1}{8}x^6y^{12} \;(=a^3)$$

$$(3a^2=)\; \frac{3}{4}x^4y^8 \;\Big|\; -\frac{9}{2}x^8y^{14}+54x^{10}y^{16}-216x^{12}y^{18}$$

$$-\frac{9}{2}x^8y^{14}+54x^{10}y^{16}-216x^{12}y^{18} \;(=3a^2b+3ab^2+b^3)$$

$$+ \quad - \quad +$$

$$= \quad = \quad =$$

3). $\sqrt[3]{x^{-6m+12}-6x^{-7m+3}+12x^{-8m-6}-8x^{-9m-15}} = x^{-2m+4}-2x^{-3m-5}$. . Der Radikand ist in Bezug auf den Exponenten m nach fallenden Potenzen der Grösse x geordnet. Man erhält:

$$\sqrt[3]{x^{-6m+12}-6x^{-7m+3}-12x^{-8m-6}-8x^{-9m-15}} = \underbrace{x^{-2m+4}}_{a} - \underbrace{2x^{-3m-5}}_{b}$$

$$\pm x^{-6m+12} \;(=a^3)$$

$$(3a^2=)\; 3x^{-4m+8} \;\Big|\; -6x^{-7m+3}-12x^{-8m-6}-8x^{-9m-15}$$

$$-6x^{-7m+3}-12x^{-8m-6}-8x^{-9m-15} \;(=3a^2b+3ab^2+b^3)$$

$$+ \quad - \quad +$$

$$= \quad = \quad =$$

4). $\sqrt[3]{\sqrt{x}-3\sqrt[6]{x^2y}+3\sqrt[6]{xy^2}-\sqrt{y}} = \sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}$. . . Es lässt sich leicht erkennen, dass der Radikand nach der Hauptgrösse x geordnet ist, indem das 1. Glied $\sqrt{x}$, das 2. Glied $\sqrt[3]{x}$, das 3. Glied $\sqrt[6]{x}$ etc. enthält.

$$\sqrt[3]{\sqrt{x}-3\sqrt[6]{x^2y}+3\sqrt[6]{xy^2}-\sqrt{y}} = \underbrace{\sqrt[6]{x}}_{a}{}^{1)} - \underbrace{\sqrt[6]{y}}_{b}{}^{3)}$$

$$\pm\sqrt{x} \;(=a^3)$$

$$(3a^2=)\; 3\sqrt[6]{x^2}\,{}^{2)} \;\Big|\; -3\sqrt[6]{x^2y}+3\sqrt[6]{xy^2}-\sqrt{y}$$

$$-3\sqrt[6]{x^2y}+3\sqrt[6]{xy^2}\,{}^{4)}-\sqrt{y}\,{}^{5)} \;(=3a^2b+3ab^2+b^3)$$

$$+ \quad - \quad +$$

$$= \quad = \quad =$$

[1]). Man beachte, dass $\sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt[6]{x}$ ist.

[2]). „ „ „ $(3a^2) = 3(\sqrt[6]{x})^2 = 3\sqrt[6]{x^2}$ ist.

[3]). „ „ „ $\dfrac{-3\sqrt[6]{x^2y}}{3\sqrt[6]{x^2}} = -\sqrt[6]{\dfrac{x^2y}{x^2}} = -\sqrt[6]{y}$ ist.

[4]). „ „ „ $(3ab^2) = 3\,.\,\sqrt[6]{x}\,.\,(-\sqrt[6]{y})^2 = 3\sqrt[6]{x}\,.\,\sqrt[6]{y^2} = 3\sqrt[6]{xy^2}$ ist.

[5]). „ „ „ $(b^3) = (\sqrt[6]{y})^3 = \sqrt[6]{y^3} = \sqrt[2]{y}$ ist.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

5). $\sqrt[3]{27x^6 - 54x^5 + 63x^4 - 44x^3 + 21x^2 - 6x + 1} =$

$3x^2 - 2x + 1$. . . Analog dem Beispiel 2, welches zu Regel 8 gehört, erhält man:

$$\sqrt[3]{27x^6 - 54x^5 + 63x^4 - 44x^3 + 21x^2 - 6x + 1} = \underbrace{3x^2}_{a} \underbrace{- 2x}_{b} \underbrace{+ 1}_{c}$$

$$\pm 27x^6 \; (= a^3)$$

$$(3a^2 =)\; 27x^4 \;\Big|\; - 54x^5 + 63x^4 - 44x^3 + 21x^2 - 6x + 1$$

$$- 54x^5 + 36x^4 - 8x^3$$

$$+ \quad - \quad +$$

$$(3(a+b)^2 = 3(3x^2 - 2x)^2 =)\; 27x^4 - 36x^3 + 12x^2 \;\Big|\; 27x^4 - 36x^3 + 21x^2 - 6x + 1$$

$$27x^4 - 36x^3 + 12x^2 \quad (= 3(a+b)^2 . c = 3(3x^2 - 2x)^2 . 1)$$

$$- \quad + \quad -$$

$$9x^2 - 6x + 1$$

$$9x^2 - 6x + 1 \quad (= 3(a+b) . c^2 + c^3)$$

$$- \quad + \quad -$$

$$= \quad = \quad =$$

6). $\sqrt[3]{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} =$? analog dem gelösten Beispiel 1.

7). $\sqrt[3]{27m^3 - 189m^2 + 441m - 343} =$. ?

8). $\sqrt[3]{x^6 + 6x^4y + 12x^2y^2 + 8y^3} =$. . ?

9). $\sqrt[3]{\frac{27x^6y^3}{125} - \frac{9x^5y^4}{10} + \frac{5x^4y^5}{4} - \frac{125x^3y^6}{216}} =$?

10). $\sqrt[3]{\frac{64a^3b^3}{27c^3} + \frac{4a^3b}{c} + \frac{9a^3c}{b} + \frac{27a^3c^3}{64b^3}} =$?

11). $\sqrt[3]{\frac{64}{125}x^9y^{-6} - \frac{16}{25}x^5y^{-1}z^{-2} + \frac{4}{15}xy^4z^{-4} - \frac{1}{27}x^{-3}y^9z^{-6}} =$? analog dem gelösten Beispiel 3.

12). $\sqrt[3]{a + \sqrt[3]{27a^2b} + \sqrt[3]{27ab^2} + b} =$? analog dem gelösten Beispiel 4.

13). $\sqrt[3]{m + 3\sqrt[3]{m^2n} + 3\sqrt[3]{mn^2} + n} =$?

14). $\sqrt[3]{x^3 + 28x^9 - 54x^{13} - 6x^5 - 27x^{15} - 9x^{11} + 3x^7} =$? analog dem gelösten Beispiel 5.

15). $\sqrt[3]{m^6 - 3m^5n + m^4n^2 - 7m^3n^2 + 6m^2n^4 - 3mn^5 + n^6} =$?

16). $\sqrt[3]{1 + 121a^8 + 7a^4 - 72a^{10} + 16a^2 + 10a^2 - 82a^6} =$?

17). $\sqrt[3]{8a^3 - 12a^2 + 30a - 25 + 30a^{-1} - 12a^{-2} + 8a^{-3}} =$?

18). $\sqrt[3]{75a^4 - 47a^3 - 21a^2 - 6a + 1 - 84a^5 + 66a^6 - 33a^7 + 9a^8 - a^6} =$?

β). Ausziehung irrationaler Kubikwurzeln, deren Radikanden algebraische Summen sind.

Hat man aus einer algebraischen Summe die Kubikwurzel zu ziehen und die nach Regel 8, Seite 293, auszuführende Operation geht, soweit man sie auch fortsetzen mag, ohne Rest nicht auf, was man bei einiger Uebung bald erkennt, so existiert kein genau angebbarer Wert, der in die 3te Potenz erhoben die zu radizierende Summe ergibt, d. h. die betreffende Wurzel ist **irrational.**

In diesem Falle beachte man folgende Regel:

Regel 9. Bei der Ausziehung irrationaler Kubikwurzeln, deren Radikanden algebraische Summen sind, verfahre man ganz genau so, wie in der Regel 8, Seite 293, angegeben ist und bestimme auf diese Weise eine beliebige Anzahl Glieder der fraglichen Wurzel, welche in Form einer unendlichen Reihe erscheint.

Die Probe für die Richtigkeit der gemachten angenäherten Radizierung besteht darin, dass, wenn man die unendliche Reihe in deren Form die Wurzel erscheint, an irgend einer Stelle abbricht und diesen Teil der Wurzel quadriert und hierzu noch den betreffenden Rest des Radikanden addiert, die zu radizierende Summe herauskommen muss.

Man siehe nebenstehendes Beispiel 1 und beachte die Erkl. 64 u. 65.

Beispiel 1.

$$\sqrt[3]{1+x} = \underbrace{1}_{a} + \underbrace{\frac{x}{3}}_{b} - \underbrace{\frac{x^2}{9}}_{c} + \ldots\ldots$$

± 1

$(3a^2 =)\ 3 \mid +x$

$+x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{27}\ (= 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$

$-\quad -\quad -$

$(3(a+b)^2 =)\ 3 + 2x + \frac{x^2}{3} \mid -\frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{27}$

$-\frac{x^2}{3} - \frac{2x^3}{9} - \frac{x^4}{27} + \frac{x^4}{27} + \frac{x^5}{81} - \frac{x^6}{729}$

$+\quad +\quad +\quad -\quad -\quad +$

u. s. f.

Probe: Bricht man am dritten Gliede der Wurzel ab, so muss:

$\left(1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}\right)^3 +$ dem 3ten Reste $1 + x$ sein.

Erkl. 64. Die in der Regel 9 angedeutete Radizierung hat nur dann und hauptsächlich nur in der höheren Analysis besonderen Wert, wenn die Wurzel in Form einer **konvergenten** Reihe (siehe Erkl. 73, Seite 168) erscheint, d. h. wenn die Summe einer Anzahl Glieder der Wurzel sich um so mehr einem bestimmten Grenzwerte (dem Radikanden) nähert, je mehr Glieder man zur Bildung dieser Summe nimmt. Diese Summen sind dann **Näherungswerte** der gesuchten Wurzel. Das Bildungsgesetz der Glieder solcher Reihen lässt sich erkennen und deshalb kann man solche Reihen beliebig erweitern.

Erkl. 65. Stösst man bei der Ausziehung von Kubikwurzeln, deren Radikanden algebraische Summen sind, auf irrationale Wurzeln, so unterbleibt meistens die Radizierung, ausgenommen in denjenigen Fällen in welchen dies besonders verlangt wird. Man versucht alsdann die zu radizierende Summe in solche Faktoren zu zerlegen, aus welchen man teil-

Beispiel 2.

Gegeben sei:

$$\sqrt[3]{\frac{8a^3b}{c^3} - \frac{24a^3b}{c^3} - \frac{40a^3b^3}{c^3} + \frac{32a^4b^4}{c^3}}$$

Wollte man hier die Radizierung ausführen, so wird man bald merken, dass die Wurzel irrational ist. Man sucht deshalb den Ausdruck wenigstens zu vereinfachen, was erreicht wird, wenn man den Faktor: $\frac{8a^3}{c^3}$ ausscheidet, wonach der gegebene Ausdruck übergeht, in:

$$\sqrt[3]{\frac{8a^3}{c^3}\left(b - 3b - 5b^3 - 4ab^4\right)} =$$

$$\frac{2a}{c}\sqrt[3]{b - 3b - 5b^3 + 4ab^4} =$$

$$\frac{2a}{c}\sqrt[3]{b\,(4ab^3 - 5b^2 - 2)}$$

weise die Wurzel ziehen kann, um somit den gegeb. Ausdruck wenigstens zu reduzieren.

Man siehe umstehendes Beispiel 2 und die entsprechenden Beispiele in dem Abschnitt: **Vermischte Aufgaben.**

Aufgabe 38. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Radizierungen nach vorstehender Regel 9 näherungsweise ausführen, dabei den Zusatz 4, S. 201, beachten.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $\sqrt[3]{1+x} =$	$1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3-\frac{10}{243}x^4+\ldots$	analog wie in dem gelösten Beispiel 1, welches zur Regel 9 gehört.
2). $\sqrt[3]{1-x} =$	$1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2-\frac{5}{81}x^3-\frac{10}{243}x^4+\ldots$	
3). $\sqrt[3]{1+x^3} =$	$1+\frac{x^3}{2}-\frac{x^6}{9}+\frac{5x^9}{81}-\frac{10x^{12}}{243}+\ldots\ldots$	
4). $\sqrt[3]{x^3+1} =$	$x+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{9x^5}+\frac{52}{81x^8}-\ldots\ldots$	
5). $\sqrt[3]{1-x^3} =$?		
6). $\sqrt[3]{a^3+b} =$?		
7). $\sqrt[3]{x^3-x^2+x-1} =$?		
8). $\sqrt[3]{x^3+y^3} =$?		
9). $\sqrt[3]{1+x^2} =$?		
10). $\sqrt[3]{1-x^2} =$?		

Aufgabe 39. Man soll mit Hülfe der in den Uebungsbeispielen der vorhergehenden Aufgabe sich ergebenden Reihen die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Kubikwurzelausziehungen ausführen, dabei den Zusatz 4, Seite 201, beachten.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $\sqrt[3]{37} =$	3,33222......	... man setze: $\sqrt[3]{37}=\frac{10}{3}\sqrt[3]{1-\frac{1}{100}}$ dann setze man in dem Beispiel 2 der Aufgabe 38 für x überall den Wert: $\frac{1}{100}$ und berechne eine Anzahl der Glieder der nunmehr konvergenten Reihe.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
2). $\sqrt[3]{27\frac{1}{5}} =$	3,00738.....	. . . man setze: $\sqrt[3]{27\frac{1}{5}} = \sqrt[3]{27+\frac{1}{5}} = \sqrt[3]{3^3+\frac{1}{5}}$ und benutze die sich im Beispiel 6 der Aufgabe 38 ergebenden Reihe, indem man in einer Anzahl Glieder derselben $a = 3$ und $b = \frac{1}{5}$ setzt.
3). $\sqrt[3]{53} =$	?	 analog dem gelösten Beispiel 1.
4). $\sqrt[3]{9} =$	?	
5). $\sqrt[3]{83} =$	?	
6). $\sqrt[3]{343\frac{1}{10}} =$	?	 „ „ „ „ 2.
7). $\sqrt[3]{728\frac{3}{1000}} =$	?	
8). $\sqrt[3]{727\frac{3}{10}} =$	?	. . man setze: $\sqrt[3]{727\frac{3}{10}} = \sqrt[3]{728-\frac{7}{10}}$

d). Kubikwurzelausziehung dekadischer Zahlen.

Die Kubikwurzelausziehung aus dekadischen Zahlen kann man, je nachdem die zu radizierenden Zahlen ganz oder gebrochen sind, einteilen in:

α). die Kubikwurzelausziehung aus **ganzen** Zahlen,

β). die Kubikwurzelausziehung aus **Dezimalbrüchen**,

γ). die Kubikwurzelausziehung aus **gewöhnlichen Brüchen**.

Bei jeder dieser drei Operationen unterscheidet man wieder zwei Fälle, nämlich:

1). die zu radizierenden Zahlen sind sogenannte **Kubikzahlen**, bezw. die betr. Wurzeln sind **rational** oder sogenannte **genaue Kubikwurzeln**, und

2). die zu radizierenden Zahlen sind keine sog. Kubikzahlen, bezw. die betreffenden Wurzeln sind **irrational** oder sogenannte **ungenaue Kubikwurzeln.**

α). Ausziehung rationaler Kubikwurzeln, deren Radikanden ganze Zahlen sind.

Bei der Ausziehung rationaler Kubikwurzeln aus ganzen Zahlen kann man 2 Fälle unterscheiden, nämlich:

1). die zu suchende Wurzel lässt sich mittelst Kenntnis einer gewissen Reihe sog. Kubikzahlen direkt bestimmen

oder:

2). dies ist nicht der Fall. Für diesen Fall muss eine Regel aufgestellt werden nach welcher die zu bestimmende Wurzel gefunden werden kann.

Ehe nun zur Aufstellung einer Regel geschritten wird nach welcher man die Kubikwurzel aus einer ganzen Zahl ziehen kann, muss zunächst festgestellt werden, wie man aus der Anzahl der Ziffern einer gegebenen Zahl auf die Anzahl der Ziffern der zu bestimmenden Kubikwurzel schliessen kann und dies geschieht mittelst des nachstehenden Lehrsatzes:

$1^3 = 1$. . . $\sqrt[3]{1} = 1$

$2^3 = 8$. . . $\sqrt[3]{8} = 2$

$3^3 = 27$. . . $\sqrt[3]{27} = 3$

$4^3 = 64$. . . $\sqrt[3]{64} = 4$

$5^3 = 125$. . . $\sqrt[3]{125} = 5$ (dies sind Kubikzahlen)

$6^3 = 216$. . . $\sqrt[3]{216} = 6$

$7^3 = 343$. . . $\sqrt[3]{343} = 7$

$8^3 = 512$. . . $\sqrt[3]{512} = 8$

$9^3 = 729$. . . $\sqrt[3]{729} = 9$

u. s. f.

Lehrsatz 23. Die Kubikwurzel aus einer nziffrigen Zahl hat $\frac{n}{3}$ oder $\frac{n+1}{3}$ oder $\frac{n+2}{3}$ Ziffern, nämlich je nachdem n durch 3 teilbar ist, oder 2 oder 1 zum Reste lässt.

Beweis. Kubiert man der Reihe nach je die kleinste und die grösste 1-, 2-, 3-, 4- etc. ziffrige Zahl und schreibt diese somit erhaltenen Potenzen nach Antw. der Frage 15, Seite 180, in Wurzelform, wie folgt:

$1^3 = 1$ $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1^3} = 1$

$9^3 = 729$ $\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{9^3} = 9$

$10^3 = 1000$ $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10$

$99^3 = 970299$ $\sqrt[3]{970299} = \sqrt[3]{99^3} = 99$

$100^3 = 1000000$ $\sqrt[3]{1000000} = \sqrt[3]{100^3} = 100$

$999^3 = 997002999$. . . $\sqrt[3]{997002999} = \sqrt[3]{999^3} = 999$

$1000^3 = 1000000000$. . . $\sqrt[3]{1000000000} = \sqrt[3]{1000^3} = 1000$

$9999^3 = 999700029999$. . $\sqrt[3]{999700029999} = \sqrt[3]{9999^3} = 9999$

u. s. f. u. s. f.

so ersieht man aus dieser Zusammenstellung, dass:

1). der Kubus einer einziffrigen Zahl mindestens eine und höchstens drei Ziffern hat und dass umgekehrt die Kubikwurzel aus einer ein- oder zwei- oder dreiziffrigen Zahl nur eine einziffrige Zahl sein kann;

2). der Kubus einer zweiziffrigen Zahl mindestens vier und höchstens sechs Ziffern hat und dass umgekehrt die Kubikwurzel aus

einer vier-, fünf- oder sechsziffrigen Zahl nur eine zweiziffrige Zahl sein kann;

3). der Kubus einer dreiziffrigen Zahl mindestens sieben und höchstens neun Ziffern hat und dass umgekehrt die Kubikwurzel aus einer sieben-, acht- oder neunziffrigen Zahl nur eine dreiziffrige Zahl sein kann, u. s. f.

Setzt man diese Betrachtung fort, so kommt man zu dem **allgemeinen Schluss**, dass:

der Kubus einer nziffrigen Zahl mindestens $(3n - 2)$ oder $(3n - 1)$ und höchstens $3n$ Ziffern hat und dass umgekehrt die Kubikwurzel aus einer n ziffr. Zahl nur eine $\frac{n}{3}$ oder $\frac{n+1}{3}$ oder $\frac{n+2}{3}$ziffrige Zahl sein kann und zwar je nachdem n durch 3 teilbar ist, oder bei der Division durch 3 die Zahl 2 oder 1 zum Rest hat.

Erkl. 66. Aus vorstehendem Lehrsatz ergibt sich, dass aus der Anzahl der Ziffern einer zu radizierenden Zahl auf die Anzahl der Ziffern der Kubikwurzel geschlossen werden kann.

Teilt man nämlich die zu radizierende Zahl von rechts nach links in Klassen zu je dreien, wobei die letzte Klasse zur Linken ein-, zwei- und dreiziffrig sein kann, so ergibt die Anzahl der hierdurch entstehenden Klassen die Anzahl der Ziffern der zu bestimmenden Kubikwurzel.

Man siehe nebenstehende Beispiele.

Beispiele.

1). Gegeben sei: $\sqrt[3]{912673}$

teilt man den Radikanden von rechts nach links in Klassen zu je dreien, wie folgt:

$$\sqrt[3]{912|673}$$

so erhält man 2 solcher Klassen, mithin muss die zu bestimmende Kubikwurzel 2 Ziffern enthalten.

2). Gegeben sei: $\sqrt[3]{15438249}$

Den Radikanden von rechts nach links in Klassen zu je drei abgeteilt, wie folgt:

$$\sqrt[3]{15|438|249}$$

erhält man 3 solcher Klassen; die zu bestimmende Wurzel hat somit 3 Ziffern.

3). Gegeben sei: $\sqrt[3]{1124864000}$

Den Radikanden von rechts nach links in Klassen zu je drei abgeteilt, wie folgt:

$$\sqrt[3]{1|124|864|000}$$

erhält man 4 solcher Klassen; die zu bestimmende Wurzel hat somit 4 Ziffern.

Um nun eine Regel aufstellen zu können, nach welcher man die Kubikwurzel aus einer beliebigen ganzen Zahl ziehen kann, beachte man, dass sich jede Zahl in eine Summe, bezw. in eine nach Potenzen von 10 geordnete Summe zerlegen lässt, mithin deren Kubus nach dem Lehrsatze 15, Seite 57, gebildet werden kann, wodurch umgekehrt die Kubikwurzelausziehung dekadischer Zahlen auf die algebraischer Summen zurückgeführt wird.

Wählt man eine beliebige Zahl, z. B.: 649, deren Ziffern der Reihe nach **allgemein** mit: a, b und c bezeichnet seien, und schreibt dieselbe in der Form:

$$\underset{abc}{649} = \underset{a.100}{600} + \underset{b.10}{40} + \underset{c}{9}$$

oder in der Form:

$$\underset{abc}{649} = \underset{a.10^2}{6.10^2} + \underset{b.10}{4.10} + \underset{c}{9}$$

so erhält man nach dem Lehrsatz 15, Seite 57, für den **Kubus** der in dieser Summenform dargestellten Zahl:

$$\underset{abc}{649^3} = (\underset{a.10^2}{6.10^2} + \underset{b.10}{4.10} + \underset{c}{9})^3$$

$$= \underset{(a.10^2)^3}{(6.10^2)^3} + \underset{3.(a.10^2)^2.(b.10)}{3.(6.10^2)^2.4.10} + \underset{3.a.10^2.(b.10)^2}{3.6.10^2.(4.10)^2} + \underset{(b.10)^3}{(4.10)^3} + \underset{3.(a.10^2+b.10)^2.c}{3.(6.10^2+4.10)^2.9} +$$

$$\underset{3.(a.10^2+b.10).c^2}{3.(6.10^2+4.10).9^2} + \underset{c^3}{9^3}$$

oder, wenn man die einzelnen Summanden nach Potenzen von 10 wie folgt ordnet:

$$\underset{abc}{649^3} = \underset{a^3.10^6}{6^3.10^6} + \underset{3.a^2.b.10^5}{3.6^2.4.10^5} + \underset{3.a.b^2.10^4}{3.6.4^2.10^4} + \underset{b^3 10^3}{4^3 10^3} + \underset{3(10a+b)^2.c.10^2}{3.(6.10+4)^2.9.10^2} + \underset{3(10a+b).c^2.10}{3.(6.10+4).9^2.10} + \underset{c^3}{9^3}$$

Berechnet man jetzt die einzelnen Summanden und bildet die Summe derselben, so erhält man:

$\underset{abc}{649^3}$ =	216 000 000	. . . = $6^3 . 10^6$	=	$a^3 . 10^6$
	+ 43 200 000	. . . = $3 . 6^2 . 4 . 10^5$	=	$3a^2b . 10^5$
	+ 2 880 000	. . . = $3 . 6 . 4^2 . 10^4$. . .	=	$3ab^2 . 10^4$
	+ 64 000	. . . = $4^3 . 10^3$	=	$b^3 . 10^3$
	+ 11 059 200	. . . = $3(6 . 10 + 4)^2 . 9 . 10^2$	=	$3(10a + b)^2 . c . 10^2$
	+ 155 520	. . . = $3(6 . 10 + 4) . 9^2 . 10$	=	$3(10a + b) . c^2 . 10$
	+ 729	. . . = 9^3	=	c^3
649^3 =	273 359 449			

Lässt man schliesslich die bei vorstehender Addition nicht in Betracht kommenden Nullen, welche zugleich die betreffenden Potenzen von 10 darstellen, weg und zwar ohne hierbei die gegenseitigen Stellungen der zu addierenden übrig bleibenden Ziffern zu ändern, wovon man sich dadurch überzeugt, dass man (entsprechend dem vorstehenden Lehrsatze 23) die zu addierenden Posten durch Vertikalstriche **von rechts nach links** in Klassen **zu je drei** abteilt, so erhält man nachstehendes Schema:

Schema.

$\underset{abc}{649^3}$ =	216	. . .		= a^3	1.	Zeile
	+ 43	2 . .		= $3a^2b$	2.	„
	+ 2	88 .		= $3ab^2$	3.	„
	+	64		= b^3	4.	„
	+ 11	059	2	= $3(10a+b)^2 . c$. .	5.	„
	+	155	52	= $3 . (10a+b) . c^2$. .	6.	„
	+		729	= b^3	7.	„
$\underset{abc}{649^3}$ =	273	359	449			

Hat man nun umgekehrt aus der Zahl 273359449 die Kubikwurzel zu ziehen und man teilt dieselbe von rechts nach links in Klassen zu je drei, wodurch man nach der Erkl. 66 auf die Anzahl der Ziffern der zu bestimmenden Wurzel schliessen kann, welche Ziffern der Reihe nach mit a, b und c bezeichnet seien, so ersieht man aus vorstehendem Schema Folgendes:

a). Die 1. Klasse links (siehe Zeile 1 des Schemas) enthält den Kubus des ersten Gliedes a der Wurzel, nämlich a^3 (= 216) . . .

1). Sucht man also die Zahl, deren Kubus der in der 1. Klasse stehenden Zahl am nächsten kommt, so hat man das 1. Glied a der Wurzel gefunden; a ist für das gegebene Beispiel = 6.

b). Hängt man der 1. Klasse die **erste Ziffer** der 2. Klasse an, so enthält die somit gebildete Zahl das 3fache Produkt des Quadrats des 1. Gliedes a mal dem 2. Gliede b der fraglichen Wurzel, nämlich $2a^2b$ (= 432)
(siehe 2. Zeile des Schemas.)

2). Subtrahiert man hiernach den Kubus des nach 1). gefundenen 1. Gliedes a der Wurzel, nämlich a^3 (= 216) von der 1. Klasse und fügt dem Reste die 1. Ziffer der 2. Klasse an und dividiert mit dem 3fachen Produkt des Quadrats des 1. Gliedes, nämlich mit $3a^2$ (= 108) in die soeben gebildete Zahl, so erhält man die 2. Ziffer der Wurzel, nämlich b (= 4).

c). Hängt man der unter b). gebildeten Zahl die 2. Ziffer der 2. Klasse an, so enthält diese Zahl das 3fache Produkt des 1. Gliedes a mal dem Quadrat des 2. Gliedes b der Wurzel, nämlich $3ab^2$ (= 288)
(siehe 3. Zeile des Schemas.)

d). Hängt man der unter c). gebildeten Zahl die 3. Ziffer der 2. Klasse an, so enthält diese Zahl den Kubus des 2. Gliedes, nämlich b^3 (= 64) (siehe 4. Zeile des Schemas.)

e). Hängt man der unter d). gebildeten Zahl die **erste Ziffer** der 3. Klasse an, so enthält diese somit gebildete Zahl das 3fache Produkt des Quadrats der aus den beiden ersten Ziffern a und b der Wurzel gebildeten Zahl $(10a+b)$ mal dem 3. Gliede c der Wurzel, nämlich $3(10a+b)^2.c$ (= 110592)
(siehe 5. Zeile des Schemas.)

3). Subtrahiert man von der unter b). gebildeten Zahl das 3fache Produkt des Quadrats des 1. Gliedes mal dem unter 2). gefundenen 2. Gliede b, nämlich: $3a^2b$ (= 432) und hängt dem Reste die 2. Ziffer der 2. Klasse an und subtrahiert von dieser gebildeten Zahl das 3fache Produkt des 1. Gliedes a mal dem Quadrat des 2. Gliedes b, nämlich: $3ab^2$ (= 288) und hängt dem Reste die 3. Ziffer der 2. Klasse an und subtrahiert von dieser somit gebildeten Zahl den Kubus des 2. Gliedes b, nämlich b^3 (= 64) und hängt schliesslich dem Reste die **1. Ziffer** der 3. Klasse an und dividiert die somit gebildete Zahl durch das 3fache Produkt des Quadrats der aus den 2 ersten Gliedern a u. b der Wurzel gebildeten Zahl $(10a+b)$ = 64, nämlich durch $3(10a+b)^2$ (= 3.64^2 = 12288), so erhält man die 3. Ziffer der Wurzel, nämlich c (= 9).

f). Hängt man der unter e). gebildeten Zahl die 2. Ziffer der 3. Klasse an, so enthält diese Zahl das 3fache Produkt der aus den beiden ersten Ziffern a und b der Wurzel gebildeten Zahl $(10a+b)$ mal dem Quadrate des 3. Gliedes c, nämlich $3(10a+b).c^2$ (= 15552) . .
(siehe 6. Zeile des Schemas.)

g). Hängt man der unter f). gebildeten Zahl die 3. Ziffer der 3. Klasse an, so enthält diese somit gebildete Zahl (also die ganze gegebene Zahl) auch noch den Kubus des 3. Gliedes der Wurzel, nämlich c^3 (= 729)
(siehe 7. Zeile des Schemas.)

Hat die zu radizierende Zahl noch mehr Klassen, so ist die weitere Betrachtung eine analoge.

Aus vorstehender Betrachtung kann man nachstehende Regel ableiten:

Regel 10. Man zieht aus einer ganzen Zahl die Kubikwurzel, indem man: Hierbei beachte man nachstehende Beispiele 1, 2 und 3.

1). die gegebene Zahl von rechts nach links in Klassen zu je drei abteilt. Durch die Anzahl dieser Klassen ist nach dem Lehrsatz 23 die Anzahl der Ziffern der Wurzel bestimmt;

2). diejenige grösste ganze, allgemein durch a bezeichnete Zahl sucht, deren Kubus in der in der 1. Klasse stehenden Zahl enthalten ist, und den Kubus dieser gefundenen Zahl a von der 1. Klasse subtrahiert;

3). dem nunmehr erhaltenen Reste (derselbe kann auch = 0 sein) die **1. Ziffer** der 2. Klasse anhängt und diese somit gebildete Zahl durch das 3fache Produkt des Quadrats der ersten Wurzelziffer, nämlich durch $3a^2$ dividiert, wodurch man die 2te, allgemein durch b bezeichnete Ziffer der Wurzel erhält; dann das 3fache Produkt des Quadrats der 1. Ziffer a mal der soeben gefundenen Ziffer b, nämlich $3a^2b$ subtrahiert; dem erhaltenen Reste die 2. Ziffer der 2. Klasse anhängt und von der somit gebildeten Zahl das 3fache Produkt der 1. Ziffer a mal dem Quadrat der 2. Ziffer b, nämlich $3ab^2$ subtrahiert; dem nunmehr erhaltenen Reste die 3. Ziffer der 2. Klasse anhängt und von der somit gebildeten Zahl auch noch den Kubus der 2. Wurzelziffer, nämlich b^3 subtrahiert.

Bleibt hier kein Rest und ist keine Klasse mehr vorhanden, so ist die Radizierung fertig, siehe Beispiel 1. Ist noch ein Rest und keine Klasse mehr vorhanden, so beachte man die Regel 12; ist aber noch ein (oder kein) Rest und noch eine Klasse vorhanden, so verfahre man weiter, indem man:

4). dem zuletzt erhaltenen Reste die **1. Ziffer** der 3. Klasse anhängt und diese somit gebildete Zahl durch das 3fache Produkt des Quadrats der aus den beiden ersten Wurzelziffern gebildeten Zahl, nämlich durch: $3.(10a+b)^2$ dividiert, wodurch man die 3te, allgemein durch c bezeichnete Ziffer der Wurzel erhält; dann das 3fache Produkt des Quadrats der aus den beiden ersten Wurzelziffern gebildeten Zahl mal der soeben gefundenen 3. Ziffer c, nämlich: $2(10a+b)^2.c$ subtrahiert; dem erhaltenen Reste die 2. Ziffer der 3. Klasse anhängt und von der somit gebildeten Zahl das 3fache Produkt der aus den beiden ersten Wurzelziffern gebildeten Zahl mal dem Quadrat der 3. Ziffer c, nämlich $3(10a+b).c^2$ subtrahiert; dem nunmehr erhaltenen Reste die 3. Ziffer der 3. Klasse an-

Beispiele.

1). . . . $\sqrt[3]{912|673} = 97$ (a b)

```
             912|673  =  97
             729  (= a³)  a b
(3a² =) 243|1836
             1701  (= 3a²b)
             1357
             1323  (= 3ab²)
              343
              343  (= b²)
                ·
```

2). . . . $\sqrt[3]{15|438|249} = 249$ (a b c)

```
                         15|438|249  =  249
                          8  (= a³)      a b c
(3a² =)                  12|74
                            48  (= 3a²b)
                           263
                            96  (= 3ab²)
                          1678
                            64  (= b³)
(3(10a+b)² =        1728|16142
 = 3.24²)                15552  (= 3(10a+b)².c = 3.24².9)
                          5904
                          5832  (= 3(10a+b).c² = 3.24.9²)
                           729
                           729  (= b³ = 9³)
                             ·
```

3). . . . $\sqrt[3]{1|544|804|416} = 1156$ (a b c d)

```
                         1|544|804|416  =  1156
                         1  (= a³)         a b c d
(3a² =)                  3|5
                           3  (= 3a²b)
                          24
                           3  (= 3ab²)
                         214
                           1  (= b³)
(3(10a+b)² =          363|2138
 = 3.11²)                 1815  (= 3(10a+b)².c = 3.11².5)
                          3230
                           825  (= 3(10a+b).c² = 3.11.5²)
                         24054
                           125  (= b³ = 5³)
(3(100a+10b+c)² = 39675|239294
 = 3.115²)               238050  (= 3(100a+10b+c).d² =
                          12441        3.115.6²)
                          12420  (= 3(100a+10b+c).d² =
                            216        3.115.6²)
                            216  (= d³ = 6³)
                              ·
```

hängt und von der somit gebildeten Zahl auch noch den Kubus der 3. Wurzelziffer, nämlich c^3 subtrahiert.

Bleibt hier kein Rest und ist keine Klasse mehr vorhanden, so ist die Radizierung fertig siehe Beispiel 2. Ist noch ein Rest und keine Klasse mehr vorhanden, so beachte man die Regel 12; ist aber noch ein (oder kein) Rest und noch eine Klasse vorhanden, so verfahre man weiter, indem man:

5). analog wie unter 4). u. s. f. verfährt, siehe Beispiel 3.

Im übrigen beachte man die Erkl. 67 u. 68.

Erkl. 67. Zur Geläufigkeit der Rechnung ist vor allem erforderlich, dass man die Kuben aller einziffrigen Zahlen kennt, nämlich:

$1^3 = 1,\ 2^3 = 8,\ 3^3 = 27,\ 4^3 = 64,\ 5^3 = 125$
$6^3 = 216,\ 7^3 = 343,\ 8^3 = 512,\ 9^3 = 729.$

Erkl. 68. Sind die nach vorstehender Regel auszuführenden Subtraktionen von $3ab^2$, b^3 oder von $3(10a+b).c^2$, c^3 u. s. f. nicht möglich, so ist der in der betreffenden vorausgegangenen Division erhaltene Quotient zu gross angenommen worden, man muss deshalb für diesen Quotienten (Ziffer der Wurzel) eine um eine Einheit kleinere Zahl nehmen, lässt sich auch dann die gedachte Subtraktion noch nicht ausführen, so muss man jenen Quotienten (Ziffer der Wurzel) noch um eine Einheit kleiner wählen u. s. f. Da hiernach die Ziffern der Wurzel **durch Probieren** bestimmt werden müssen, so hat man sich **besonders in Acht zu nehmen**, dass man die betreffenden Wurzelziffern **nicht zu klein** annimmt, sie müssen stets die grösst möglichen sein.

Aufgabe 40. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Radizierungen nach vorstehender Regel 10 ausführen.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $\sqrt[3]{884736} =$	96 . . .	Nach der Regel 10, ist:

$$\sqrt[3]{884|736} = 96$$
$$\begin{array}{rrl} (a^3 =) & 729 & \quad ab \\ (3a^2 =)\ 243 | & 1557 & \\ & 1458 & (= 3a^2b) \\ & 993 & \\ & 972 & (= 3ab^2) \\ & 216 & \\ & 216 & (= b^3) \\ & \cdot & \end{array}$$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

2). $\sqrt[3]{2146689} =$ 129 . . . Nach der Regel 10, ist:

$$\sqrt[3]{2|146|689} = \underset{a\,b\,c}{129}$$

$(a^3 =)$ 1

$(3a^2 =)$ 3|11

6 $(= 3a^2b)$

54

12 $(= 3ab^2)$

426

8 $(= b^3)$

$(3(10a+b)^2 = 3 . 12^2 =)$ 432|4186

3888 $(= 3(10a+b)^2 . c = 3 . 12^2 . 9)$

2988

2916 $(3(10a+b) . c^2 = 3 . 12 . 9^2)$

729

729 $(= b^3 = 9^3)$

.

3). $\sqrt[3]{1191016} =$ 106 . . . Nach der Regel 10, ist:

$$\sqrt[3]{1|191|016} = \underset{a\,b\,c}{106}$$

$(a^3 =)$ 1

$(3a^2 =)$ 3|1

0 $(= 3a^2b)$

19

0 $(= 3ab^2)$ *).

191

0 $(= b^3)$

$(3(10a+b)^2 = 3 . 10^2 =)$ 300|1910

1800 $(= 3(10a+b)^2 . c = 3 . 10^2 . 6)$

1101

1080 $(= 3(10a+b) . c^2 = 3 . 10 . 6^2)$

216

216 $(= b^3 = 6^3)$

.

*). Da die in diesem Beispiel vorkommenden Subtraktionen von Null ohne Einfluss auf das Resultat sind, so vereinfacht man in den Fällen, in welchen in der Wurzel die Ziffer „Null" zum Vorschein kommt, die Rechnung dahin, dass man sofort die drei folgenden Ziffern herunternimmt; dann aber durch das dreifache Produkt des Quadrats der bis dahin gefundenen Wurzel, incl. der Null, dividiert. Vorstehende Radizierung gestaltet sich hiernach, wie folgt:

$$\sqrt[3]{1|191|016} = \underset{a\,b\,c}{106}$$

$(a^3 =)$ 1

Da man sofort sieht, dass, wenn man mit: $3a^2 = 3 . 1^2 = 3$ dividiert, in der Wurzel die Ziffer „Null" erscheint, so beachte man die vorstehende Andeutung und dividiere durch: $(3(10a+b)^2 = 3 . 10^2 =)$ 300|1910

1800 $(= 3(10a+b)^2 . c = 3 . 10^2 . 6)$

1101

1080 $(= 3(10a+b) . c^2 = 3 . 10 . 6^2)$

216

216 $(= c^3 = 6^3)$

.

4). $\sqrt[3]{1124864000} =$ 1040 . . . Wie vorhin erhält man:

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

$$\sqrt[3]{1|124|864|000} = \underset{a\,b\,c\,d}{1040}$$

Mit $3a^2$ d. i. $= 3$ in 1 dividiert gibt 0, mithin beachte man die Andeutung zu vorstehendem Beispiel und dividiere durch:

$(a^3 =)$ 1

$(3(10a+b)^2 = 3.10^2 =)$ 300|1248

1200 $(= 3(10a+b)^2.c = 3.10^2.4)$

486

480 $(= 3(10a+b).c^2 = 3.10.4^2)$

64

64 $(= b^3 = 4^3)$

0

In diesen Rest mit: $3(100a+10b+c)^2$, bezw. mit 3.104^2 dividiert, gibt Null und alle noch zu subtrahierenden Zahlen geben ebenfalls Null, mithin ist die letzte Ziffer der Wurzel jene Null.

5). $\sqrt[3]{18970074963} =$ 2667 Nach der Regel 10, ist:

$$\sqrt[3]{18|970|074|963} = \underset{a\,b\,c\,d}{2667}$$

$(a^3 =)$ 8

$(3a^2 = 3.2^2 =)$ 12|109

72 $(= 3a^2b = 3.2^2.6)$

377

216 $(= 3ab^2 = 3.2.6^2)$

1610

216 $(= b^3 = 6^3)$

$(3(10a+b)^2 = 3.26^2 =)$ 2028|13940

12168 $(= 3(10a+b)^2.c = 3.26^2.6)$

17727

2808 $(= 3(10a+b).c^2 = 3.26.6^2)$

149194

216 $(= b^3 = 6^3)$

$(3(100a+10b+c)^2 = 3.266^2 =)$ 212268|1489789

1485876 $(= 3(100a+10b+c)^2.d = 3.266^2.7)$

39136

39102 $(= 3(100a+10b+c).d^2 = 3.266.7^2)$

343

343 $(= d^3 = 7^3)$

.

6). $\sqrt[3]{389017} =$? analog dem gelösten Beispiel 1.

7). $\sqrt[3]{97336} =$?

8). $\sqrt[3]{5832} =$?

9). $\sqrt[3]{857375} =$?

10). $\sqrt[3]{24389} =$?

11). $\sqrt[3]{9261} =$?

12). $\sqrt[3]{318611987} =$? „ „ „ „ 2.

13). $\sqrt[3]{15438249} =$?

14). $\sqrt[3]{1367631} =$?

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
15). $\sqrt[3]{1295029} =$	 ?	 analog dem gelösten Beispiel 3.
16). $\sqrt[3]{731432701} =$	 ?	
17). $\sqrt[3]{64481201} =$	 ?	
18). $\sqrt[3]{8000000} =$	 ?	 „ „ „ „ 4.
19). $\sqrt[3]{74088000} =$	 ?	
20). $\sqrt[3]{111980168000} =$	 ?	
21). $\sqrt[3]{18970074963} =$	 ?	 „ „ „ „ 5.
22). $\sqrt[3]{115145914625} =$	 ?	
23). $\sqrt[3]{64240300125} =$	 ?	
24). $\sqrt[3]{22164361129} =$	 ?	
25). $\sqrt[3]{204409331068643} =$	 ?	
26). $\sqrt[3]{91250681873949660894429} =$	... ?	

β). Ausziehung rationaler Kubikwurzeln, deren Radikanden Dezimalbrüche sind.

Um eine Regel aufstellen zu können nach welcher man aus einem Dezimalbruch die Kubikwurzel ziehen kann, beachte man, dass sich jeder Dezimalbruch in Form eines gewöhnlichen Bruches, dessen Nenner eine Potenz von 10 ist, schreiben lässt; dass ferner nach dem Lehrsatz 5, Seite 10, die Wurzel aus diesem so erhaltenen Bruch gezogen wird, indem man sie aus Zähler und Nenner zieht, und dass schliesslich durch Multiplikation des Zählers und Nenners mit 10, der Nenner als eine solche Potenz von 10 dargestellt werden kann, deren Exponent 3 oder ein Vielfaches von 3 ist, womit erreicht wird, dass man aus dem gedachten Nenner stets die 3te Wurzel ziehen kann.

Man siehe nebenstehende Beispiele.

Hiernach kann man folgende Regel 11 aufstellen:

Beispiele.

1). $17{,}576 = \frac{17576}{1000} = \frac{17576}{10^3}$ mithin ist:

$$\sqrt[3]{17{,}576} = \sqrt[3]{\frac{17576}{10^3}} = \frac{\sqrt[3]{17576}}{\sqrt[3]{10^3}} = \frac{\sqrt[3]{17576}}{10} \text{ u. s. f.}$$

2). $2{,}6 = \frac{26}{10} = \frac{26 \cdot 100}{10 \cdot 100} = \frac{2600}{10^3}$

mithin ist:

$$\sqrt[3]{2{,}6} = \sqrt[3]{\frac{2600}{10^3}} = \frac{\sqrt[3]{2600}}{\sqrt[3]{10^3}} = \frac{\sqrt[3]{2600}}{10}$$

u. s. f.

Regel 11. Man zieht aus einem Dezimalbruch die Kubikwurzel, indem man:

1). den Dezimalbruch durch Anhängung von Nullen auf eine solche Form bringt, dass die Anzahl der Dezimalstellen eine solche ist, welche sich ohne Rest durch 3 teilen lässt, ... hierdurch wird bezweckt, dass der in Gedanken als gewöhnlicher Bruch geschriebene Dezimalbruch einen Nenner erhält, der eine solche Potenz von 10 ist, deren Exponent 3 oder ein Vielfaches von 3 ist, in Folge dessen man die 3te Wurzel aus diesem (nur gedachten) Nenner ziehen kann.

— ist die Anzahl der Dezimalstellen schon eine solche, so ist dies nicht nötig —

dann:

2). das Dezimalkomma wegdenkt und aus der somit gedachten ganzen Zahl genau wie in der Regel 10, Seite 303, angegeben ist, die Kubikwurzel zieht, ... hierdurch ist der Zähler des gedachten gewöhnlichen Bruches radiziert.

und schliesslich:

3). der somit erhaltenen Wurzel soviele Stellen als Dezimalstellen durch ein Komma abtrennt, als der dritte Teil der Dezimalstellen des radizierten Dezimalbruchs beträgt . . . hierdurch hat man die in dem gedachten gewöhnlichen Bruche angedeutete Division des radizierten Nenners in den radizierten Zähler ausgeführt.

oder, was dasselbe ist:

das Dezimalkomma hinter die Ziffer der Wurzel setzt, welche man aus der Klasse des Radikanden erhält, hinter welcher dessen Dezimalkomma steht.

Man siehe die gelösten Beispiele in der folgenden Aufgabe 41.

Aufgabe 41. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Radizierungen nach vorstehender Regel 11 ausführen.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $\sqrt[3]{17,576} =$	2,6 . . .	Man denke sich:

$$\sqrt[3]{17,576} = \sqrt[3]{\frac{17576}{1000}} = \sqrt[3]{\frac{17576}{10^3}} = \frac{\sqrt[3]{17576}}{10}$$ gesetzt,

den Zähler: $\sqrt[3]{17576}$ nach der Regel 10, S. 303, radiziert, und das was herauskommt durch 10 dividiert, also von der erhaltenen Wurzel eine Stelle durch ein Dezimalkomma abgetrennt.

Nach der vorstehenden Regel 11 gestaltet sich die Rechnung, wie folgt:

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

$$\sqrt[3]{17,|576} = 2,6 \quad (a\,b)$$

$(a^3 =)\ 8$

$(2a^2 = 3 \,.\, 2^2 =)\ 12|95$

$72\ (= 3a^2b = 3 \,.\, 2^2 \,.\, 6)$

237

$216\ (= 3ab^2 = 3 \,.\, 2 \,.\, 6^2)$

216

$216\ (= b^3 = 6^3)$

$\cdot$

2). $\sqrt[3]{529475,129} =$ 80,9 Nach der Regel 11 erhält man:

$$\sqrt[3]{529|475,|129} = 80,9 \quad (a\,b\,c)$$

$(a^3 =)\ 512$

$(3a^2 = 3 \,.\, 8^2 =)\ 192|174$

$000\ (= 3a^2b = 3 \,.\, 8^2 \,.\, 0)$

1747

$0000\ (= 3ab^2 = 3 \,.\, 8 \,.\, 0^2)$

17475

$0\ (= b^3 = 0^3)$

$(3\,(10a + b)^2 = 3 \,.\, 80^2 =)\ 19200|174751$

$172800\ (= 3\,(10a + b)^2 \,.\, c = 3 \,.\, 80^2 \,.\, 9)$

19512

$19440\ (= 3\,(10a + b) \,.\, c^2 = 3 \,.\, 80 \,.\, 9^2)$

729

$729\ (= b^3 = 9^3)$

$\cdot$

Man beachte hierbei die Andeutung zu Beispiel 3 der Aufgabe 40.

3). $\sqrt[3]{0,000007880599} =$ 0,0199 . . . Man denke sich:

$$\sqrt[3]{0,000007880599} = \sqrt[3]{\frac{7880599}{1000000000000}} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{7880599}{10^{12}}} = \frac{\sqrt[3]{7880599}}{10^4} \text{ gesetzt,}$$

den Zähler: $\sqrt[3]{7880599}$ nach der Regel 10, Seite 303, radiziert und das was herauskommt durch 10^4 (= 10000) dividiert, also von der erhaltenen Wurzel vier Stellen durch ein Dezimalkomma abgetrennt, wobei man beachten muss, dass der Zähler nach der Radizierung nur 3 Stellen enthält, mithin 2 Nullen demselben vorgesetzt werden müssen.

Nach der vorsteh. Regel 11 gestaltet sich die Rechnung, wenn man sich während derselben das Dezimalkomma mit den direkt davor und dahinter stehenden Nullen wegdenkt, wie folgt:

$$\sqrt[3]{0,|000|007|880|599} = 0,0199 \ {}^{*)}. \quad (a\,b\,c)$$

$(a^3 =)\ 1$

$(3a^2 = 3 \,.\, 1^2 =)\ 3|68$

$27\ (= 3a^2b = 3 \,.\, 1^2 \,.\, 9)$

418

$243\ (= 3ab^2 = 3 \,.\, 1 \,.\, 9^2)$

1750

Uebungsbeispiele: | **Resultate:** | **Andeutungen:**

1750
729 $(= b^3 = 9^3)$
$(3\,(10a + b)^2 = 3 \,.\, 19^2 =)$ 1083 | 10215
9747 $(= 3\,(10a + b)^2 \,.\, c = 3 \,.\, 19^2 \,.\, 9)$
4689
4617 $(= 3\,(10a + b) \,.\, c^2 = 3 \,.\, 19 \,.\, 9^2)$
729
729 $(= c^3 = 9^3)$
=

*). Denkt man sich, wie nach der Regel 11 geschehen muss, im Radikanden das Dezimalkomma weg, so haben die direkt vor und hinter dem Komma stehenden Nullen **keinen Wert**. Die Wurzelausziehung, welche alsdann nach der Regel 10 auszuführen ist, beginnt somit erst mit der Klasse in welcher die erste Ziffer steht, die der durch die gedachte Weglassung des Kommas entstehenden *ganzen* Zahl angehört. In Betreff des in der Wurzel zu setzenden Kommas, bezw. in Betreff der der nach der Radizierung erhaltenen Zahl (hier 199) vorzusetzenden Nullen, kann man sich auch vorteilhaft merken, dass man für jede Klasse des ursprünglichen Radikanden, welche vollständig durch Nullen besetzt ist und vor der gedachten ganzen Zahl steht, in der Wurzel eine Null setzen kann.

4). $\sqrt[3]{91{,}125} =$? analog dem gelösten Beispiel 1.

5). $\sqrt[3]{248{,}858189} =$?

6). $\sqrt[3]{205{,}379} =$?

7). $\sqrt[3]{1{,}771561} =$?

8). $\sqrt[3]{934{,}007359375} =$? „ „ „ „ 2.

9). $\sqrt[3]{0{,}132651} =$? „ „ „ „ 3.

10). $\sqrt[3]{0{,}004913} =$?

11). $\sqrt[3]{0{,}588480472} =$?

12). $\sqrt[3]{0{,}002197} =$?

13). $\sqrt[3]{0{,}000007880599} =$?

14). $\sqrt[3]{0{,}000006859} =$?

15). $\sqrt[3]{0{,}000672221376} =$?

16). $\sqrt[3]{0{,}001771561} =$?

ββ). Ausziehung irrationaler Kubikwurzeln, deren Radikanden ganze Zahlen oder Dezimalbrüche sind.

Hat man aus einer Zahl die Kubikwurzel zu ziehen und die nach der Regel 10, Seite 303, bezw. nach der Regel 11, Seite 307, auszuführende Operation geht **nicht ohne Rest auf**, **was in den meisten Fällen stattfinden wird**, so existiert **kein genau** angebbarer Wert, der in die 3te Potenz erhoben die zu radizierende Zahl ergibt, d. h die betreffende Wurzel ist **irrational**, bezw. die zu radizierende Zahl ist **keine** Kubikzahl.

Da man nun im voraus nicht weiss, ob die zu radizierende Zahl eine Kubikzahl ist oder nicht und man in letzterem Falle die Kubikwurzel wenigstens bis zu einem gewissen Grade der Genauigkeit haben muss, so beachte man bei der Ausziehung der Kubikwurzel aus einer Zahl stets folgende Regeln:

Regel 12. Man zieht aus einer beliebigen ganzen Zahl die Kubikwurzel, indem man:

1). genau nach der Regel 10, Seite 303, verfährt; dann aber im Falle die, nach Benutzung der letzten Klasse des Radikanden, auszuführende Operation **nicht ohne Rest** aufgegangen ist, also die zu radizierende Zahl **keine** Kubikzahl, die Wurzel also **irrational** ist,

2). der gegebenen Zahl **soviel mal drei** Nullen als Dezimalstellen anhängt, als die Anzahl der Dezimalstellen beträgt, welche man in der Wurzel bestimmen will, und nach der Regel 11, S. 307, weiter verfährt.

Nebenstehendes Beispiel 1 gibt hierüber weiteren Aufschluss.

Beispiele.

1). Hat man z. B. $\sqrt[3]{2671}$ zu berechnen, so erhält man nach nebensteh. Regel 12, zunächst:

```
3
√2|671 = 13 . . . diese Wurzel ist nur annähernd
 1                richtig.
 ─
3|16
  9
 ──
  77
  27
 ───
  501
   27
 ───
  474 . . . Rest.
```

Die Probe für die Richtigkeit der bis dahin ausgeführten Radizierung besteht nach der Erkl. 70 darin, dass:

$$2671 = 13^3 + 474 \text{ sein muss,}$$

was auch stimmt.

Will man die nur annähernd richtige Wurzel 13 bis auf **Zehntel** genau berechnen, so setze man:

$$\sqrt[3]{2671} = \sqrt[3]{\frac{2671000}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{2671000}}{\sqrt[3]{10^3}} = \frac{\sqrt[3]{2671000}}{10}$$

ziehe aus 2671000 die Wurzel wie vorhin und dividiere die erhaltene Wurzel durch 10, oder was dasselbe ist, man setze:

$\sqrt[3]{2671} = \sqrt[3]{2671,000}$ und verfahre nach der Regel 11. Man wird erhalten:

```
3
√2|671,|000 = 13,8 . . . diese Wurzel ist nur bis
 1                       Zehntel genau richtig.
 ─
3|16
  9
 ──
  77
  27
 ───
  501
   27
 ───
507|4740
    4056
    ────
     6840
     2496
    ─────
    43440
      512
    ─────
    42928 . . . Rest.
```

Die Probe für die Richtigkeit der bis dahin ausgeführten Radizierung besteht nach der Erkl. 70 darin, dass:

$$2671{,}000 = 13{,}8^3 + 42928$$

sein muss, was auch stimmt.

Will man die fragl. Wurzel bis auf **Hundertstel** genau berechnen, so setze man:

$\sqrt[3]{2671} = \sqrt[3]{2671,000000}$ und verfahre wie vorhin.

Auf analoge Weise kann man die Wurzel bis auf **Millionstel** genau u. s. f., also bis zu einem beliebigen Grad der Genauigkeit berechnen.

Regel 13. **Man zieht aus einem beliebigen Dezimalbruch die Kubikwurzel,** indem man:

1). genau nach der Regel 11, Seite 307, verfährt; dann aber im Falle die, nach Benutzung der letzten Klasse des Radikanden, auszuführende Operation nicht ohne Rest aufgegangen ist, also der zu radizierende Dezimalbruch keine Kubikzahl, die Wurzel also **irrational** ist,

2). dem gegebenen Dezimalbruch noch soviel mal drei Nullen (siehe auch Erkl. 69) anhängt, als man noch Dezimalstellen der fraglichen Wurzel bestimmen will, und wie vorhin angedeutet ist weiter verfährt.

Nebenstehendes Beispiel 2 gibt hierüber weitere Auskunft.

Erkl. 69. Ist der gegebene Dezimalbruch ein **periodischer,** so hänge man statt der in vorstehender Regel 13 erwähnten Nullen, Ziffern der Periode des Dezimalbruchs an.

Man siehe nebenstehendes Beispiel 3.

Erkl. 70. Die Probe für die Richtigkeit der Ausziehung einer **irrationalen** Kubikwurzel besteht darin, dass die annähernd gefundene Wurzel kubiert und hierzu den letzten Rest addiert, den Radikanden ergeben muss.

Man siehe die Proben in den nebenstehenden Beispielen 1—3.

Erkl. 71. Durch nebenstehende Beispiele 1, 2 und 3 ist dargethan, dass man den Wert einer **irrationalen** Wurzel bis zu einem beliebigen Grade der Genauigkeit bestimmen, dass man sich dem wahren Werte derselben beliebig nähern kann, ohne allerdings denselben je zu erreichen.

Erkl. 72. Hat man von einer irrationalen Kubikwurzel bereits 3, 4 oder 5 Dezimalstellen berechnet, so findet man die folgenden 3, 4 oder 5 Dezimalstellen auf rasche Weise, indem man

Beispiele.

2). Hat man z. B. $\sqrt[3]{54{,}3}$ zu berechnen, so erhält man nach nebenstehender Regel 13, bezw. zunächst nach der Regel 11:

```
3
√54,|300 = 3,7 . . . diese Wurzel ist nur annähernd richtig.
 27
 ──
27|273
  189
  ───
  840
  441
  ────
  3990
   343
  ────
  3647 . . . Rest.
```

Probe. Nach Erkl. 70 muss $54{,}3 = 3{,}7^3 + 3647$ sein.

Will man nun die fragliche Wurzel bis auf 2 weitere Dezimalstellen genau bestimmen, so hänge man dem hier auf eine solche Anzahl von Dezimalstellen gebrachten Radikanden, welcher durch 3 teilbar ist, noch 2 mal drei Nullen an und verfahre wie vorhin weiter. — Man wird erhalten:

$$\sqrt[3]{54,|300|000|000} = 3{,}786\ldots.$$

u. s. f.

3). Hat man z. B.: $\sqrt[3]{2{,}2323\ldots.}$ zu berechnen und ist der Radikand ein **periodischer** Dezimalbruch, so erhält man zunächst, indem man anstatt wie vorhin Nullen, hier Ziffern der Periode anhängt:

```
3
√2,|232|323 = 1,30....
 1
 ─
3|12
   9
  ──
  33
  27
  ──
   62
   27
  ──
507|353
    000
    ───
   3532
   0000
   ────
  35323
      0
  ─────
  35323 . . Rest.
```

Probe: $2{,}232323$ muss $= 1{,}30^3 + 35323$ sein.

Will man noch 2 weitere Dezimalstellen berechnen, so hänge man dem Radikanden zwei mal drei der Ziffern an, die der Periode angehören. Man wird erhalten:

$$\sqrt[3]{2,|232|323|232|323} = 1{,}3049\ldots.$$

u. s. f.

den Rest durch das dreifache Produkt des Quadrats der bereits berechneten Wurzel dividiert.

Diese sehr praktische Regel gründet sich auf folgende Betrachtung:

Bedeutet a eine Zahl aus der die Kubikwurzel gezogen werden soll, b die bis auf 3, 4 oder 5 Dezimalstellen bestimmte Wurzel und schliesslich x der noch fehlende Teil der Wurzel, so besteht zwischen diesen Grössen die Relation:

1). . . . $\sqrt[3]{a} = b + x$

für welche man:

$$a = (b+x)^3 \text{ oder:}$$

2). . . . $a = b^3 + 3b^2x + 3bx^2 + x^3$

setzen kann.

Ist nun aus der Zahl a die Kubikwurzel z. B. auf 3 Dezimalstellen genau ausgezogen, so stellt die erste, also die höchste Ziffer des noch fehlenden Teils x Zehntausendstel dar, dieser noch fehlende Teil x ist hiernach ein **sehr kleiner** echter Bruch; da nun das Quadrat desselben, nämlich x^2, — um so mehr der Kubus desselben, nämlich x^3, — noch **viel kleiner** ist, so kann man diese Werte x^2 und x^3 als sehr kleine von Null nur wenig verschiedene Grössen, folglich auch das ganze Glied $3bx^2$, welches x^2 (fast Null) enthält, vernachlässigen und die vorstehende Relation 2). geht über in:

$$a = b^3 + 3b^2x$$

woraus man:

3). . . . $x = \frac{a - b^3}{3b^2}$ erhält.

Für die gesuchte Wurzel hat man somit:

4). . . . $\sqrt[3]{a} = b + \frac{a - b^3}{3b^2}$

Da ferner: $(a - b^3)$ den letzten Rest r darstellt, welchen man nach der Bestimmung der angenäherten Wurzel b erhält, so hat man:

5). . . . $\sqrt[3]{a} = b + \frac{r}{3b^2}$

was zu beweisen war.

Man siehe nebenstehendes Beispiel 4.

Erkl. 73. Ein Verfahren, die Kubikwurzel annähernd aus einer Zahl zu ziehen, stützt sich auf folgende Betrachtung:

Ist x gegen a eine sehr kleine Zahl, so kann man:

1). . . . $\sqrt[3]{a^3 + x} = a + \frac{x}{3a^2}$

2). . . . $\sqrt[3]{a^3 - x} = a - \frac{x}{3a^2}$ setzen,

denn nach der Regel 9, Seite 297, ist z. B.:

Beispiele.

4). Hat man z. B. $\sqrt[3]{2}$ zu berechnen, so berechne man nach vorstehender Regel 12 die ersten 3 Dezimalstellen, wie folgt:

$\sqrt[3]{2,000|000|000} = \underbrace{1,259}_{b} \ldots.$

```
        1
      3|10
         6
        40
        12
       280
         8
   432|2720
       2160
       5600
        900
      47000
        125
 46875|468750
      421875
       468750
        30375
      4383750
          729
      4383021 . . . Rest r
```

Will man nun die bis auf 3 Dezimalstellen genau gefundene Wurzel noch auf weitere Dezimalstellen berechnen, so findet man die folgenden 3 Stellen nach nebenstehender Erkl. 72 aus dem Quotienten: $\frac{4383021}{3 \cdot 1{,}259^2}$

Man erhält für dieselben: 921.

Für die zu berechnende Wurzel hat man hiernach:

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}259921 \ldots.$$

von dessen Richtigkeit man sich überzeugen kann, wenn man die vorhin begonnene Radizierung weiter ausführt.

$$\begin{array}{l}
\sqrt[3]{a^3+x} = a + \dfrac{x}{3a^2} - \dfrac{x^2}{9a^5} + \cdots\cdots \\
\underline{\overset{+}{-}\, a^3} \\
3a^2 \mid x \\
\qquad \underline{\overset{-}{}x \overset{+}{-} \dfrac{x^3}{3a^3} \overset{+}{-} \dfrac{x^3}{27a^6}} \\
3a^2 + \dfrac{2x}{a} + \dfrac{x^2}{3a^4} \;\Big|\; - \dfrac{x^2}{3a^3} - \dfrac{x^3}{27a^6} \\
\qquad \overset{-}{+} \dfrac{x^2}{3a^3} \overset{-}{+} \text{ u. s. f.} \quad \text{u. s. f.}
\end{array}$$

Bricht man hier ab, so ist schon das dritte Glied der Wurzel, unter der gedachten Voraussetzung, dass x gegen a sehr klein ist, eine noch viel kleinere Grösse, welche man, ohne einen besonderen Fehler zu begehen, vernachlässigen kann. Dasselbe gilt noch viel mehr für die weiteren Glieder der Wurzel.

Man kann also ohne einen grossen Fehler zu begehen:

$$\sqrt[3]{a^3 \pm x} = a \pm \frac{x}{3a^2} \text{ setzen.}$$

Man siehe nebenstehende Beispiele 5 und 6.

Beispiele.

5). Soll man z. B. $\sqrt[3]{64{,}000005}$ berechnen, so kann man, da der Radikand nahezu eine Kubikzahl ist, hierfür schreiben:

$$\sqrt[3]{64{,}000005} = \sqrt[3]{4^3 + 0{,}000005}$$

Da nun der zweite Summand unter dem Wurzelzeichen gegen den ersten sehr klein ist, so hat man nach der in Erkl. 72 stehenden Gleichung 1).:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{4^3 + 0{,}000005} &= 4 + \frac{0{,}000005}{3 \cdot 4^2} \\ &= 4 + 0{,}0000001 \\ &= 4{,}0000001\end{aligned}$$

6). Soll man z. B. $\sqrt[3]{215\frac{214}{215}}$ berechnen, so kann man, da der Radikand nahezu die Kubikzahl 216 ist, schreiben:

$$\sqrt[3]{215\frac{214}{215}} = \sqrt[3]{216 - \frac{1}{215}}$$

Da nun der zweite Summand unter dem Wurzelzeichen gegen den ersten sehr klein ist, so hat man nach der in Erkl. 72 stehenden Gleichung 2).:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{216 - \frac{1}{215}} &= 6 - \frac{1}{215 \cdot 3 \cdot 216^2} \\ &= 6 - 0{,}00000003 \\ &= 5{,}99999997\end{aligned}$$

Erkl. 74. Ein weiteres Verfahren, eine irrationale Kubikwurzel annähernd zu bestimmen, liefern die Kettenbrüche (man siehe dieses Kapitel). Das Verfahren ist analog dem in der Erkl. 63, Seite 285, gegebenen.

Aufgabe 42. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Radizierungen nach vorstehenden Regeln 12 u. 13 und mit Benutzung des in der Erkl. 72 angegebenen abgekürzten Verfahrens bis auf mindestens 6 Dezimalstellen ausführen.

Uebungsbeispiele:	**Resultate:**	**Andeutungen:**
1). $\sqrt[3]{351}$ = ...	7,054406......	. . . Da man hier sofort ersieht, dass die zu suchende Wurzel irrational ist und man z. B. die fragliche Wurzel zunächst bis auf 3 Dezimalen genau berechnen will, so hänge man dem Radikanden 3 mal drei Nullen an und verfahre nach der Regel 12, wie folgt:

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

$\sqrt[3]{351,|000|000|000}$ *). = 7,054.....

```
        343
     147|80
         00
         800
         000
         8000
         0000
   14700|80000
         73500
          65000
           5250
          597500
             125
 1491075|5973750
         5964300
            94500
            33840
           606600
               64
           606536 . . . Rest.
```

Will man nunmehr noch weitere Dezimalstellen bestimmen, so findet man nach der Erkl. 72 und dem dortigen Beispiel 4 dieselben aus d Quotienten:

$$\frac{606536}{3 \cdot 7{,}054^2}$$

Man erhält für die 3 weiteren Dezimalstellen = 406.

Die gesuchte Wurzel ist somit bis auf 6 Dezimalen genau:

$$\sqrt[3]{351} = 7{,}054406......$$

*). Die Anhängung der Nullen, welche zur Bestimmung weiterer Stellen der Wurzel nötig sind, braucht man nur in Gedanken auszuführen; man hat hierbei nur auf die Stellung des Dezimalkommas in der Wurzel Acht zu geben.

2). $\sqrt[3]{0{,}5}$ = ... 0,793701.... . . . Zunächst bringe man nach der Regel 11 die Dezimalstellen des Radikanden auf eine solche Anzahl, die durch 3 teilbar, man hänge also 2 Nullen an und verfahre nach der Regel 11, bezw. analog dem gelösten Beispiel 3 der Aufgabe 41. Man erhält:

$\sqrt[3]{0,|500}$ = 0,793.....

```
       343
   147|1570 . . . . . .
       1323
        2470
        1701
         7690
          729
 18723|69610
       56169
       134410
         2133
       1322770
            27
       1322743 . . . Rest.
```

Zur weiteren Berechnung von Dezimalstellen der Wurzel denke man sich im Radikanden für jede weitere zu berechnende Ziffer 3 Nullen angehängt.

Will man nun noch mehr Ziffern der Wurzel bestimmen, so benutze man die Erkl. 72.

Aus dem Quotienten:

$$\frac{1322743}{3 \cdot 0{,}793^2}$$

erhält man für die 3 weiteren Wurzelziffern = 701.

Für die fragliche Wurzel erhält man somit bis auf 6 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[3]{0{,}5} = 0{,}793701.....$$

3). $\sqrt[3]{382764}$ = ... ? analog dem gelösten Beispiel 1.

4). $\sqrt[3]{25125}$ = ... ?

5). $\sqrt[3]{8613}$ = ... ?

6). $\sqrt[3]{267}$ = ... ?

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
7). $\sqrt[3]{687}$ =	 ?	
8). $\sqrt[3]{100}$ =	 ?	
9). $\sqrt[3]{73}$ =	 ?	
10). $\sqrt[3]{18}$ =	 ?	
11). $\sqrt[3]{3}$ =	 ?	analog dem gelösten Beisp. 4, S. 314.
12). $\sqrt[3]{4}$ =	 ?	
13). $\sqrt[3]{5}$ =	 ?	
14). $\sqrt[3]{7}$ =	 ?	
15). $\sqrt[3]{507{,}246}$ =	 ?	„ „ „ „ 2.
16). $\sqrt[3]{28{,}25}$ =	 ?	
17). $\sqrt[3]{26{,}7}$ =	 ?	
18). $\sqrt[3]{0{,}000563}$ =	 ?	
19). $\sqrt[3]{0{,}000003}$ =	 ?	
20). $\sqrt[3]{0{,}00008}$ =	 ?	
21). $\sqrt[3]{0{,}0125}$ =	 ?	
22). $\sqrt[3]{0{,}006}$ =	 ?	
23). $\sqrt[3]{0{,}005}$ =	 ?	
24). $\sqrt[3]{0{,}0000314}$ =	 ?	
25). $\sqrt[3]{32{,}3232\ldots}$ =	 ?	„ „ „ „ 3, S. 313.
26). $\sqrt[3]{0{,}648564856485\ldots}$ =	 ?	

γ). Ausziehung der Kubikwurzel aus gewöhnlichen Brüchen.

Bei der Ausziehung der Kubikwurzel aus gewöhnlichen Brüchen, merke man sich folgende Regel und beachte dabei, dass **gemischte** Brüche vor der Radizierung immer erst eingerichtet werden müssen.

Regel 14. **Man zieht die Kubikwurzel aus einem gewöhnlichen Bruch,** indem man entweder:

a). die Kubikwurzel aus dem Zähler und dem Nenner zieht;

dies geschieht in den Fällen, in welchen Zähler und Nenner Kubikzahlen sind — siehe Beispiel 1 —

oder:

b). den gegebenen Bruch in einen Dezimalbruch verwandelt und aus diesem die Kubikwurzel zieht;

dies geschieht besonders in den Fällen, in welchen der gegebene Bruch sich in einen endlichen Dezimalbruch verwandeln lässt, oder auch in welchen man nur einige Dezimalen der Wurzel haben will — siehe Beispiel 2 —

oder:

c). indem man nach früherem den Nenner rational macht und aus dem Zähler und Nenner die Wurzel zieht, wie im ersten Falle;

dies geschieht besonders, wenn der gegebene Bruch sich in keinen endlichen Dezimalbruch verwandeln lässt und ein sehr genaues Resultat verlangt wird — siehe Beispiel 3. —

Beispiele.

1). $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}$

2). $\sqrt[3]{2\frac{5}{8}} = \sqrt[3]{\frac{21}{8}} = \sqrt[3]{2{,}625} = 1{,}37....$

3). $\sqrt[3]{\frac{3}{7}} = \sqrt[3]{\frac{3 \,.\, 7^2}{7 \,.\, 7^2}} = \sqrt[3]{\frac{147}{7^3}} = \frac{\sqrt[3]{147}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{\sqrt[3]{147}}{7}$

Nun berechne man $\sqrt[3]{147}$ so genau als verlangt wird und dividiere das erhaltene Resultat durch 7.

Aufgabe 43. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Radizierungen nach vorstehender Regel 14 ausführen.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $\sqrt[3]{\frac{343}{729}} = \frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{729}} = \ldots\ldots$ $\frac{7}{9}$ nach dem 1. Fall der Regel 14.

2). $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

3). $\sqrt[3]{30\frac{2}{5}} = \sqrt[3]{30{,}4} = \ldots\ldots$ 3,12...... . . . nach dem 2. Fall der Regel 14 u. bis auf 2 Dezimalen genau.

4). $\sqrt[3]{1\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{\frac{5 \,.\, 9}{3 \,.\, 9}} = \sqrt[3]{\frac{45}{27}}$ nach dem 3. Fall der Regel 14.

$= \frac{\sqrt[3]{45}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{45}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{45} = \frac{1}{3} \cdot 3{,}566.... = 1{,}188....$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
5). $\sqrt[3]{\frac{8}{729}} =$	 ?	 analog dem gelösten Beispiel 1.
6). $\sqrt[3]{5\frac{23}{64}} =$	 ?	 „ „ „ „ 2.
7). $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} =$	 ?	
8). $\sqrt[3]{1\frac{2}{25}} =$	 ?	 „ „ „ „ 3.
9). $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} =$	 ?	
10). $\sqrt[3]{6\frac{2}{5}} =$	 ?	
11). $\sqrt[3]{\frac{11}{32}} =$	 ?	
12). $\sqrt[3]{\frac{1}{15}} =$	 ?	
13). $\sqrt[3]{\frac{3}{25}} =$	 ?	
14). $\sqrt[3]{268\frac{2}{5}} =$	 ?	
15). $\sqrt[3]{\frac{5}{27}} =$	 ?	 „ „ „ „ 4 und mit Rücksicht, dass der Nenner bereits eine Kubikzahl ist.
16). $\sqrt[3]{1\frac{7}{8}} =$	 ?	
17). $\sqrt[3]{17\frac{1}{64}} =$	 ?	
18). $\sqrt[3]{\frac{7}{11}} =$	 ?	
19). $\sqrt[3]{\frac{4}{7}} =$	 ?	
20). $\sqrt[3]{\frac{5}{9}} =$	 ?	
21). $\sqrt[3]{8\frac{1}{3}} =$	 ?	

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
22). $\sqrt[3]{7\frac{8}{9}} =$	 ?	
23). $\sqrt[3]{512{,}0003} =$	 ?	mit Hülfe der Erkl. 73.
24). $\sqrt[3]{1728{,}090004} =$	 ?	

Aufgabe 44. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen Zahlenausdrücke bis auf 4 Dezimalen genau berechnen.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
1). $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} =$	 ? . . .	man mache zuerst den Nenner rational, indem man Zähler und Nenner mit $\sqrt[3]{3^2}$ multipliziert.
2). $\frac{1}{\sqrt[3]{6}} =$	 ?	
3). $\sqrt[3]{3 . \sqrt{16}} =$	 ? . . .	man beachte zuerst die innere Quadratwurzel.
4). $\sqrt[3]{3 . \sqrt{\frac{7}{8}}} =$	 ?	
5). $\sqrt[3]{2 - \sqrt[3]{2}} =$	 ?	
6). $\sqrt{\frac{82 . \sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{729}}} =$	 ?	
7). $\sqrt[3]{8\sqrt{\frac{268}{1000}}} =$	 ?	
8). $\sqrt[3]{48\sqrt[3]{\frac{3}{5}}} =$	 ?	
9). $\sqrt[3]{\frac{5{,}8 . \sqrt{144{,}16}}{\frac{2}{3} . \sqrt[3]{\frac{4}{5}}}} =$	 ?	

e). Ueber die Ausziehung höherer Wurzeln aus algebr. Summen.

Bei der Ausziehung höherer Wurzeln aus algebr. Summen kann man 2 Fälle unterscheiden, nämlich:

1). der Wurzelexponent lässt sich in die Faktoren 2 und 3 zerlegen und

2). dies ist nicht der Fall.

Bei der Ausziehung höherer Wurzeln aus algebr. Summen beachte man dementsprechend folgende Regel:

Regel 15. Hat man eine algebraische Summe zu radizieren und ist der betreffende Wurzelexponent eine höhere Zahl als 2 und 3, dabei

a). eine solche Zahl, die sich in die Faktoren 2 und 3 zerlegen lässt, so führe man diese Zerlegung aus und benutze den Zusatz 3 des Lehrsatzes 12, Seite 210, indem man die 2[te] und 3[te] Wurzeln nacheinander auszieht;

man siehe die Beisp. 1 u. 2 der Aufg. 45;

dabei

b). eine solche Zahl, welche sich nicht in die Faktoren 2 und 3 zerlegen lässt, so leite man sich eine den Regeln 1 und 8 analoge Regel ab, indem man das Binom $(a+b)$ oder das Trinom $(a+b+c)$ in die Potenz erhebt, welche gleich dem betreffenden Wurzelexponenten ist.

Man siehe das Beisp. 3 der Aufgabe 45 und beachte die Erkl. 75.

Erkl. 75. Die Ausziehung höherer Wurzeln aus algebraischen Summen wird nur in **höchst seltenen** Fällen verlangt; es sind deshalb in nachstehender Aufgabe nur einige gelöste Beispiele vorgeführt.

Aufgabe 45. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Radizierungen nach vorstehender Regel 15 ausführen, dabei nur die absoluten Wurzelwerte berücksichtigen (siehe Zusatz 4, Seite 201).

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $\sqrt[4]{16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4} = \ldots$ man beachte den in vorstehender Regel 15 angegebenen 1. Fall.

$$\sqrt[2]{\sqrt[2]{16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4}} = \ldots$$ man ziehe nunmehr nach der Regel 1 die innere Quadratwurzel aus.

Uebungsbeispiele: — Resultate: — Andeutungen:

$$\sqrt[2]{4x^2-12xy+9y^2} = \ldots\ldots$$

man führe nunmehr auch diese Radizierung aus.

$$2x-3y$$

2). $$\sqrt[6]{m^{12}-6m^{10}n^3+15m^8n^6-20m^6n^9+15m^4n^{12}-6m^2n^{15}+n^{18}} = \ldots$$

man beachte den in vorsteh. Regel 15 angegebenen 1. Fall und zwar zerlege man den Wurzelexponenten so, dass man erst die 2. und dann die 3. Wurzel auszuziehen hat.

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{m^{12}-6m^{10}n^3+15m^8n^6-20m^6n^9+15m^4n^{12}-6m^2n^{15}+n^{18}}} = \ldots$$

man ziehe nunmehr nach der Regel 1 die Quadratwurzel aus.

$$\sqrt[3]{m^6-3m^4n^3+3m^2n^6-n^9} = \ldots$$

man führe nunmehr diese Radizierung nach der Regel 8 aus.

$$m^2-n^3$$

3). $$\sqrt[5]{x^{10}-5x^8y+10x^6y^2-10x^4y^3+5x^2y^4-y^5} = \ldots$$

man beachte den in vorsteh. Regel 15 angegebenen 2. Fall und entwickle sich, um das Bildungsgesetz des Radikanden zu erkennen: $(a+b)^5$. Nach dem Lehrsatz 16, Seite 61, erhält man:

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

Die auszuführende Radizierung gestaltet sich somit, analog wie in den Regeln 1 und 8 angegeben ist, wie folgt:

$$\sqrt[5]{x^{10}-5x^8y+10x^6y^2-10x^4y^3+5x^2y^4-y^5} = \underbrace{x^2}_{a}-\underbrace{y}_{b}$$

$$\pm x^{10} \quad (= a^5)$$

$$(5a^4 = 5.(x^2)^4 =)\ 5x^8 \;\Big|\; -5x^8y+10x^6y^2-10x^4y^3+5x^2y^4-y^5$$

$$\mathop{-}\limits_{+} 5x^8y \quad (= 5a^4b = 5(x^2)^4.y)$$

$$+10x^6y^2-10x^4y^3+5x^2y^4-y^5$$

$$\mathop{+}\limits_{-} 10x^6y^2 \quad (= 10a^3b^2 = 10.(x^2)^3.y^2)$$

$$-10x^4y^3+5x^2y^4-y^5$$

$$\mathop{-}\limits_{+} 10x^4y^3 \quad (= 10a^2b^3 = 10(x^2)^2.y^3)$$

$$+5x^2y^4-y^5$$

$$\mathop{+}\limits_{-} 5x^2y^4 \quad (= 5.ab^4 = 5.x^2.y^4)$$

$$-y^5$$

$$-y^5 \quad (= b^5)$$

f). Ueber die Ausziehung höherer Wurzeln aus dekadischen Zahlen.

Bei der Ausziehung höherer Wurzeln aus dekadischen Zahlen kann man 2 Fälle unterscheiden, nämlich:

1). der Wurzelexponent lässt sich in die Faktoren 2 und 3 zerlegen und

2). dies ist nicht der Fall.

Bei der Ausziehung höherer Wurzeln aus dekadischen Zahlen beachte man dementsprechend folgende Regel:

Regel 16. Hat man eine dekadische Zahl zu radizieren und ist der betreffende Wurzelexponent eine höhere Zahl als 2 und 3, dabei

a). eine solche Zahl, die sich in die Faktoren 2 und 3 zerlegen lässt, so führe man diese Zerlegung aus und benutze den Zusatz 3 des Lehrsatzes 12, Seite 210, indem man die 2. und 3. Wurzel nacheinander auszieht;

man siehe die Beisp. 1 u. 2 in d. Aufg. 46;

dabei

b). eine solche Zahl, welche sich nicht in Faktoren von 2 und 3 zerlegen lässt, so leite man sich eine den Regeln 3 u. 10 analoge Regel ab, und zwar geschieht dies wiederum, indem man sich eine beliebige Zahl als Summe schreibt und diese Summe mit der Zahl potenziert, welche gleich dem betreffenden Wurzelexponenten ist, woraus sich das einzuhaltende Verfahren ergibt.

Man siehe die Beispiele 3 und 4 der Aufgabe 46 und beachte die Erkl. 76.

Erkl. 76. Die Ausziehung höherer Wurzeln aus dekadischen Zahlen nach der vorstehenden Regel 16 ist, wie aus den Beispielen in der folgenden Aufgabe ersichtlich, sehr umständlich und zeitraubend, und da ausserdem die Logarithmen ein viel bequemeres Mittel bieten derartige Radizierungen auszuführen, so bedient man sich in solchen Fällen ausschliesslich der Logarithmen (man siehe dieses Kapitel), es sind deshalb in nachstehender Aufgabe nur einige Beispiele vorgeführt.

Aufgabe 46. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Radizierungen nach vorstehender Regel 16 ausführen, dabei nur die absoluten Wurzelwerte berücksichtigen (siehe Zusatz 4, Seite 201).

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $\sqrt[4]{263{,}47891} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{263{,}47891}} = \ldots\ldots$ man beachte den in vorstehender Regel 16 angegebenen 1. Fall.

$= \sqrt[2]{16{,}232} = \ldots$ 4,02 . . denn nach der Regel 6, Seite 282, erhält man bis auf 3 Dezimalen genau:

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

$\sqrt{2|63,|47|89|10} = 16{,}232\ldots$ man kann hier noch mehr Dezimalen berechnen.

1
2|163
156
32|747
644
324|10389
9729
3246|66010
64924
1086 . . . Rest.

Probe:
$16{,}232^2 + 1086$ muss $=$ $263{,}47891$ sein.

Ferner erhält man auf analoge Weise:

$$\sqrt{16{,}232} = 4{,}02\ldots$$

2). $\sqrt[6]{0{,}004096} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{0{,}004096}} = \ldots\ldots$ man beachte den in vorstehender Regel 16 angegebenen 1. Fall.

$= \sqrt[3]{0{,}064} = \ldots\ 0{,}4\ \ldots$ denn nach der Regel 6, Seite 282, erhält man zunächst:

$$\sqrt[2]{0,|00|40|96} = 0{,}064$$

36
12|496
496
—

Ferner erhält man n. d. Regel 13, S. 313:

$$\sqrt[3]{0,|064} = 0{,}4$$

64
—

3). $\sqrt[5]{345025251} = \ldots\ldots\ 51\ \ldots$ man beachte den in vorstehender Regel angegebenen 2. Fall.

Zur Bestimmung der fraglichen Wurzel hat man den Radikanden von rechts nach links in Klassen zu je 5 abzuteilen, dann benutze man, analog wie in dem Beispiel 3 der Aufgabe 45, die Formel:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Man wird erhalten:

$$\sqrt[5]{3450|25251} = \underbrace{5}_{a}{}^{*)}\cdot\underbrace{1}_{b}$$

($a^5 = 5^5 =$) 3125
($5a^4 = 5 \cdot 5^4 =$) 3125|3252
3125 ($= 5a^4b = 5 \cdot 5^4 \cdot 1$)
1275
1250 ($= 10a^3b^2 = 10 \cdot 5^3 \cdot 1^2$)
252
250 ($= 10a^2b^3 = 10 \cdot 5^2 \cdot 1^3$)
25
25 ($= 5ab^4 = 5 \cdot 5 \cdot 1^4$)
1
1 ($= b^5 = 1^5$)
—

*). Die erste Ziffer 5 der Wurzel findet man durch Probieren, oder indem man sich zuerst die 5. Potenzen der Zahlen 1—9 bildet und untersucht, welche derselben als höchste in der 1. Klasse enthalten ist.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

4). $\sqrt[10]{10} = \sqrt[2]{\sqrt[5]{10}} = \sqrt[2]{1{,}584} = 1{,}25\ldots$. . man beachte zuerst den in vorstehender Regel 16 angegebenen 1. Fall, dann beachte man den 2. Fall dieser Regel und führe die durch $\sqrt[5]{10}$ angedeutete Radizierung bis auf eine gewisse Anzahl von Dezimalstellen aus, wobei man sich für jede zu berechnende Dezimalstelle 5 Nullen angehängt denken muss. Analog dem Beispiel 3 erhält man bis auf 3 Dezimalstellen genau:

$\sqrt[5]{10,00000|00000|00000} = 1{,}584$ ($a\,b\,c\,d$)

$(a^5 =)$ 1

$(5a^4 = 5.1^4 =)$ 5|90

25 $(= 5a^4b = 5.1^4.5)$

650

250 $(= 10a^3b^2 = 10.1^3.5^2)$

4000

1250 $(= 10a^2b^3 = 10.1^2.5^3)$

27500

3125 $(= 5ab^4 = 5.1.5^4)$

243750

3125 $(= b^5 = 5^5)$

$(5(10a+b)^4 = 5.15^4 =)$ 253125|2406250

2025000 $(= 5(10a+b)^4.c = 5.15^4.8)$

3812500

2160000 $(= 10(10a+b)^3.c^2 = 10.15^3.8^2)$

16525000

1152000 $(= 10(10a+b)^2.c^3 = 10.15^2.8^3)$

153730000

307200 $(= 5(10a+b).c^4 = 5.15.8^4)$

1534228000

32768 $(= c^5 = 8^5)$

$(5(100a+10b+c)^4 = 5.158^4 =)$ 3116006480|15341952320

12464025920 $(= 5(100a+10b+c)^4.d = 5.158^4.4)$

2877926400

u. s. f. u. s. f.

Ferner erhält man nach der Regel 6 bis auf 2 Dezimalen genau:

$\sqrt{1{,}584} = 1{,}25\ldots$

5). $\sqrt[4]{531441} =$? analog dem gelösten Beispiel 1.

6). $\sqrt[4]{2176782336} =$?

7). $\sqrt[8]{43046721} =$?

8). $\sqrt[6]{1000} =$?

9). $\sqrt[6]{0{,}743} =$?

10). $\sqrt[8]{0{,}2756} =$?

11). $\sqrt[9]{467{,}258\,258\ldots} =$?

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
12). $\sqrt[12]{0{,}00002} =$	 ?	
13). $\sqrt[5]{418195493} =$	 ?	analog dem gelösten Beispiel 3.
14). $\sqrt[5]{24{,}62} =$	 ?	
15). $\sqrt[10]{1000} =$	 ?	„ „ „ „ 4.

15). Ueber die Rechnung mit imaginären Grössen.

Mittelst des Lehrsatzes 3, Seite 188, wurde bereits dargethan, dass solche Radizierungen in welchen der Radikand eine **negative** Zahl oder Buchstabengrösse ist und der Wurzelexponent eine **gerade** Zahl vorstellt, **unmöglich** sind, indem kein denkbarer Wert existiert, welcher der durch die betr. angedeutete Radizierung ausgesprochenen Bedingung genügt. z. B.: die in $\sqrt[2]{-4}$, $\sqrt[6]{-a^6}$ u. s. f. angedeuteten Radizierungen sind unmöglich, da für das 1. Beispiel kein Wert denkbar ist, der in die 2te (in eine gerade) Potenz erhoben $= -4$ ist, und da ferner für das 2. Beispiel kein Wert ist, der in die 6te (in eine gerade) Potenz erhoben $= -a^6$ ist.

Bei den seither auszuführenden Operationen waren aus diesem Grunde solche Radizierungen ausgeschlossen. Es ist nunmehr Aufgabe dieses Abschnitts zu zeigen, wie man zu verfahren hat, wenn sich bei Entwicklungen und Berechnungen derartige angedeutete Radizierungen einstellen, wobei man sich nachstehende Erklärungen und Lehrsätze merken muss.

Erkl. 77. Hat man eine angedeutete Radizierung in welcher der Radikand eine **negative** Zahl und der Wurzelexponent eine **gerade** Zahl ist, so sagt man, da die zu suchende Wurzel nicht existiert und nur in der Einbildung bestehen kann: **die Wurzel ist imaginär** (lat. d. h. in der Einbildung bestehend) und nennt dementsprechend eine gerade Wurzel aus einer negativen Zahl eine **imaginäre Zahl** (man vergl. die Antwort der Frage 26, S. 189); alle übrigen existierenden Zahlen nennt man im Gegensatz hierzu **reelle Zahlen**, ferner sagt man: **die Wurzel ist reell**, welche sich bei jeder anderen angedeuteten Radizierung, wenn auch nur annähernd (wie bei den irrationalen Wurzeln) ergibt.

Erkl. 78. Der Erkl. 77 entsprechend nennt man jede angedeutete Radizierung in welcher der Radikand irgend ein negativer Buchstabenausdruck ist und der Wurzelexponent eine gerade Zahl vorstellt, eine **imaginäre Grösse**. Somit ist festgestellt, was man sich unter einer imaginären Grösse (was auch eine imaginäre Zahl sein kann) zu denken hat.

Erkl. 79. Die Untersuchung in Bezug auf die Rechnung mit imaginären Grössen kann stets zurückgeführt werden auf die von: $\sqrt{-1}$

Man beachte den Zusatz 4, Seite 201.

denn hat man z. B.: $\sqrt[2n]{-a}$, wo $2n$ stets eine gerade Zahl vorstellt, so kann man setzen:

$$\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[2n]{-1 \, . \, a} = \sqrt[2n]{-1} \, . \, \sqrt[2n]{a} =$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[2]{-1} \, . \, \sqrt[2n]{a}} = \sqrt[2n]{a} \, . \, \sqrt[n]{\sqrt{-1}}$$

Erkl. 80. Die Quadratwurzel aus -1, nämlich: $\sqrt{-1}$, auf welche sich nach vorstehender Erklärung die Untersuchungen in Bezug auf die Rechnung mit imaginären Grössen zurückführen lassen, nennt man die **imaginäre Einheit** und bezeichnet dieselbe nach *Gauss*, im allgemeinen durch „i“, in Zeichen: $\sqrt{-1} = i$

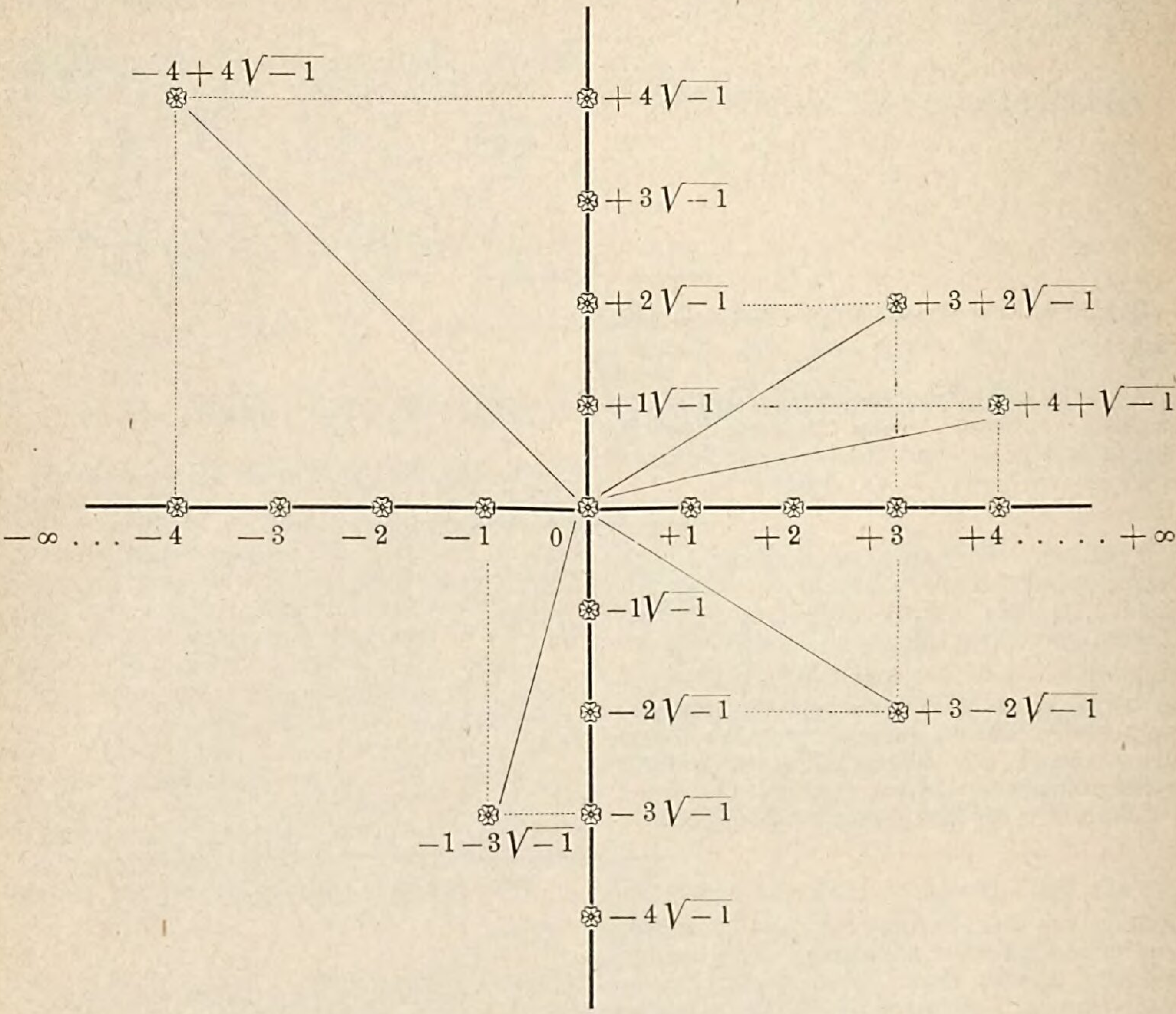
Erkl. 81. Verbindet man durch Addition oder Subtraktion reelle Zahlen mit imaginären Zahlen, so dass, wenn a und b irgend 2 reelle Zahlen vorstellen, man die binomische Form: $a \pm b\sqrt{-1}$ oder nach der Erkl. 80: $a \pm b\,i$ erhält, so nennt man derartige, aus imaginären und reellen Zahlen zusammengesetzte binomische Ausdrücke **komplexe** oder **laterale** (latein. seitlich liegende) Zahlen.

Man siehe die Erklärungen 82 und 83.

Erkl. 82. Die in der Erkl. 81 angeführten Zahlen von der Form: $a \pm b\sqrt{-1}$ wurden zuerst von *Cauchy* „**komplexe**“ (lat. verbundene, wie die Glieder einer jeden algebr. Summe), von *Gauss* mit richtiger Bezeichnung „**laterale**“ (lat. seitlich liegende, siehe Erk. 83, worunter man dementsprechend auch die einfachen imaginären Zahlen rechnen kann) und von *Mourey* „**nombres directives**“ (lat. Richtungszahlen — in Betreff ihrer graphischen Darstellung — siehe Erkl. 83) genannt.

Erkl. 83. Der Begriff der imaginären Zahlen führt dazu, das bis dahin bestehende Zahlengebiet, welches sämmtliche ganzen, gebrochenen positiven und negativen Zahlen von $+\infty$ bis $-\infty$ umfasst und graphisch durch eine gerade Linie dargestellt wird, deren Mitte die Null einnimmt, zu erweitern und da fand man, siehe das besondere Kapitel: „**Die Richtungszahlen und die Moivre'sche Formel**“, dass die positiven und negativen imaginären Einheiten auf einer geraden Linie liegen, die senkrecht in der Mitte der Linie steht, auf der die soeben erwähnten reellen Zahlen liegen, und dass in der Ebene deren Lage durch diese beiden geraden Linien bestimmt wird, die komplexen oder lateralen Zahlen liegen, dass somit die Zahlenlinie sich in eine **Zahlenebene** erweitert, wie durch nachstehende Zeichnung dargethan ist.

Zahlenebene.



Erkl. 84. Die **komplexe Zahl:** $a \pm b\sqrt{-1}$ oder $a \pm bi$ ist die **allgemeinste Form** der bis hierher betrachteten Zahlen, denn je nachdem a oder $b = 0$ gesetzt wird, erhält man eine imaginäre oder eine reelle Zahl.

Erkl. 85. Die komplexen Zahlen:

$$a+b\sqrt{-1} \text{ und } a-b\sqrt{-1}$$

bezw. $a+bi$ und $a-bi$, heissen auch **zugeordnete, konjugierte** komplexe Zahlen.

Erkl. 86. Alle Gesetze, welche für die Rechnung mit imaginären Grössen aufgestellt werden, können nur aus dem Lehrsatz 4, Seite 191, welcher für alle Fälle seine Gültigkeit beibehält und bei den imaginären Grössen durch die Formel:

$$\left(\sqrt[2n]{-a}\right)^{2n} = -a$$

ausgedrückt wird, abgeleitet werden.

Lehrsatz 24. **Die positive imaginäre Einheit:** $\sqrt{-1}$, bezw. i (siehe Erkl. 80, S. 327) **hat die merkwürdige Eigenschaft, dass ihre aufeinanderfolgenden Potenzen periodisch sind und zwar erhält die positive imaginäre Einheit** ($+\sqrt{-1}$, $+i$) **in jede gerade Potenz erhoben die Werte:** $+1$ oder -1, **nämlich je nachdem der Potenzexponent durch vier teilbar ist oder hierbei 2 zum Rest hat, während sie in jede ungerade Potenz erhoben die Werte:** $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ (also $+i$ und $-i$) **erhält, nämlich je nachdem der Potenzexponent durch 4 dividiert 1 oder 3 als Rest lässt.**

Behaupt.

a). . . $(\sqrt{-1})^{4n} = +1$, oder: $i^{4n} = +1$

b). . . $(\sqrt{-1})^{4n+1} = +\sqrt{-1}$, oder: $i^{4n+1} = +i$

c). . . $(\sqrt{-1})^{4n+2} = -1$, oder: $i^{4n+2} = -1$

d). . . $(\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1}$, oder: $i^{4n+3} = -i$

Diese Behauptungen gehen für den speziellen Fall, wenn $n = 0$ gesetzt wird, über in:

e). . . $(\sqrt{-1})^0 = +1$ oder $i^0 = +1$

f). . . $(\sqrt{-1})^1 = +\sqrt{-1}$ „ $i^1 = +i$

g). . . $(\sqrt{-1})^2 = -1$ „ $i^2 = -1$

h). . . $(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$ „ $i^3 = -i$

Erkl. 87. **Man begehe ja nicht den Fehler und setze:**

$$(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{+1}$$
$$= \pm 1 \text{ (nach d. Lehrsatz 8, S. 194)}$$

denn der hierbei angewandte Lehrs. 13, S. 214, hat in den Fällen keine Gültigkeit mehr, in welchen der Wurzelexponent eine gerade und der Radikand eine negative Zahl vorstellt.

Ebenso darf man ja nicht:

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{+1}$$

setzen, denn der hierbei angewandte Lehrs. 17, Seite 225, ist nach der Erkl. 42 in diesen Fällen nicht mehr gültig.

Analog darf man nicht setzen:

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{-1}} = \sqrt{+1}$$

denn der hierbei angewandte Lehrs. 20, S. 241, ist nach der Erkl. 48 in diesem Falle nicht mehr gültig.

Beweis. Zum Beweise der vorstehenden Relationen untersuche man, welche Werte die imaginäre Einheit „i“ ($= \sqrt{-1}$) annimmt, wenn man sie, wie folgt, der Reihe nach mit 0, 1, 2, 3 potenziert. Man erhält:

1). $i^0 = i^{m-m} = \frac{i^m}{i^m} = +1$

2). $i^1 = +i \quad (= \sqrt{-1})$

3). $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ (man beachte die Erkl. 86 u. 87)

4). $i^3 = i^2 . i = -1 . i = -i \quad (= -\sqrt{-1})$

5). $i^4 = i^2 . i^2 = -1 . -1 = +1$

5). $i^5 = i^{4.1+1} = i^4 . i^1 = +i \quad (= \sqrt{-1})$

6). $i^6 = i^{4.1+2} = i^4 . i^2 = +1 . -1 = -1$

7). $i^7 = i^{4.1+3} = i^4 . i^3 = +1 . -i = -i \quad (= -\sqrt{-1})$

8). $i^8 = i^{4.2} = (i^4)^2 = +1^2 = +1$

Die Werte dieser Potenzen von i sind dieselben wie die der in den Gleichungen 2). bis 5). berechneten.

9). $i^9 = i^{4.2+1} = i^8 . i^1 = +1 . +i = +i \quad (= \sqrt{-1})$

10). $i^{10} = i^{4.2+2} = i^8 . i^2 = +1 . -1 = -1$

11). $i^{11} = i^{4.2+3} = i^8 . i^3 = +1 . -i = -i \quad (= -\sqrt{-1})$

12). $i^{12} = i^{4.3} = (i^4)^3 = (+1)^3 = +1$

Die Werte dieser Potenzen von i sind dieselben wie die der in den Gleichungen 2). bis 5). und 5). bis 8). berechneten.

Setzt man vorstehende Betrachtung fort, so ergeben sich die in der Behauptung aufgestellten **allgemeinen** Formeln, in welchen n eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

Erkl. 88. Für die aufeinanderfolgenden **negativen** Potenzen der positiven imaginären Einheit ergeben sich ebenfalls **periodische** Werte. Man erhält mit Benutzung des vorstehenden Lehrsatzes:

1). $i^{-4n} = \frac{1}{i^{4n}} = \frac{1}{1} = +1$

2). $i^{-(4n+1)} = \frac{1}{i^{4n+1}} = \frac{1}{i^{4n} \cdot i^{1}} = \frac{1}{i^{4n}} \cdot \frac{1}{i^{1}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{i^{1}} = \frac{1}{i^{1}} = \frac{1 \cdot i}{i^{2}} = \frac{i}{-1} = -i$

3). $i^{-(4n+2)} = \frac{1}{i^{4n+2}} = \frac{1}{i^{4n} \cdot i^{2}} = \frac{1}{i^{4n}} \cdot \frac{1}{i^{2}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{i^{2}} = \frac{1}{i^{2}} = \frac{1}{-1} = -1$

4). $i^{-(4n+3)} = \frac{1}{i^{4n+3}} = \frac{1}{i^{4n} \cdot i^{3}} = \frac{1}{i^{4n}} \cdot \frac{1}{i^{3}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{i^{3}} = \frac{1}{i^{3}} = \frac{1 \cdot i}{i^{4}} = \frac{i}{+1} = +i$

Auf ganz analoge Weise findet man die periodischen Werte der aufeinanderfolgenden positiven u. negativen ganzen Potenzen der **negativen** imaginären Einheit: $-i \; (= -\sqrt{-1})$.

Erkl. 89. Nach vorstehendem Lehrsatz 24 und der Erkl. 88 ist es leicht, jede beliebige ganze Potenz von $i \; (= \sqrt{-1})$ zu berechnen, indem man hiernach den Exponenten der betr. Potenz nur in eine Summe zu zerlegen braucht, deren erster Summand ein positives oder negatives Vielfache von 4 ist und deren zweiter Summand alsdann eine der Zahlen: 0, 1, 2 und 3 sein muss. Der Wert der betreffenden Potenz von i richtet sich dann nach dem 2ten Summanden des Exponenten, siehe nebensteh. Beispiele.

z. B.: $i^{38} = i^{4.9+2} = i^2 = -1$

$i^{29} = i^{4.7+1} = i^1 = i$

$i^{35} = i^{4.8+3} = i^3 = -i$

$i^{40} = i^{4.10+0} = i^0 = +1$

analog ist z. B.:

$i^{-17} = i^{-4.5+3} = i^3 = -i$

$i^{-47} = i^{-4.12+1} = i^1 = +i$

u. s. f.

Lehrsatz 25. Das Produkt der konjugierten komplexen Zahlen: $a + bi$ **und** $a - bi$ ($= a + b\sqrt{-1}$ und $a - b\sqrt{-1}$, siehe die Erkl. 85) **ist reell und zwar gleich der Summe der Quadrate der reellen Teile dieser komplexen Grössen.**

Behaupt.

$(a + bi) . (a - bi) = a^2 + b^2$ oder:

$(a + b\sqrt{-1}) . (a - b\sqrt{-1}) = a^2 + b^2$

Beweis. Nach dem Lehrs. 17, S. 70, ist:

$$(a + bi) . (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 . i^2$$

Da nun: i^2 nach der in Behaupt. des Lehrs. 24 aufgestellten Relation g). $= -1$ ist, so erhält man:

$(a + bi) . (a - bi) = a^2 - b^2 . -1$ oder:

$(a + bi) . (a - bi) = a^2 + b^2$

Erkl. 90. Mit Hülfe des vorstehenden Lehrsatzes 25 ist man im Stande eine **zweigliedrige Summe** in ein Produkt zu zerlegen.

Soll man z. B. die Summe: $x+y$ in ein Produkt zerlegen, so setze man:

$$x+y = (\sqrt{x}+i\sqrt{y})\cdot(\sqrt{x}-i\sqrt{y}) \;\ldots\ldots$$

oder:

$$x+y = (\sqrt{x}+\sqrt{-1}\cdot\sqrt{y})\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{-1}\cdot\sqrt{y})$$

und

$$x+y = (\sqrt{x}+\sqrt{-y})\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{-y})$$

denn: $(\sqrt{x}+i\sqrt{y})\cdot(\sqrt{x}-i\sqrt{y})$ ist nach vorstehendem Lehrsatz 25:

$$= (\sqrt{x})^2-(i\sqrt{y})^2$$
$$= x-i^2\cdot(\sqrt{y})^2$$
$$= x-i^2\cdot y$$

Da nun $i^2 = -1$ ist, so erhält man:

$$(\sqrt{x}+i\sqrt{y})\cdot(\sqrt{x}-i\sqrt{y}) = x-1\cdot y$$
$$= x+y$$

Lehrsatz 26. Sind die zwei komplexen Grössen: $a+bi$ und $x+yi$ einander gleich, so sind die reellen Teile, nämlich a und x, und die imaginären Teile, nämlich bi und yi, je unter sich gleich.

Vorauss.

$$a+bi = x+yi \quad \text{oder:}$$
$$a+b\sqrt{-1} = x+y\sqrt{-1}$$

Behaupt.

$$a = x$$
$$bi = yi$$

Beweis. Aus der gegebenen Gleichung:

$a+bi = x+yi$ folgt:

$bi-yi = x-a$ oder, wenn man auf der linken Seite den Faktor i ausscheidet und die somit erhaltene Gleichung quadriert:

$$i(b-y) = x-a$$
$$(i(b-y))^2 = (x-a)^2$$
$$i^2(b-y)^2 = (x-a)^2$$

Da nun $i^2 = -1$ ist, so erhält man:

$-(b-y)^2 = (x-a)^2$ woraus sich

$(x-a)^2+(b-y)^2 = 0$ ergibt.

Diese Gleichung kann aber nur dann bestehen, wenn:

$(x-a)^2 = 0$, also $x-a = 0$

und $(b-y)^2 = 0$, „ $b-y = 0$ ist.

Aus den Relationen:

$$x-a = 0 \quad \text{und}$$
$$b-y = 0$$

ersieht man, dass:

$a = x$ und

$b = y$, also auch

$bi = yi$ sein muss.

Erkl. 91. Vorstehender Lehrsatz 26 findet eine Anwendung in dem Abschnitt D.

Erklärung 92. Bei dem Rechnen mit imaginären Grössen, d. s. also alle geraden Wurzeln aus negativen Ausdrücken, merke man sich im allgemeinen folgendes:

1). **Man scheide zunächst überall, analog wie in dem Beispiel der Erkl. 79, S. 327, geschehen ist, die imaginäre Einheit aus, was bei einiger Uebung nur in Gedanken zu geschehen braucht;**

2). **dann bezeichne man die überall ausgeschiedene imaginäre Einheit durch den Buchstaben „i";**

Durch die Einführung dieses Buchstabens werden leicht zu begehende Fehler, wie solche in der Erkl. 87, Seite 329 angeführt sind, vermieden.

3). **dann verfahre man nach den bekannten algebraischen Operationsregeln, welche in der auszuführenden Rechnung enthalten sind, wobei „i" einfach als Buchstabe, wie jeder andere Buchstabe (allgemeine Zahl) zu betrachten ist;**

4). **dann berechne man die im Resultate vorkommenden Potenzen der imaginären Einheit i $(= \sqrt{-1})$ nach dem Lehrsatz 24, Seite 329, und substituiere schliesslich die hierfür gefundenen Werte.**

Die in nachstehender Aufgabe vorkommenden gelösten Uebungsbeispiele geben über alle weiteren besonderen Fälle vollständige Auskunft.

Aufgabe 47. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Operationen soweit als möglich ausführen.

Uebungsbeispiele: Resultate: Andeutungen:

1). $\sqrt{-81} = \sqrt{-1\,.\,81} = \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{81} = \sqrt{-1}\,.\,9 = 9\sqrt{-1}$
$(= i\,.\,\sqrt{81})$ $(= i\,.\,9)$ $(= 9i)$

man beachte die Erkl. 79, Seite 327. Die Einführung des Buchstabens i ist bei solchen einfachen Beispielen nicht nötig.

2). $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{-1\,.\,16} = \sqrt[4]{-1}\cdot\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{-1}\cdot\sqrt[4]{2^4} =$
$\sqrt[4]{-1}\,.\,2 = 2\sqrt[4]{-1}$

3). $\sqrt{-75} = \sqrt{-3\,.\,25} = \sqrt{-3}\,.\,\sqrt{25} = \sqrt{-3}\,.\,5 = 5\sqrt{-3}$

man beachte, dass man in der angedeuteten Radizierung den Radikanden in ein Produkt zerlegen kann, dessen einer Faktor: $+25$ eine Quadratzahl ist.

4). $3\sqrt{-48} = 3\sqrt{-3\,.\,16} = 3\sqrt{-3}\,.\,\sqrt{16} = 3\,.\,\sqrt{-3}\,.\,4 =$
$12\sqrt{-3}$

5). $\sqrt{-a^{2n}} = \sqrt{-1\,.\,a^{2n}} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{a^{2n}} = \sqrt{-1}\cdot a^n = a^n\sqrt{-1}$ analog dem Beispiel 1.

6). $\sqrt[4]{-x^{24}} = \sqrt[4]{-1\,.\,x^{24}} = \sqrt[4]{-1}\cdot\sqrt[4]{x^{24}} = \sqrt[4]{-1}\cdot x^6 = x^6\sqrt[4]{-1}$ „ „ „ 2.

7). $\sqrt{-m^2 n} = \sqrt{-n\,.\,m^2} = \sqrt{-n}\,.\,\sqrt{m^2} = \sqrt{-n}\,.\,m = m\sqrt{-n}$ „ „ „ 3.

8). $\sqrt{-49} + \sqrt{-64} - \sqrt{-100} = \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{49} + \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{64} - \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{100}$. . man beachte die vorstehende Erklärung 92.

$= i\,.\,\sqrt{49} + i\sqrt{64} - i\sqrt{100}$

$= i\,.\,7 + i\,.\,8 - i\,.\,10$

$= 7i + 8i - 10i = 5i = 5\sqrt{-1}$

9). $\sqrt{-4} - 3\sqrt{-16} + \sqrt{-100} = i\sqrt{4} - 3i\sqrt{16} + i\sqrt{100}$. .

$= 2i - 12i + 10i = 0$

man gewöhne sich daran, die Ausscheidung der imaginären Einheit nur in Gedanken auszuführen.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

10). $\sqrt{-ab^3}+\sqrt{-a^3b}-ab\sqrt{-\frac{a}{b}}+a^2\sqrt{-\frac{b}{a}}$

$= i.\sqrt{ab^3}+i.\sqrt{a^3b}-i.ab\sqrt{\frac{a}{b}}+i.a^2\sqrt{\frac{b}{a}}$ nun reduziere man die reellen Faktoren nach früheren Regeln.

$= i.b\sqrt{ab}+i.a\sqrt{ab}-i.a\sqrt{ab}+i.a\sqrt{ab}$

$= i.\sqrt{ab}(a+b) = \sqrt{-1}.\sqrt{ab}(a+b) =$

$(a+b)\sqrt{-ab}$

11). $\sqrt{-x}.\sqrt{-x} = (\sqrt{-x})^2 = \ldots -x \ldots\ldots$ man beachte die Erkl 87, Seite 329, und setze ja nicht:

$\sqrt{-x}.\sqrt{-x} = \sqrt{-x\cdot -x}$
$= \sqrt{+x^2}$

oder nach der Erkl. 92:

$= i.\sqrt{x}.i\sqrt{x} = i.i.\sqrt{x}.\sqrt{x}$

$= i^2.(\sqrt{x})^2 = i^2.x = -1.x = -x \ldots$ man beachte, dass nach dem Lehrsatz 24, Seite 329, $i^2 = -1$ ist.

12). $\sqrt{-a}.\sqrt{-b} = i.\sqrt{a}.i\sqrt{b} = i^2.\sqrt{a}.\sqrt{b} = i^2\sqrt{ab}$

$= -1.\sqrt{ab} = -\sqrt{ab} \ldots$ hieraus ergibt sich die Merkwürdigkeit, dass das Produkt zweier **imaginären** Grössen ein **reelles** Resultat ergibt.

13). $\sqrt{-3}.\sqrt{-12} = i\sqrt{3}.i.\sqrt{12} = i^2.\sqrt{3}.\sqrt{12} = i^2\sqrt{36}$

$= -1.6 = -6 \ldots\ldots$ hierbei hätte man auch das allgemeine Beispiel 12 als Formel benutzen können.

14). $2\sqrt{-5}.-5\sqrt{-3} = 2i\sqrt{5}.-5i\sqrt{3} = -10i^2\sqrt{5}.\sqrt{3}$

$= -10\cdot -1\cdot\sqrt{15} = 10\sqrt{15}$

15). $\sqrt{3}.\sqrt{-3} = \sqrt{3}.i.\sqrt{3} = i.(\sqrt{3})^2 = 3i = 3\sqrt{-1}$

16). $a\sqrt{-a^2b^3}.\sqrt{-a^4b^5} = i.a\sqrt{a^2b^3}.i\sqrt{a^4b^5}$

$= i^2.a.\sqrt{a^2b^3}.\sqrt{a^4b^5} = i^2.a\sqrt{a^6b^8}$

$= i^2.a.a^3b^4 - 1.a^4b^4 = -a^4b^4$

17). $(\sqrt{-1})^7+(\sqrt{-1})^9+(\sqrt{-1})^{10}-(\sqrt{-1})^{12}+(\sqrt{-1})^{13}-(\sqrt{-1})^{14}$

$= i^7+i^9+i^{10}-i^{12}-i^{13}-i^{14} \ldots\ldots$ nunmehr beachte man die Erkl. 89, Seite 330.

$= i^{4.1+3}+i^{4.2+1}+i^{4.2+2}-i^{4.3+0}-i^{4.3+1}-i^{4.3+2}$

$= i^3+i^1+i^2-i^0-i^1-i^2 \ldots\ldots$ nun führe man die angedeuteten Additionen soweit als möglich aus und beachte den Lehrsatz 24, Seite 329.

$= i^3-i^0 = -i-1 = -\sqrt{-1}-1 = -1-\sqrt{-1}$

18). $(5\sqrt{-2}-7\sqrt{-3}).(6\sqrt{-8}+3\sqrt{-2}) =$

$= (5i-7i).(6i+3i) \ldots$ nunmehr beachte man die Erkl. 33, Seite 16.

$= 30i^2-42i^2+15i^2-21i^2 \ldots$ nun addiere man.

$= -18i^2 = -18\cdot -1 = 18$

19). $(\sqrt{-a}+\sqrt{-b})(\sqrt{-a}-\sqrt{-b}) = \ldots\ldots$ ohne dass man hier i einzuführen braucht beachte man den Lehrsatz 17, Seite 70.

$= (\sqrt{-a})^2-(\sqrt{-b})^2 = -a-(-b)$

$= -a+b \ldots$ man beachte auch die Erkl. 90, Seite 331.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

20). $(x+\sqrt{-y^2})\cdot(x-\sqrt{-y^2}) = x^2-(\sqrt{-y^2})^2 = x^2-(-y^2)$
$= x^2+y^2$

21). $(6\sqrt{-7}-3\sqrt{-8})\cdot(6\sqrt{-7}+3\sqrt{-8}) = (6\sqrt{-7})^2-(3\sqrt{-8})^2$
$= 6^2.(\sqrt{-7})^2-3^2.(\sqrt{-8})^2$. . . man beachte die Erkl. 87, S. 329.
$= (36\cdot-7)-(9\cdot-8) = -252-(-72)$
$= -252+72 = -180$

22). $\sqrt{-3}.\sqrt{-4}.\sqrt{-5}-\sqrt{-1}.\sqrt{-6}.\sqrt{-7}.\sqrt{-9}.\sqrt{-10}$
$= i\sqrt{3}.i\sqrt{4}.i\sqrt{5}-i.i\sqrt{6}.i\sqrt{7}.i\sqrt{9}.i\sqrt{10}$
$= i.i.i.\sqrt{3}.\sqrt{4}.\sqrt{5}-i.i.i.i.i.\sqrt{6}.\sqrt{7}.\sqrt{9}.\sqrt{10}$
$= i^3.\sqrt{3.4.5}-i^5.\sqrt{6.7.9.10}$
$= i^3.2\sqrt{15}-i^5.6\sqrt{15.7}$ nun beachte man den Lehrsatz 24, Seite 329.
$= -i.2\sqrt{15}-i.6\sqrt{15}.\sqrt{7}$
$= -2i\sqrt{15}(1+3\sqrt{7}) = -2\sqrt{-15}(1+3\sqrt{7})$

23). $(4\sqrt{-2}-3\sqrt{-3})^2 = 4^2(\sqrt{-2})^2-2.4\sqrt{-2}.3\sqrt{-3}+3^2(\sqrt{-3})^2$. . . man beachte den Lehrsatz 12, Seite 46; hierbei ist nicht nötig i einzuführen.
$= 16\cdot-2-24\sqrt{-2}.\sqrt{-3}+9\cdot-3$ in Betreff der Multiplikation der Wurzeln: $\sqrt{-2}.\sqrt{-3}$ beachte man die Erkl. 87, Seite 329.
$= -32-24.i^2.\sqrt{6}-27$
$= -59-24\cdot-1\cdot\sqrt{6} = -59+24\sqrt{6}$

24). $(4\sqrt{-2}-3\sqrt{-3})^3 = (4i\sqrt{2}-3i\sqrt{3})^3$ nunmehr beachte man den Lehrsatz 13, Seite 51.
$= 4^3i^3\sqrt{2^3}-3.4^2.i^2\sqrt{2^2}.3.i\sqrt{3}+3.4i\sqrt{2}.3^2.i^2\sqrt{3^2}-3^3i^3\sqrt{3^3}$
$= 64.i^3.\sqrt{2^2.2}-288.i^3.\sqrt{3}+324i^3\sqrt{2}-27i^3\sqrt{3^2.3}$
$= 128i^3\sqrt{2}-288.i^3.\sqrt{3}+324i^3\sqrt{2}-81i^3\sqrt{3}$
$= (452\sqrt{2}\cdot-369\sqrt{3}).i^3$
$= (452\sqrt{2}-369\sqrt{3})\cdot-\sqrt{-1} = (369\sqrt{3}-452\sqrt{2})\cdot\sqrt{-1}$

25). $\frac{a}{\sqrt{-b}} = \frac{a.\sqrt{-b}}{\sqrt{-b}.\sqrt{-b}} = \frac{a\sqrt{-b}}{(\sqrt{-b})^2} = \frac{a\sqrt{-b}}{-b}$. . . ohne Einführung des Buchstabens i mache man den Nenner **rational**.
$= -\frac{a}{b}\sqrt{-b}$

26). $\frac{\sqrt{-36}}{\sqrt{4}} = \frac{i\sqrt{36}}{\sqrt{4}} = i\sqrt{\frac{36}{4}} = i\sqrt{9} = i.3 = 3i = 3\sqrt{-1}$

27). $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \frac{i\sqrt{a}}{i\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$. . . hieraus ergibt sich die Merkwürdigkeit, dass zwei imaginäre Grössen ineinander dividiert ein **reelles** Resultat ergeben.

28). $\frac{28\sqrt{-12}}{7\sqrt{-3}} = \frac{28i\sqrt{12}}{7i\sqrt{3}} = 4\sqrt{\frac{12}{3}} = 4\sqrt{4} = 4.2 = 8$

Uebungsbeispiele: | **Resultate:** | **Andeutungen:**

29). $(18\sqrt{-30}+36\sqrt{50}-54\sqrt{70}):-9\sqrt{-10}$

$= \left(18i\sqrt{30}+36\sqrt{50}-54\sqrt{70}\right):-9i\sqrt{10}$. . . nunmehr beachte man die Erkl. 36, Seite 26.

$= -2\sqrt{3}-\frac{4\sqrt{5}}{i}+\frac{6\sqrt{7}}{i} = -2\sqrt{3}-\frac{4\sqrt{5}.i}{i^2}+\frac{6\sqrt{7}.i}{i^2}$

$= -2\sqrt{3}-\frac{4\sqrt{-5}}{-1}+\frac{6\sqrt{-7}}{-1} = -2\sqrt{3}+4\sqrt{-5}-6\sqrt{-7}$

30). $\frac{7}{2-\sqrt{-3}} = \frac{7(2+\sqrt{-3})}{(2-\sqrt{-3})(2+\sqrt{-3})}$ man beachte den im Zusatz 2, Seite 242, angeführten 2. Fall.

$= \frac{7(2+\sqrt{-3})}{4-(\sqrt{-3})^2} = \frac{7(2+\sqrt{-3})}{4-(-3)}$

$= \frac{7(2+\sqrt{-3})}{7} = 2+\sqrt{-3}$

31). $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{-b})(\sqrt{a}+\sqrt{-b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{-b})(\sqrt{a}+\sqrt{-b})}$

$= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{-b})^2}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{-b})^2} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{-b})^2}{a+b}$

32). $\frac{4\sqrt{-3}-2\sqrt{-5}}{3\sqrt{-4}-4\sqrt{-2}} = \frac{(4\sqrt{-3}-2\sqrt{-5}).(3\sqrt{-4}+4\sqrt{-2})}{(3\sqrt{-4}-4\sqrt{-2}).(3\sqrt{-4}+4\sqrt{-2})}$

$= \frac{12i^2\sqrt{12}-6i^2\sqrt{20}+16i^2\sqrt{6}-8i^2\sqrt{10}}{(3\sqrt{-4})^2-(4\sqrt{-2})^2}$

$= \frac{24i^2\sqrt{3}-12i^2\sqrt{5}+16i^2\sqrt{6}-8i^2\sqrt{10}}{9\cdot-4-4\cdot-2 \quad (=-36+8)}$ man beachte, dass $i^2 = -1$ ist.

$= \frac{-24\sqrt{3}+12\sqrt{5}-16\sqrt{6}+8\sqrt{10}}{-28}$. . diesen Quotienten kann man noch durch: -4 heben.

$= (6\sqrt{3}-3\sqrt{5}+4\sqrt{6}-2\sqrt{10}):7$

33). $\sqrt{-a+2\sqrt{ab}-b} = \sqrt{-a}-\sqrt{-b}$ *) man verfahre nach der auf Seite 259 aufgestellten Regel 1.

$-a$
$+$
$2\sqrt{-a} \,|\, 2\sqrt{ab}-b$
$2\sqrt{ab}-b$
$-\qquad +$
. .

*). Man beachte, dass:

$\frac{2\sqrt{ab}}{2\sqrt{-a}} = \frac{\sqrt{ab}}{i\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b}}{i} = \frac{\sqrt{b}.i}{i^2} = \frac{\sqrt{-b}}{-1} = -\sqrt{-b}$ ist.

34). $\sqrt[3]{x^3-3x^2\sqrt{-2}-6x+2\sqrt{-2}} = \underbrace{x}_{a}-\underbrace{\sqrt{-2}}_{b}$. . . man verfahre nach der auf Seite 293 aufgestellten Regel 8.

$(a^3=)\ \pm x^3$
$(3a^2=)\ 3x^2 \,|\, -3x^2\sqrt{-2}-6x+2\sqrt{-2}$
$-3x^2\sqrt{-2}-6x+2\sqrt{-2}$ $(=3a^2b+3.ab^2+b^3 = 3x^2.-\sqrt{-2}+3.x.(-\sqrt{-2})^2+(-\sqrt{-2})^3)$
$+\qquad +\qquad -$
. . .

Uebungsbeispiele:	**Resultate:**	**Andeutungen:**
35). $\sqrt{-25} = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	analog dem gelösten Beispiel 1.
36). $\sqrt[4]{-81} = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	„ „ „ „ 2.
37). $\sqrt{-48} = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	„ „ „ „ 3.
38) $5\sqrt{-72} = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	„ „ „ „ 4.
39). $\sqrt{-m^{12}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	„ „ „ „ 5.
40). $\sqrt[4]{-a^{16}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	„ „ „ „ 6.
41). $\sqrt{-x^2y^2z} = \ldots\ldots\ldots\ldots$	?	„ „ „ „ 7.
42). $\sqrt{-16}+\sqrt{-25}-\sqrt{-81} = \ldots$	?	„ „ „ „ 8.
43). $7\sqrt{-16}+\sqrt{-1}-5\sqrt{-25}-6\sqrt{-1} =$	?	
44). $3\sqrt{-81}-4\sqrt{-49}+7\sqrt{-64} = \ldots$	?	„ „ „ „ 9.
45). $2\sqrt{-1}-3\sqrt{-2}+2\sqrt{-6}-7\sqrt{-9} =$	?	
46). $\sqrt{-xy^3}+\sqrt{-x^3y}-\sqrt{-\frac{x}{y}}+\sqrt{-\frac{y}{x}} =$	?	„ „ „ „ 10.
47). $\sqrt{-m}\cdot\sqrt{-m} = \ldots\ldots\ldots$	?	„ „ „ „ 11.
48). $\sqrt{-m}\cdot\sqrt{-n} = \ldots\ldots\ldots$	?	„ „ „ „ 12.
49). $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-27} = \ldots\ldots\ldots$	?	„ „ „ „ 13.
50). $\sqrt{-5}\cdot-\sqrt{20} = \ldots\ldots\ldots$	?	
51). $3\sqrt{-3}\cdot4\sqrt{-7} = \ldots\ldots\ldots$	?	„ „ „ „ 14.
52). $2\sqrt{-6}\cdot-3\sqrt{5} = \ldots\ldots\ldots$	?	
53). $-3\sqrt{-5}\cdot-7\sqrt{-5} = \ldots\ldots$	?	
54). $\sqrt{7}\cdot\sqrt{-7} = \ldots\ldots\ldots$	?	„ „ „ „ 15.
55). $3\sqrt{-3}\cdot2\sqrt{3} = \ldots\ldots\ldots$	?	
56). $-5\sqrt{-2}\cdot3\sqrt{-2} = \ldots\ldots$	?	
57). $4\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}-3\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-1\frac{2}{9}} =$	?	
58). $\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-xy^2} = \ldots\ldots\ldots$	?	„ „ „ „ 16.
59). $\sqrt{-m}\cdot\sqrt{-4m} = \ldots\ldots\ldots$	?	
60). $\sqrt{-x}\cdot\sqrt{\frac{y^2}{x}} = \ldots\ldots\ldots$	?	
61). $x^2y^2\sqrt{-x^{-5}y^{-1}}\cdot\sqrt{-x^9y^5} = .$	?	
62). $i^{20}-i^{30}+i^{40}-i^{50}+i^{60}-i^{70} = .$	?	„ „ „ „ 17.
63). $(\sqrt{-1})^8-3(\sqrt{-1})^7+4(\sqrt{-1})^{11}-(\sqrt{-1})^{53} =$	?	
64) $(\sqrt{-a})^8-4(\sqrt{-a})^3-5(\sqrt{-a})^{13}+(\sqrt{-a})^{17}-10(\sqrt{-a})^{31} =$	?	

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
65). $(5\sqrt{-2}-7\sqrt{-3}-4\sqrt{-6})\cdot 3\sqrt{-3} = ?$		. analog dem gelösten Beispiel 18.
66). $(7\sqrt{-3}-3\sqrt{-6})\cdot(4\sqrt{-3}+3\sqrt{-6}) = ?$		
67). $(1-2\sqrt{-3})\cdot(4-5\sqrt{-6}) = \;.\;.\;?$		
68). $(4+\sqrt{3})\cdot(4-\sqrt{-3}) = \;.\;.\;.\;.\;?$		. . . „ „ „ „ 19.
69). $(a+\sqrt{-b})\cdot(a-\sqrt{-b}) = \;.\;.\;.\;?$		
70). $(a+bi)\cdot(a-bi) = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$		
71). $(\sqrt{-x^3y^5}+\sqrt{-x^2y^5})\cdot(\sqrt{-x^3y^5}-\sqrt{-x^2y^5}) = ?$		
72). $(\sqrt{-6}+\sqrt{-8})\cdot(\sqrt{-6}-\sqrt{-8}) = \;.\;.\;.\;.\;?$		
73). $(3\sqrt{-6}-2\sqrt{-8})\cdot(3\sqrt{-6}+2\sqrt{-8}) = \;.\;?$		
74). $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-7}-\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-8}\cdot\sqrt{-10} = ?$		analog dem gelösten Beispiel 22.
75). $\sqrt{-x^2y}\cdot-\sqrt{-xy^2}\cdot-\sqrt{x^2y^3}\cdot\sqrt{-x^3y^4} = \;.\;.\;?$		
76). $(3-2\sqrt{-5})^2 = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$		. . . analog dem gelösten Beispiel 23.
77). $(\sqrt{-2}-\sqrt{-7})^2 = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$		
78). $(-2\sqrt{-2}+3\sqrt{-3})^2 = \;.\;.\;.\;.\;?$		
79). $(2-3\sqrt{-3})^3 = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$		. . . „ „ „ „ 24.
80). $(2\sqrt{-3}-3\sqrt{-2})^3 = \;.\;.\;.\;.\;?$		
81). $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3 = \;.\;.\;.\;.\;?$		
82). $\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3 = \;.\;.\;.\;.\;.\;?$		
83). $(\sqrt{-1}+\sqrt{-2})^4 = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$		
84). $\dfrac{a^2}{\sqrt{-a^2}} = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$		. . . „ „ „ „ 25.
85). $\dfrac{16\sqrt{-16}}{3\sqrt{3}} = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$		
86). $\dfrac{1}{\sqrt{-1}} = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$		
87). $8:3\sqrt{-2} = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$		
88). $1:i^5 = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$		. . . man multipliziere Divisor und Dividend mit einer solchen Potenz von i, dass der Divisor, welcher eine Wurzel vorstellt, **rational** wird.
89). $\dfrac{\sqrt{-a^2}}{\sqrt{a}} = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$		. . . analog dem gelösten Beispiel 26.
90). $\sqrt{-24}:\sqrt{6} = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$		
91). $\dfrac{\sqrt{-36}}{\sqrt{18}} = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;?$		

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
92). $\dfrac{\sqrt{-x^2}}{\sqrt{-y^2}} = \ldots\ldots\ldots$	?	analog dem gelösten Beispiel 27.
93). $36\sqrt{-6} : 12\sqrt{-3} = \ldots\ldots$	?	
94). $(2\sqrt{6} - 4\sqrt{-12}) : \sqrt{-2} = \ldots$	?	„ „ „ „ 29.
95). $(3\sqrt{-4} - 4\sqrt{-12} - \sqrt{6} + 5) : -3\sqrt{-2} =$	?	
96). $(\sqrt{x} + \sqrt{-y} - \sqrt{z}) : \sqrt{-1} = \ldots$	?	
97). $\dfrac{1}{2 - \sqrt{-2}} = \ldots\ldots\ldots$	?	„ „ „ „ 30.
98). $\dfrac{\sqrt{-3} - \sqrt{-2}}{3 + \sqrt{-2}} = \ldots\ldots$	?	
99). $(2 - 3\sqrt{-5}) : (2\sqrt{-5} - 3\sqrt{-2}) =$	?	
100). $\dfrac{24\sqrt{-2}}{2\sqrt{-3} + 3\sqrt{-2}} = \ldots\ldots$	?	
101). $\dfrac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{-b}} = \ldots\ldots\ldots$	?	
102). $(3\sqrt{-3} - 2\sqrt{8}) : (4\sqrt{8} - 3\sqrt{-3}) =$	?	
103). $\dfrac{\sqrt{8} - 2}{\sqrt{-2} - \sqrt{-4}} = \ldots\ldots$	?	
104). $\dfrac{1 - 2\sqrt{-3}}{3 - \sqrt{-2} - \sqrt{-3}} = \ldots\ldots$	?	man wiederhole das in den vorhergehenden Beispielen angewandte Verfahren.
105). $\sqrt{m^2 - 2mn\sqrt{-x} - n^2x} = \ldots$	?	analog dem gelösten Beispiel 33.
106). $\sqrt{-a - 2\sqrt{ab} - b} = \ldots\ldots$	?	
107). $\sqrt[3]{-a^3 - 3a^2\sqrt{-b} - 3ab + b\sqrt{-b}} =$	?	„ „ „ „ 34.
108). $\sqrt[3]{27a^3 + 27a^2\sqrt{-1} - 9a - \sqrt{-1}} =$	?	

B. Das Potenzieren mit gebrochenen Exponenten.

In dem Kapitel: „Die Potenzen“, wurde gezeigt, wie man mit Potenzen, deren Exponenten ganze positive oder negative Zahlen sind, zu rechnen hat.

Da nun die Radizierung einer Potenz dadurch ausgeführt wird, indem man mit dem Wurzelexponenten in den Potenzexponenten dividiert, hierbei der Fall vorkommen kann, dass der Wurzelexponent in den Potenzexponenten nicht ohne Rest aufgeht (man siehe den 2. Fall des Lehrsatzes 11, Seite 206), so

führt die Radizierung von Potenzen auf eine neue Art von Potenzen, nämlich auf die sogenannten „**Bruchpotenzen,**“ d. s. Potenzen, deren Exponenten Brüche sind — und es ist Aufgabe dieses Abschnitts zu zeigen, wie man mit solchen Potenzen rechnen muss. Bei der Rechnung mit Bruchpotenzen merke man sich nachstehende Lehrsätze, Erklärungen etc.

Lehrsatz 27. Jede Potenz mit gebrochenem Exponenten ist gleich einer Wurzel, welche den Nenner des gebrochenen Exponenten zum Wurzelexponenten hat und deren Radikand gleich der Potenz ist, welche mit der gegebenen Potenz gleiche Basis hat und deren Exponent gleich dem Zähler des gebrochenen Exponenten ist.

Vorauss. Gegeben sei: $a^{\frac{m}{n}}$

Behaupt. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Beweis. Der Beweis der Richtigkeit vorstehender Behauptung ergiebt sich direkt aus der Entstehung einer Bruchpotenz, denn vorhin wurde gesagt: eine Bruchpotenz entsteht, wenn man aus einer Potenz die Wurzel zu ziehen hat und dies dadurch andeutet, indem man mit dem Wurzelexponenten in den Potenzexponenten dividiert und diese Division in ihrer angedeuteten Form, mag sie ohne Rest aufgehen oder nicht, stehen lässt.

Zusatz 1. Für eine Potenz mit gebrochenem negativem Exponenten gilt vorstehender Lehrsatz auch, denn hat man z. B.: $a^{-\frac{m}{n}}$, so kann man

$$a^{-\frac{m}{n}} = a^{\frac{-m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}} \text{ oder:}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}} \text{ setzen.}$$

Da sich ferner hieraus ergibt, dass:

$$1). \; a^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

mithin auch:

$$2). \; a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \text{ ist, so erhält man}$$

den Satz:

„Eine Potenz mit gebrochenem negativen Exponenten ist gleich dem reciproken Wert derselben Potenz aber mit positivem Exponenten.“

Zusatz 2. Mit vorstehendem Lehrsatz und dessem Zusatz 1 ist die Bedeutung der Symbole:

$$a^{\frac{m}{n}} \text{ und}$$

$$a^{-\frac{m}{n}}$$

auf den in Antwort der Frage 1, Seite 1 gegebenen Potenzbegriff, bezw. auf den in Antwort der Frage 2, Seite 173, gegebenen Wurzelbegriff zurückgeführt, indem hiernach z. B.: $a^{\frac{3}{5}}$, oder

a soll in die **drei fünftelte** Potenz erhoben (mit $\frac{3}{5}$ potenziert) werden,

nichts anderes heisst, als: *a* soll in die 3^te^ Potenz erhoben und diese Potenz soll durch 5 radiziert werden.

Ferner heisst hiernach, z. B.: $a^{-\frac{3}{4}}$ oder *a* soll in die **minus drei viertelte** Potenz erhoben werden, nichts anderes, als: *a* soll in die 3^te^ Potenz erhoben, diese Potenz soll durch 4 radiziert und schliesslich soll diese somit erhaltene Wurzel in „Eins" dividiert werden.

Zusatz 3. Der Begriff „**Potenz**" ist mittelst vorstehendem Lehrsatz und dessem Zusatz 1 nunmehr dahin erweitert, dass die Exponenten nicht allein ganze positive und negative (auch die Zahl Null), sondern auch **gebrochene positive und negative** Zahlen sein können.

Zusatz 4. Potenzen mit gebrochenen Exponenten sind mehrdeutig, da sie durch Radizierung entstanden gedacht werden können (man siehe die Erkl. 27, Seite 187).

Lehrsatz 28. Die für ganze positive und negative Exponenten aufgestellten Lehrsätze: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, Seite 9—41, und Lehrsatz 22, Seite 135, gelten auch für Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Vorauss. *a*, *b*, *m*, *n*, *p* und *q* seien von Null verschiedene endliche Zahlen.

Behaupt. 1). a). $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$

b). $a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$

(Lehrsatz 6, Seite 15) Umkehr.: $a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}}$; $a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}}$

2). a). $a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{m}{n}}$

b). $a^{-\frac{m}{n}} \cdot b^{-\frac{m}{n}} = (a \cdot b)^{-\frac{m}{n}}$

(Lehrsatz 7, Seite 16) Umkehr.: $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$; $(ab)^{-\frac{m}{n}} = a^{-\frac{m}{n}} \cdot b^{-\frac{m}{n}}$

(Lehrsatz 4, Seite 9)

3). a). $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$

b). $a^{-\frac{m}{n}} : a^{-\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n}-(-\frac{p}{q})}$

(Lehrsatz 8, Seite 22) Umkehr.: $a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}}$; $a^{-\frac{m}{n}-(-\frac{p}{q})} = a^{-\frac{m}{n}} : a^{-\frac{p}{q}}$

4). a). $a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$

b). $a^{-\frac{m}{n}} : b^{-\frac{m}{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{m}{n}}$

(Lehrsatz 9, Seite 24) Umkehr.: $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{m}{n}} = a^{-\frac{m}{n}} : b^{-\frac{m}{n}}$

(Lehrsatz 5, Seite 10)

5). a). $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{m}{n}} = 1$ (Lehrsatz 10, Seite 25)

b). $a^{-\frac{m}{n}} : a^{-\frac{m}{n}} = 1$ „ „ „ „

6). a). $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$

b). $\left(a^{-\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$

(Lehrs. 11, Seite 41) Umkehr.: $a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}}$; $a^{-\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}} = \left(a^{-\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}$

u. s. f.

Beweis. 1). a). $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} =$

$a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$ (siehe die Lehrsätze 27 u. 18 dieses Kapitels).

b). analog wie a)., indem man nach dem Zusatz 1 des Lehrsatzes 27:

$a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^{-m}} \cdot \sqrt[q]{a^{-p}}$ setzt.

2). a). $a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^m \cdot b^m} = \sqrt[n]{(ab)^m} = (ab)^{\frac{m}{n}}$

b). analog wie a)., indem man: $a^{-\frac{m}{n}} \cdot b^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}} \cdot \sqrt[n]{b^{-m}}$ setzt.

3). a). $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} : a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} =$

$a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$

b). analog wie a).

4). a). $a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^m : b^m} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$

b). analog wie a).

$$5).\ldots a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[n]{a^m} = 1$$ (nach dem Lehrsatz 19, Seite 240)

$$6).\ a).\ \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} =$$

$$\sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$$ (siehe die Lehrsätze 26, 13, 12 dieses Kapitels)

b). analog wie a).

Zusatz 1. Da nach dem vorstehenden Lehrsatze die in dem Kapitel: „Die Potenzen“ für ganze positive und negative aufgestellten Lehrsätze 1, 3 bis incl. 11 nunmehr allgemein für beliebige **ganze und gebrochene, positive und negative** endliche Exponenten gelten, so lassen sich jene Sätze nunmehr in ihrer allgemeinsten Form fassen. — Dem Studierenden bleibt es überlassen, dies zur Uebung auszuführen.

Erkl. 93. Hat man algebraische Summen, deren Glieder Potenzen mit negativen Exponenten und Wurzeln etc. enthalten, zu ordnen, so ist es vorteilhaft, wenn man zuerst die Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten schreibt und die Potenzen, welche in etwaigen Nennern stehen, in die betreffenden Zähler setzt.

Aufgabe 48. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen angedeuteten Operationen mittelst des vorstehenden Lehrsatzes 28 ausführen, alsdann die in den erhaltenen Resultaten noch vorkommenden **Bruchpotenzen** mittelst des Lehrsatzes 27 beseitigen, auch nach früheren Sätzen die negativen Potenzexponenten wegbringen und bei vorkommenden Radizierungen den Zusatz 4, Seite 201, beachten.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $x^{\frac{4}{5}} = \ldots\ldots\ldots\ldots \sqrt[5]{x^4}$ man beachte den Lehrsatz 27.

2). $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25^1} = \sqrt{25} = \ldots\ldots \pm 5$

3). $(x^2 - y^2)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(x^2-y^2)^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{(x^2-y^2)^2}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{(x^2-y^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2-y^2)^2}}$

man beachte den Zusatz 1 des Lehrs. 27.

Uebungsbeispiele: | **Resultate:** | **Andeutungen:**

4). $\left(3\frac{1}{16}\right)^{-2\frac{1}{2}} = \left(\frac{49}{16}\right)^{-\frac{5}{2}} = \left(\frac{16}{49}\right)^{+\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{\left(\frac{16}{49}\right)^5}$. . . man benutze den im Zusatz 1 des Lehrsatzes 27 aufgestellten Satz.

$$= \left(\sqrt[2]{\frac{16}{49}}\right)^5 = \left(\frac{4}{7}\right)^5$$

5). $m^{\frac{1}{2}}.m^{\frac{2}{3}}.m^{\frac{1}{3}} = m^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = m^{\frac{9}{6}} = m^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{m^3}$. . . man beachte den Lehrsatz 6, S. 15 und vorstehenden Zusatz 1

$$= m\sqrt{m}$$

6). $a^{\frac{2}{3}}.\sqrt[3]{a^{-5}}.a^{-\frac{1}{2}}.a^0.\sqrt{a^3} = a^{\frac{2}{3}}.a^{-\frac{5}{3}}.a^{-\frac{1}{2}}.a^0.a^{\frac{3}{2}}$

$$= a^{\frac{2}{3}-\frac{5}{3}-\frac{1}{2}+0+\frac{3}{2}} = a^{\frac{13}{6}-\frac{13}{6}} = a^0 = 1$$

7). $5^{\frac{2}{3}}.5^{-\frac{1}{2}}.5^0.\sqrt[3]{5^4} = 5^{\frac{2}{3}}.5^{-\frac{1}{2}}.5^0.5^{\frac{4}{3}} = 5^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+0+\frac{4}{3}}$

$$= 5^{2-\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{5^3} = \sqrt{5^2.5} = 5\sqrt{5}$$

8). $\left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{4}}\right).\left(x^{\frac{1}{6}} - x^{-\frac{2}{5}} - x\right) =$ man beachte die Erkl. 33, Seite 16.

$$= x^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} - x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{6}} - x^{-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}} + x^{\frac{3}{4}-\frac{2}{5}} - x^{-\frac{1}{2}+1} + x^{\frac{3}{4}+1}$$

$$= x^{-\frac{1}{3}} - x^{\frac{11}{12}} - x^{-\frac{9}{10}} + x^{\frac{7}{20}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{7}{4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt[12]{x^{11}} - \frac{1}{\sqrt[10]{x^9}} + \sqrt[20]{x^7} - \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^7}$$

9). $a^{\frac{4}{5}}:a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}} = a^{\frac{12}{15}-\frac{10}{15}} = a^{\frac{2}{15}} = \sqrt[15]{a^2}$ man beachte den Lehrsatz 8, S. 22, und vorstehenden Zusatz 1.

10). $\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^{-5}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{-\frac{5}{3}}} = a^{\frac{1}{3}-(-\frac{5}{3})} = a^{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$

11). $a^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{2}} = (ab)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{ab}$ man beachte den Lehrsatz 7, S. 16, und den vorstehenden Zusatz 1.

12). $2a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}.3a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{4}} = 6a^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}-\frac{2}{4}} = 6.a^0.b^{\frac{1}{4}} = 6\sqrt[4]{b}$

13). $\frac{x^{-\frac{2}{5}}}{\sqrt[5]{y^{-2}}} = \frac{x^{-\frac{2}{5}}}{y^{-\frac{2}{5}}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{2}{5}} = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{y}{x}\right)^2}$. . . man beachte den Lehrsatz 9, S. 24, und den vorstehenden Zusatz 1.

14). $\frac{x^{\frac{4}{5}}.y^{\frac{1}{4}}}{z^{-\frac{1}{3}}} : \frac{z^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{5}}y^{-\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{4}{5}}.y^{\frac{1}{4}}.x^{\frac{1}{5}}.y^{-\frac{1}{2}}}{z^{-\frac{1}{3}}.z^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}}y^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}}{z^{-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}} =$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

$$\frac{x^{\frac{5}{5}}\,y^{-\frac{1}{4}}}{z^{\frac{1}{3}}} = \frac{x}{z^{\frac{1}{3}}\,.\,y^{\frac{1}{4}}} = \frac{x}{\sqrt[3]{z}\,.\,\sqrt[4]{y}}$$. . . nun könnte man noch den Nenner **rational** machen und die Wurzeln multiplizieren.

15). $\left(m^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = m^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} = m^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{m}$ man beachte den Lehrsatz 11, S. 41, und den vorstehenden Zusatz 1.

16). $\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{6}} = x^{-\frac{2}{3}\cdot-\frac{3}{6}} = x^{+\frac{6}{18}} = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$

17). $3\left(a^{-1\frac{3}{11}}\right)^{-1\frac{4}{7}} = 3\left(a^{-\frac{14}{11}}\right)^{-\frac{11}{7}} = 3a^{-\frac{14}{11}\cdot-\frac{11}{7}} = 3a^{\frac{14\,.\,11}{11\,.\,7}} = 3a^2$

18). $$\left(\frac{64a^{-10}b^{-2}}{49c^{-4}x^6}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{64^{\frac{3}{2}}\,.\,a^{-10\cdot\frac{3}{2}}\,.\,b^{-2\cdot\frac{3}{2}}}{49^{\frac{3}{2}}\,.\,c^{-4\cdot\frac{3}{2}}\,.\,x^{6\cdot\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt[2]{64^3}\,.\,a^{-15}\,.\,b^{-3}}{\sqrt[2]{49^3}\,.\,c^{-6}\,.\,x^9}$$

$$= \frac{8^3\,.\,c^6}{7^3\,a^{15}\,b^3\,x^9} = \frac{512\,c^6}{343\,a^{15}\,b^3\,x^9}$$

19). $$\left(\left(\frac{(a-b)^{\frac{2}{3}}(c-d)^{-\frac{1}{5}}}{x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{3}}}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{(a-b)^{\frac{2}{3}}\,.\,(c-d)^{-\frac{1}{5}}}{x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{3}}}\right)^{-\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}}$$ nun wird zunächst der in dem Zusatz 1, Seite 339, angeführte Satz benutzt.

$$= \left(\frac{x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{3}}}{(a-b)^{\frac{2}{3}}(c-d)^{-\frac{1}{5}}}\right)^{+\frac{5}{3}} = \frac{x^{\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}}\,.\,y^{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3}}}{(a-b)^{\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}}\,.\,(c-d)^{-\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{3}}}$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{5}{9}}}{(a-b)^{\frac{10}{9}}\,.\,(c-d)^{-\frac{1}{3}}} = \frac{x^{\frac{2}{3}}\,.\,y^{\frac{5}{9}}\,.\,(c-d)^{\frac{1}{3}}}{(a-b)^{\frac{10}{9}}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2}\,.\,\sqrt[9]{y^5}\,.\,\sqrt[3]{c-d}}{\sqrt[9]{(a-b)^{10}}} = \sqrt[3]{x^2(c-d)}\cdot\sqrt[9]{\frac{y^5}{(a-b)^{10}}}$$

20). $\left(x^{\frac{3}{5}}+y^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{3}{5}}-y^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(x^{\frac{3}{5}}\right)^2 - \left(y^{-\frac{1}{2}}\right)^2$ man beachte den Lehrsatz 17, S. 70.

$$= x^{\frac{6}{5}} - y^{-1} = \sqrt[5]{x^6} - \frac{1}{y}$$

21). $\left(a^{-\frac{1}{4}} - b^{\frac{5}{6}}\right)^2 = \left(a^{-\frac{1}{4}}\right)^2 - 2\,.\,a^{-\frac{1}{4}}\,.\,b^{\frac{5}{6}} + \left(b^{\frac{5}{6}}\right)^2$ man beachte den Lehrsatz 12, S. 46.

$$= a^{-\frac{1}{2}} - 2\cdot\frac{b^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{1}{4}}} + b^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{\sqrt{a}} - 2\cdot\frac{\sqrt[6]{b^5}}{\sqrt[4]{a}} + \sqrt[3]{b^5}$$ man könnte nunmehr noch die Nenner **rational** machen.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

22). $\left(2a^{\frac{1}{8}}b^{-\frac{4}{5}} - 6a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{5}} - 18a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}\right) : 2a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}$. . . man beachte die Erkl. 36, Seite 26.

$$= a^{\frac{1}{8}-\left(-\frac{1}{2}\right)}b^{-\frac{4}{5}-\left(-\frac{1}{2}\right)} - 3a^{\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)}b^{\frac{2}{5}-\left(-\frac{1}{2}\right)} - 9a^{-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}b^{-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= a^{\frac{1}{8}+\frac{1}{2}}b^{-\frac{4}{5}+\frac{1}{2}} - 3a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}} - 9a^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$

$$= a^{\frac{5}{8}}b^{-\frac{3}{10}} - 3a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{9}{10}} - 9a^0b^0 = \frac{\sqrt[8]{a^5}}{\sqrt[10]{b^3}} - 3\sqrt[6]{a^7}\cdot\sqrt[10]{b^9} - 9$$

23). $\left(2a - 3a^{\frac{1}{2}} - 6 + 18a^{-\frac{1}{2}} - 9a^{-1}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - 3 + 3a^{-\frac{1}{2}}\right)$

$$= 2a^{\frac{1}{2}} + 3 - \frac{3}{a^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 2\sqrt{a} + 3 - \frac{3}{\sqrt{a}}$$

$$= 2\sqrt{a} + 3 - \frac{3\,.\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2}$$

$$= 2\sqrt{a} + 3 - \frac{3}{a}\sqrt{a}$$

. . . Um die in diesem Beispiel angedeutete **Partialdivision** (Division **zusammengesetzter** Grössen) ausführen zu können, muss man zunächst nach der Erkl 37, Seite 27, **alphabetisch,** bezw. nach **Potenzen einer und derselben** Grösse, in diesem Beispiel nach Potenzen von a ordnen. Da nun p o s i t i v e, n e g a t i v e, g a n z e und g e b r o c h e n e Potenzen (auch die Potenz a^0) vorkommt, so beachte man, dass man diese Potenzen so zu ordnen hat, wie die Exponenten derselben in der natürlichen Zahlenreihe aufeinanderfolgen.

Denkt man sich den in vorstehender Division vorkommenden Zahlen 6 und 3 die Potenz: a^0 ($= 1$) beigeschrieben, so sind die Exponenten des Dividenden, der Reihe nach:

$$1,\ +\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2},\ -1$$

die des Divisors:

$$+\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}$$

Dividend und Divisor sind demnach bereits geordnet und man erhält:

Dividend | Divisor

$$\begin{array}{l|l}
2a - 3a^{\frac{1}{2}} - 6 + 18a^{-\frac{1}{2}} - 9a^{-1} & a^{\frac{1}{2}} - 3 + 3a^{-\frac{1}{2}} \\
\underline{2a - 6a^{\frac{1}{2}} + 6}\ ^{2)} \quad (- \ + \ -) & \overset{1)}{2a^{\frac{1}{2}} + 3 - \frac{3}{a^{\frac{1}{2}}}} \ \text{(Quotient)} \\
\quad 3a^{\frac{1}{2}} - 12 + 18a^{-\frac{1}{2}} - 9a^{-1} & \\
\quad \underline{3a^{\frac{1}{2}} - 9 + 9a^{-\frac{1}{2}}} \quad (- \ + \ -) & \\
\qquad -3 + 9a^{-\frac{1}{2}} - 9a^{-1} & \\
\qquad \underline{-3 + 9a^{-\frac{1}{2}} - 9a^{-1}}\ ^{3)} \quad (+ \ - \ +) & \\
\qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot &
\end{array}$$

Quotient

[1]). $\frac{2a}{a^{\frac{1}{2}}} = 2a^{1-\frac{1}{2}} = 2a^{\frac{1}{2}}$

[2]). $3a^{-\frac{1}{2}}.2a^{\frac{1}{2}} = 6a^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 6a^0 = 6$

[3]). $3a^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{3}{a^{\frac{1}{2}}} = 3a^{-\frac{1}{2}}.3a^{-\frac{1}{2}}$

$$= 9a^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 9a^{-1}$$

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:

24). $\sqrt{m^{\frac{8}{9}} - 2m^{\frac{1}{63}} + m^{-\frac{6}{7}}} = m^{\frac{4}{9}} - m^{-\frac{3}{7}}$ Nach der Regel 1, Seite 259, und nachdem man, wie in der vorhergehenden Division, untersucht hat ob geordnet ist, erhält man:

$$= \sqrt[9]{m^4} - \frac{1}{\sqrt[7]{m^3}}$$

$$\sqrt{m^{\frac{8}{9}} - 2m^{\frac{1}{63}} + m^{-\frac{6}{7}}} = \underbrace{m^{\frac{4}{9}}}_{a}{}^{1)} - \underbrace{m^{-\frac{3}{7}}}_{b}{}^{2)}$$

$$(a^2 =) \quad \pm m^{\frac{8}{9}}$$

$$(2a =) \quad 2m^{\frac{4}{9}} \,\Big|\, -2m^{\frac{1}{63}} + m^{-\frac{6}{7}}$$

$$-2m^{\frac{1}{63}} + m^{-\frac{6}{7}} \quad (= 2ab + b^2)$$

$$+ \qquad -$$

$$\cdot \qquad \cdot$$

1). $\sqrt{m^{\frac{8}{9}}} = m^{\frac{8}{9\cdot 2}} = m^{\frac{4}{9}}$

2). $\dfrac{-2m^{\frac{1}{63}}}{2m^{\frac{4}{9}}} = -m^{\frac{1}{63}-\frac{4}{9}} = -m^{\frac{1}{63}-\frac{28}{63}}$

$= -m^{-\frac{27}{63}} = -m^{-\frac{3}{7}}$

25). $m^{\frac{4}{7}} =$? . . . analog dem gelösten Beispiel 1.

26). $x^{\frac{1}{5}} =$?

27). $(a-b)^{\frac{2}{3}} =$?

28). $84^{\frac{1}{2}} =$? . . . „ „ „ „ 2.

29). $8^{\frac{1}{3}} =$?

30). $16^{\frac{1}{4}} =$?

31). $27^{\frac{2}{3}} =$?

32). $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} =$?

33). $m^{-\frac{4}{5}} =$? . . . „ „ „ „ 3.

34). $x^{-2\frac{1}{3}} =$?

35). $(m-n)^{-\frac{6}{5}} =$?

36). $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} =$?

37). $16^{\frac{1}{2}} - 8^{\frac{1}{3}} + 27^{\frac{2}{3}} - 100^{0,5} =$?

38). $\left(1\frac{24}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} =$? . . . „ „ „ „ .

39). $\left(5\frac{2}{5}\right)^{-2\frac{1}{3}} =$?

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
40). $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{2}} = \ldots\ldots\ldots$	?	. . . analog dem gelösten Beispiel 5.
41). $2m^{-\frac{2}{3}} \cdot 3m^{-\frac{1}{2}} \cdot 2m^{\frac{4}{3}} = \ldots\ldots$	?	
42). $5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{7}{4}} + 9^{-1\frac{2}{3}} \cdot 9^{\frac{2}{3}} \cdot 9 = \ldots\ldots$	?	
43). $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{c}{d}} = \ldots\ldots\ldots$	?	
44). $m^{-\frac{a}{b}} \cdot m^{-\frac{e}{f}} \cdot m^{\frac{c}{d}} = \ldots\ldots$	?	
45). $a^0 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a} = \ldots\ldots$	?	. . . „ „ „ „ 6.
46). $x^{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[5]{x^3} \cdot x^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[5]{x^{-3}} \cdot x^{-\frac{5}{6}} \cdot \sqrt[6]{x^{-1}} =$	?	
47). $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{2^5} \cdot 2^0 \cdot 2^{-\frac{4}{7}} \cdot \sqrt[6]{2^{-9}} = \ldots$	?	. . . „ „ „ „ 7.
48). $\left(a^{-2} - a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{4}{5}}\right) \cdot \left(a^{-\frac{1}{3}} - a^{-\frac{5}{6}}\right) =$	?	. . . „ „ „ „ 8.
49). $x^{\frac{1}{3}} : x^{\frac{1}{4}} = \ldots\ldots\ldots$	?	. . . „ „ „ „ 9.
50). $n^{\frac{2}{8}} : n^{-\frac{1}{2}} = \ldots\ldots\ldots$	?	
51). $3a^{-\frac{3}{4}} : 5a^{-\frac{5}{6}} = \ldots\ldots$	?	
52). $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{a^{-1}}} \ldots\ldots\ldots$	?	
53). $x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} \cdot z^{\frac{1}{2}} = \ldots\ldots\ldots$	?	. . . „ „ „ „ 11.
54). $a^{-\frac{2}{5}} \cdot b^{-\frac{2}{5}} = \ldots\ldots\ldots$	?	
55). $a^{-\frac{3}{4}} b^{-1} c^2 \cdot a^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{2}{3}} \cdot a^{-1} \cdot b^1 \cdot b^{-\frac{1}{2}} =$	?	
56). $\left(1\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot \left(1\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \ldots$	?	. . . man beachte, dass man Potenzen mit **gleichen** Exponenten zu multiplizieren hat.
57). $a^{\frac{2}{3}} : b^{\frac{2}{3}} = \ldots\ldots\ldots$	?	. . . analog dem gelösten Beispiel 13.
58). $\dfrac{x^{-\frac{1}{5}}}{y^{-\frac{1}{5}}} = \ldots\ldots\ldots$	?	
59). $4ab^{\frac{1}{3}}c^{-\frac{1}{4}} : 2a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}e^{-\frac{3}{4}} = \ldots$	?	

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

60). $\left(\frac{a^3 . x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{3}}}{c^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{-1} x^{-\frac{2}{5}} y^{\frac{1}{5}}}{c^{-\frac{4}{5}}}\right) \cdot \left(\frac{c^{\frac{1}{2}}}{a^3 y^{-\frac{1}{3}}} - \frac{c^{-\frac{3}{5}}}{x^{\frac{2}{3}} y^{-\frac{4}{5}}}\right) = ?$. . man beachte zuerst die Erkl. 33, Seite 16.

61). $\frac{a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{6}}}{c^{1\frac{1}{2}}} : \frac{a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{2}{3}}}{c^{-\frac{1}{3}}} =$? . . . analog dem gelösten Beispiel 14.

62). $\left(x\frac{2}{7}\right)^{\frac{7}{8}} =$? . . . „ „ „ „ 15.

63). $\left(m^{-\frac{3}{5}}\right)^{1\frac{2}{3}} =$? . . . „ „ „ „ 16.

64). $\left(a^{-\frac{3}{7}}\right)^{-1\frac{2}{5}} =$?

65). $\left(a^{-\frac{m}{n}}\right)^{\frac{x}{y}} =$?

66). $2\left(m^{-1\frac{1}{2}} n^{\frac{3}{5}}\right)^{-1\frac{2}{3}} =$? . . . „ „ „ „ 17.

67). $\left(\frac{16 x^4 y^{12} z^4}{81 a^8 b^{12}}\right)^{-\frac{3}{4}} =$? . . . „ „ „ „ 18.

68). $\left(x^{-\frac{3}{4}} y^{-\frac{5}{6}}\right)^{-\frac{2}{3}} =$?

69). $\left(\left(a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{6}} c^{\frac{2}{5}}\right)^{-\frac{1}{10}}\right)^{\frac{2}{3}} =$? . . . „ „ „ „ 19.

70). $\left(\left(4 a^{-\frac{3}{4}} b^{\frac{2}{3}} . c^{-\frac{15}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{6}} =$. . . ?

71). $\left(\left(\frac{x^2 y^{-1}}{a^{-2} b^3}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{x^{-1} a^4}{y^{-6} b^3}\right)^{-\frac{5}{6}}\right)^{-\frac{1}{2}} = ?$

72). $\left(a^{-\frac{1}{4}} - b^{-2\frac{1}{2}}\right) . \left(a^{-\frac{1}{4}} - b^{-2\frac{1}{2}}\right) = ?$. . . „ „ „ „ 20.

73). $\left(x^{\frac{1}{4}} - 2 y^{\frac{2}{3}}\right)^2 =$? . . . „ „ „ „ 21.

74). $\left(\frac{1}{2} a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{1}{5}} - \frac{2}{3} a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}}\right)^2 =$. . . ?

75). $\left(12 x^{-2} y^{-1\frac{1}{4}} - 16 x^{-\frac{2}{3}} y^3 + 4 x y^{\frac{1}{4}}\right) : 4 x^{-2} y^{-1\frac{1}{4}} = ?$. . analog dem gelösten Beispiel 22.

76). $\left(16 n^{\frac{3}{20}} - 40 m^{1\frac{53}{70}} + 22 m^{\frac{9}{52}} - 55 m^{1\frac{71}{91}}\right) : \left(2 a^{-\frac{3}{4}} - 5 a^{\frac{6}{7}}\right) = ?$ „ „ „ „ 23.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

77). $\left(9a^{-\frac{3}{2}}+\frac{12}{\sqrt[4]{a^5}}+\frac{4}{a}-a^{-\frac{1}{2}}+\frac{12}{\sqrt[4]{x}}-36\right):\left(3.a^{-\frac{3}{4}}+\frac{2}{\sqrt{a}}+a^{-\frac{1}{4}}-6\right)=?$

man schreibe, um untersuchen zu können, ob geordnet ist, die Wurzeln in Form von Bruchpotenzen und bringe sie in den einzelnen Gliedern aus dem Nenner in den Zähler.

78). $\left(\frac{1}{m}+m-3\right):\left(\frac{1}{\sqrt{m}}-\sqrt{m}+1\right)=?$

79). $\sqrt{m^{\frac{4}{7}}+2m^{\frac{24}{35}}+m^{\frac{4}{5}}}=$? . . . analog dem gelösten Beispiel 24.

80). $\sqrt{\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}x^{-\frac{1}{2}}}=$. . . ?

81). $\sqrt{4a^{-2}-12a^{-1}b^{-\frac{1}{2}}+9b^{-1}+16a^{-1}c^{-\frac{2}{3}}-24b^{-\frac{1}{2}}c^{-\frac{2}{3}}+16c^{-\frac{4}{3}}}=?$

C. Das Radizieren mit negativen und gebrochenen Exponenten.

Die bis dahin aufgestellten Gesetze, welche sich auf die Rechnung mit Wurzelgrössen beziehen, wurden nach der Antwort der Frage 18, Seite 181 nur unter der Voraussetzung gemacht, dass die Wurzelexponenten ganze und positive endliche Zahlen sind, da nun in Folge des Lehrsatzes 14, Seite 215, auch Wurzelgrössen auftreten können, deren Wurzelexponenten **negative** und **gebrochene** Zahlen sind, so soll in diesem Abschnitt gezeigt werden, wie man mit solchen Wurzelgrössen zu rechnen hat, wobei man sich nachstehende Lehrsätze, Erkl. etc. merken muss:

Lehrsatz 29. Jede Wurzel mit negativem Wurzelexponenten ist gleich dem reciproken Wert derselben Wurzel mit positivem Wurzelexponenten.

Man beachte den Zusatz 4, Seite 201.

Vorauss. Gegeben sei: $\sqrt[-n]{a}$

Behaupt. $\sqrt[-n]{a}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$

Beweis. Setzt man: $\sqrt[-n]{a}$ = der zu bestimmenden Grösse x, also ist:

a). . . . $\sqrt[-n]{a}=x$

so hat man nach der Definition in Antwort der Frage 15 diese Grösse x so zu bestimmen, dass

b). . . . $x^{-n}=a$ ist.

Da nun: $(x^{-n})^{-1} = a^{-1}$ oder:

$$x^{-n\cdot-1} = a^{-1}$$

$x^n = a^{-1}$ mithin auch:

$\sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{a^{-1}}$ ist, so folgt nach dem Lehrs. 5 aus dieser Gleichung, dass:

c). . . . $x = \sqrt[n]{a^{-1}}$

Aus den Gleichungen a). und c). folgt zunächst:

1). . . . $\sqrt[-n]{a} = \sqrt[n]{a^{-1}}$ (siehe die Erkl. 94)

und hieraus ergibt sich:

$$\sqrt[-n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

das ist vorstehende Behauptung.

Erkl. 94. Aus der in nebenstehendem Beweise entwickelten Relation 1).:

$$\sqrt[-n]{a} = \sqrt[n]{a^{-1}}$$

ergibt sich die praktische Regel:

„Kommen in einer Rechnung Wurzeln mit negativen Wurzelexponenten vor, so beseitigt man dieselben einfach dadurch, dass man den Wurzelexponenten mit: -1 multipliziert und den Radikanden mit: -1 potenziert, bezw. den Potenzexponenten des Radikanden ebenfalls mit: -1 multipliziert.“

Man vergl. hiermit auch den Lehrsatz 14, Seite 215.

z. B.:

$$\sqrt[-6]{a^{-4}} = \sqrt[-6\,.\,-1]{a^{-4\cdot-1}} = \sqrt[6]{a^4}$$

$$\sqrt[-3]{-x^3} = \sqrt[-3\,.\,-1]{-x^{3\cdot-1}} = \sqrt[3]{-x^{-3}}$$

Lehrsatz 30. Jede Wurzel mit gebrochenem Wurzelexponenten ist gleich einer Wurzel, welche den Zähler des gebrochenen Exponenten zum Wurzelexponenten hat und deren Radikand gleich der Potenz ist, welche zur Basis den ursprünglichen Radikanden und zum Potenzexponenten den Nenner des gebrochenen Wurzelexponenten hat, in Zeichen:

$$\sqrt[\frac{m}{n}]{a} = \sqrt[m]{a^n}$$

Man beachte den Zusatz 4, Seite 201.

Vorauss. Gegeben sei: $\sqrt[\frac{m}{n}]{a}$

Behaupt. $\sqrt[\frac{m}{n}]{a} = \sqrt[m]{a^n}$

Beweis. Da:

$a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{1}{\frac{m}{n}}}$ gesetzt werden kann und nach dem Lehrs. 27, S. 339:

$$a^{\frac{1}{\frac{m}{n}}} = \sqrt[\frac{m}{n}]{a}\text{, mithin auch:}$$

1). . . . $\sqrt[\frac{m}{n}]{a} = a^{\frac{n}{m}}$ (siehe die Erkl. 95) ist,
und da ferner nach demselben Lehrs. 27:

2). . . . $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ ist, so ergibt sich aus den Gleichungen 1). und 2).:

$$\sqrt[\frac{m}{n}]{a} = \sqrt[m]{a^n} \quad \text{(siehe die Erkl. 96)}$$

Erkl. 95. Aus der in nebenstehendem Beweise entwickelten Relation 1).:

$$\sqrt[\frac{m}{n}]{a} = a^{\frac{n}{m}}$$

ergibt sich der Satz:

„**Ein Wurzelausdruck mit gebrochenem Wurzelexponenten ist gleich einer Potenz, deren Basis gleich dem Radikanden und deren Exponent gleich dem reciproken Wert jenes gebrochenen Exponenten ist,**“

in Zeichen: $\sqrt[\frac{m}{n}]{a} = a^{\frac{n}{m}}$

Erkl. 96. Aus der in nebenstehendem Beweise entwickelten Gleichung 2).:

$$\sqrt[\frac{m}{n}]{a} = \sqrt[m]{a^n}$$

ergibt sich die praktische Regel:

„**Kommen in einer Rechnung Wurzeln mit gebrochenen Exponenten vor, so beseitigt man dieselben einfach dadurch, dass man den Wurzelexponenten mit dem Nenner desselben multipliziert und den Radikanden mit demselben Nenner potenziert, bezw. den Potenzexponenten des Radikanden ebenfalls mit jenem Nenner multipliziert.**“

Man vergl. hiermit auch den Lehrsatz 14, Seite 215).

z. B.:

$$\sqrt[\frac{2}{3}]{a} = \sqrt[\frac{2\cdot3}{3}]{a^3} = \sqrt[2]{a^3}$$

$$\sqrt[\frac{4}{5}]{a^{-2}} = \sqrt[\frac{4\cdot5}{5}]{a^{-2\cdot5}} = \sqrt[4]{a^{-10}}$$

u. s. f.

Erkl. 97. Aus den in den Erkl. 94 und 96 enthaltenen Regeln ergibt sich die weitere Regel:

„**Kommen in einer Rechnung Wurzeln mit negativen gebrochenen Wurzelexponenten vor, so beseitigt man dieselben dadurch, dass man den Wurzelexponenten mit dem negativen Nenner desselben multipliziert und den Radikanden mit demselben negativen Nenner potenziert**“,

z. B.:

1) $\sqrt[-\frac{2}{3}]{5} = \sqrt[-\frac{2}{3}\cdot-3]{5^{-3}} = \sqrt[2]{5^{-3}} = \sqrt[2]{\frac{1}{5^3}} =$

in Zeichen:

$$\sqrt[-\frac{m}{n}]{a} = \sqrt[-\frac{m}{n}\cdot -n]{a^{-n}} = \sqrt[m]{a^{-n}}$$

Den Beweis dieser Regel kann man auch analog wie den des Lehrsatzes 30 führen.

$$\frac{\sqrt[2]{1}}{\sqrt[2]{5^3}} = \frac{1}{\sqrt[2]{5^2 . 5}} = \frac{1}{5\sqrt{5}}$$

2). $\sqrt[-\frac{2}{5}]{7^{-4}} = \sqrt[-\frac{2}{5}\cdot -5]{7^{-4\cdot -5}} = \sqrt[2]{7^{20}} = 7^{10}$

Lehrsatz 31. **Die für ganze Wurzelexponenten aufgestellten Lehrsätze: 4, 5 und 9 bis 20, Seite 191—241, gelten mit denselben Beschränkungen auch für solche Wurzeln, deren Wurzelexponenten gebrochene Zahlen vorstellen.**

Man siehe die Erkl. 98 und beachte den Zusatz 4, Seite 201.

Vorauss. Um in nachstehenden Behauptungen keine Ausnahmfälle, wie bei den früheren Lehrsätzen, verzeichnen zu müssen, sei vorausgesetzt, dass m, n, p, q, a und b von Null verschiedene positive endliche Zahlen sind.

Behaupt. 1). $\left(\sqrt[\frac{m}{n}]{a}\right)^{\frac{m}{n}} = r$ (Lehrsatz 4, Seite 191)

2). $\sqrt[\frac{m}{n}]{a^{\frac{m}{n}}} = a$ (Lehrsatz 5, Seite 192)

3). $\sqrt[\frac{m}{n}]{ab} = \sqrt[\frac{m}{n}]{a} . \sqrt[\frac{m}{n}]{b}$ (Lehrsatz 9, Seite 199), Umkehrung: $\sqrt[\frac{m}{n}]{a} . \sqrt[\frac{m}{n}]{b} = \sqrt[\frac{m}{n}]{ab}$ (Lehrsatz 17, Seite 225)

4). $\sqrt[\frac{m}{n}]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[\frac{m}{n}]{a}}{\sqrt[\frac{m}{n}]{b}}$ (Lehrsatz 10, Seite 202) " $\frac{\sqrt[\frac{m}{n}]{a}}{\sqrt[\frac{m}{n}]{b}} = \sqrt[\frac{m}{n}]{\frac{a}{b}}$ (Lehrsatz 20, Seite 241)

5). $\sqrt[\frac{m}{n}]{a^p} = \left(\sqrt[\frac{m}{n}]{a}\right)^p$ (Lehrsatz 11, Seite 206) " $\left(\sqrt[\frac{m}{n}]{a}\right)^p = \sqrt[\frac{m}{n}]{a^p}$ (Lehrsatz 13, Seite 214)

oder $= a^{p:\frac{m}{n}}$

6). $\sqrt[\frac{m}{n}]{\sqrt[\frac{p}{q}]{a}} = \sqrt[\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}]{a}$ (Lehrsatz 12, Seite 210)

7). $\sqrt[\frac{m}{n}]{a} = \sqrt[\frac{m}{n}\cdot p]{a^p}$ (Lehrsatz 14, Seite 215)

oder $= \sqrt[\frac{m}{n}:p]{a^{1:p}}$

Beweis. Die Beweise der vorstehenden Behauptungen werden dadurch geführt, dass man die Wurzeln mit gebrochenen Wurzelexponenten nach Erkl. 95 als Bruchpotenzen schreibt und dann den Lehrsatz 28, Seite 340, benutzt.

1). $\left(\sqrt[\frac{m}{n}]{a}\right)^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{n}{m}\cdot\frac{m}{n}} = a^1 = a$

2). $\sqrt[\frac{m}{n}]{a^{\frac{m}{n}}} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m}} = a^1 = a$

3). $\sqrt[\frac{m}{n}]{ab} = (ab)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n}{m}} . b^{\frac{n}{m}} = \sqrt[\frac{m}{n}]{a} . \sqrt[\frac{m}{n}]{b}$ (Umkehrung der in der Erkl. 95 stehenden Relation).

4). $\sqrt[\frac{m}{n}]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}} = \frac{\sqrt[\frac{m}{n}]{a}}{\sqrt[\frac{m}{n}]{b}}$

5). $\sqrt[\frac{m}{n}]{a^p} = (a^p)^{\frac{n}{m}} = \left(a^{\frac{n}{m}}\right)^p = \left(\sqrt[\frac{m}{n}]{a}\right)^p$

oder $= (a^p)^{\frac{n}{m}} = a^{p\cdot\frac{n}{m}} = a^{p:\frac{m}{n}}$

6). $\sqrt[\frac{m}{n}]{\sqrt[\frac{p}{q}]{a}} = \sqrt[\frac{m}{n}]{a^{\frac{q}{p}}} = \left(a^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{q}{p}\cdot\frac{n}{m}} = a^{\frac{qn}{pm}} = \sqrt[\frac{pm}{qn}]{a} = \sqrt[\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}]{a}$

7). $\sqrt[\frac{m}{n}]{a} = a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n\cdot p}{m\cdot p}} = \left(a^{\frac{n}{m\cdot p}}\right)^p = \left(\sqrt[\frac{mp}{n}]{a}\right)^p = \sqrt[\frac{mp}{n}]{a^p}$

oder $= a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n:p}{m:p}} = \left(a^{\frac{n\cdot p}{m}}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sqrt[\frac{m}{n\cdot p}]{a}\right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[\frac{m}{n}:p]{a^{1:p}}$

Erkl. 98. Obgleich man nach vorstehendem Lehrsatz 31 mit Wurzeln, deren Wurzelexponenten gebrochene Zahlen sind, gerade so rechnen kann als wie mit solchen Wurzeln, deren Wurzelexponenten ganze Zahlen sind, so umgeht man jedoch meistens derartige Wurzeln, indem man mit Hülfe der in den Erklärungen 94, 95 und 96 aufgestellten Sätze die gebrochenen und negativen Wurzelexponenten beseitigt.

Aufgabe 49. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen vorkommenden **negativen** und **gebrochenen** Wurzelexponenten entfernen und die etwa angedeuteten Operationen soweit als möglich ausführen, dabei den Zusatz 4, Seite 201, beachten.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $\sqrt[\frac{1}{2}]{4} = \sqrt[\frac{1}{2}\cdot 2]{4^2} = \sqrt[1]{16} =$ 16 man beachte die Erkl. 96, Seite 351.

2). $\sqrt[\frac{2}{3}]{6\frac{1}{4}} = \sqrt[\frac{2}{3}\cdot 3]{\left(\frac{25}{4}\right)^3} = \sqrt[2]{\left(\frac{25}{4}\right)^3} = \left(\sqrt{\frac{25}{4}}\right)^3$

$= \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8} = 15{,}75$

3). $\sqrt[-\frac{2}{3}]{49} = \sqrt[-\frac{2}{3}\cdot -3]{49^{-3}} = \sqrt[2]{49^{-3}} = \sqrt[2]{\left(\frac{1}{49}\right)^3} = \left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{1}{343}$ man beachte die Erkl. 97, Seite 351.

4). $\sqrt[-\frac{3}{4}]{\frac{1}{8}} = \sqrt[-\frac{3}{4}\cdot -4]{\left(\frac{1}{8}\right)^{-4}} = \sqrt[3]{8^4} = 2^4 = 16$

5). $\sqrt[-\frac{1}{3}]{\frac{a^{-\frac{1}{3}}\,b^{-\frac{2}{3}}}{c^{-\frac{1}{4}}}} = \sqrt[-\frac{1}{3}\cdot -3]{\left(\frac{a^{-\frac{1}{3}}\,b^{-\frac{2}{3}}}{c^{-\frac{1}{4}}}\right)^{-3}} = \sqrt[1]{\frac{a^{-\frac{1}{3}\cdot -3}\,b^{-\frac{2}{3}\cdot -3}}{c^{-\frac{1}{4}\cdot -3}}} =$

$\frac{a^1 b^2}{c^{\frac{3}{4}}} = \frac{ab^2}{\sqrt[4]{c^3}} = \frac{ab^2\sqrt[4]{c}}{\sqrt[4]{c^3}\cdot\sqrt[4]{c}} = \frac{ab^2\sqrt[4]{c}}{\sqrt[4]{c^4}} = \frac{ab^2}{c}\sqrt[4]{c}$

6). $\sqrt[\frac{1}{2}]{9} =$? analog dem gelösten Beispiel 1.

7). $\sqrt[\frac{1}{3}]{5} =$?

8). $\sqrt[\frac{1}{7}]{a} =$?

9). $\sqrt[\frac{2}{3}]{9} =$? „ „ „ „ 2.

10). $\sqrt[\frac{4}{3}]{16\frac{1}{3}} =$?

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
11). $\sqrt[-\frac{1}{2}]{9} =$	?	 analog dem gelösten Beispiel 3.
12). $\sqrt[-\frac{1}{7}]{x} =$	?	
13). $\sqrt[-\frac{4}{3}]{16\frac{1}{3}} =$	?	
14). $\sqrt[-\frac{2}{5}]{2\frac{1}{2}} =$	?	
15). $\sqrt[-\frac{3}{4}]{5\frac{1}{6}^{-2}} =$	?	
16). $\sqrt[-\frac{1}{4}]{\frac{x^{-\frac{3}{4}}y^{-\frac{1}{4}}z}{u^{-\frac{1}{2}}}} =$	?	 analog dem gelösten Beispiel 5.

D. Ueber die Radizierung surdischer Binome.

Erkl. 99. Ein Binom, dessen Glieder rationale und irrationale Zahlen darstellen, welches also selbst stets wieder eine irrationale Grösse repräsentiert, nennt man ein **surdisches Binom** (siehe die Erkl. 22, Seite 184).

z. B.:

$a \pm \sqrt{b}$ ist ein surdisches Binom.

Erkl. 100. Hat man aus einem surdischen Binom von der Form:

$$a \pm \sqrt{b}$$

die Quadratwurzel zu ziehen, also hat man

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$$

zu bestimmen, so ist dies an und für sich unmöglich, wohl aber kann man mittelst nachstehenden Lehrsatzes diese Quadratwurzel **in die Summe zweier anderen Quadratwurzeln zerlegen**, wodurch sich in manchen Fällen einfachere Ausdrücke ableiten lassen. (Man siehe die gelösten Beispiele in der Aufgabe 50.

Lehrsatz 32. Die Zerlegung einer Quadratwurzel, deren Radikand ein surdisches Binom ist, in die Summe zweier anderen Quadratwurzeln, geschieht mittelst der Formel:

Formel 1: $$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a^2-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Beweis. Bezeichnet man die zu suchenden Wurzeln durch: $\sqrt{x}$ und $\sqrt{y}$, also ist:

1). $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$

und quadriert man zur Bestimmung der Werte für x und y diese Gleichung, so erhält man:

$$a \pm \sqrt{b} = x \pm 2\sqrt{x \,.\, y} + y$$

oder:

2). $a \pm \sqrt{b} = (x+y) \pm 2\sqrt{xy}$

Bestimmt man nunmehr die Werte für x und y so, dass in der Gleichung 2). sowohl die rationalen als auch die irrationalen Teile der beiden Seiten dieser Gleichung einander gleich werden, setzt man also:

3). . . $x + y = a$

4). . . $2\sqrt{xy} = \sqrt{b}$

so erhält man aus diesen Gleichungen 3). und 4). nach nebenstehender Erklärung 101:

5). . . $x = \dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}$

6). . . $y = \dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$

Substituirt man diese Werte für x und y in vorstehender Gleichung 1)., so erhält man:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

d. i. die in dem Lehrsatz aufgestellte Formel.

Erkl. 101. Um aus den Gleichungen:

1). . . . $x + y = a$

2). . . . $2\sqrt{xy} = \sqrt{b}$

x und y zu berechnen, suche man zunächst die Differenz: $x - y$ (siehe das Kapitel: Die quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten); quadriert man zu diesem Zwecke die beiden gegebenen Gleichungen, so erhält man:

3). . . $x^2 + 2xy + y^2 = a^2$

4). . . $4xy = b$

Durch Subtraktion der Gleichungen 3). und 4). erhält man:

$$x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - b$$

oder:

$$(x-y)^2 = a^2 - b$$

und:

5). . . . $x - y = \sqrt{a^2-b}$

Man hat somit:

1). . . . $x + y = a$

5). . . . $x - y = \sqrt{a^2-b}$

und hieraus ergibt sich durch Addition:

$$2x = a + \sqrt{a^2-b}$$

oder:

a). . . $x = \dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}$

Ferner ergibt sich hieraus durch Subtraktion:

$$2y = a - \sqrt{a^2-b}$$

oder:

b). . . $y = \dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$

Zusatz 1. Aus der in dem Lehrsatze 32 aufgestellten Formel ergibt sich durch Umkehrung die weitere Formel:

Formel 2: $$\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2-b})},$$

mittelst welcher man die Summe zweier Quadratwurzeln, deren Radikanden surdische Binome sind, in eine Quadratwurzel verwandeln kann, wodurch man in manchen Fällen einfachere Ausdrücke erhält.

Man siehe die gelösten Uebungsbeispiele in der Aufgabe 51.

denn: setzt man in der umgekehrten Formel 1:

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} = \sqrt{a \pm \sqrt{b}}$$

welche man auch in der Form:

Erkl. 102. Soll man die Summe zweier (oder mehrerer) beliebigen Quadratwurzeln in eine Quadratwurzel verwandeln, so quadriere man diese Summen und setze das Quadratwurzelzeichen darüber, in Zeichen:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$$

$$\sqrt{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2-b}{4}}} \pm \sqrt{\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2-b}{4}}} =$$

$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ schreiben kann,

$\frac{a}{2} = x$, also $a = 2x$, und

$\frac{a^2-b}{4} = y$, also $b = a^2-4y = 4x^2-4y$

so geht dieselbe über in:

$$\sqrt{x+\sqrt{y}} \pm \sqrt{x-\sqrt{y}} = \sqrt{2x \pm \sqrt{4x^2-4y}}$$

oder in:

$$\sqrt{x+\sqrt{y}} \pm \sqrt{x-\sqrt{y}} = \sqrt{2(x \pm \sqrt{x^2-y})}$$

Wählt man statt der Buchstaben x und y die Buchstaben a und b, so erhält man vorstehende Formel 2.

Aufgabe 50. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen Quadratwurzeln nach der in dem Lehrsatz 32 aufgestellten Formel 1:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

in die Summe zweier Quadratwurzeln verwandeln und dann das Resultat auf die einfachste Form bringen.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $\sqrt{7 \pm \sqrt{48}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{7^2-48}}{2}} \pm \sqrt{\frac{7-\sqrt{7^2-48}}{2}}$. . man setze in der Formel 1 für $a = 7$, für $b = 48$.

$$= \sqrt{\frac{7+\sqrt{1}}{2}} \pm \sqrt{\frac{7-\sqrt{1}}{2}} = \sqrt{\frac{7+1}{2}} \pm \sqrt{\frac{7-1}{2}}.$$

$$= \sqrt{\frac{8}{2}} \pm \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{4} \pm \sqrt{3} = 2 \pm \sqrt{3}$$

und zwar $= \pm(2 \pm \sqrt{3})$ man beachte die Erkl. 25, Seite 187.

2). $\sqrt{11-3\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{11+\sqrt{11^2-(3\sqrt{8})^2}}{2}} - \sqrt{\frac{11-\sqrt{11^2-(3\sqrt{8})^2}}{2}}$. . man setze in der Formel 1 für $a = 11$, für $\sqrt{b} = 3\sqrt{8}$ also für $b = (3\sqrt{8})^2$

$$= \sqrt{\frac{11+\sqrt{121-72}}{2}} - \sqrt{\frac{11-\sqrt{121-72}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{11+\sqrt{49}}{2}} - \sqrt{\frac{11-\sqrt{49}}{2}} = \sqrt{\frac{11+7}{2}} - \sqrt{\frac{11-7}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{18}{2}} - \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{9} - \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2}$$

und zwar: $= \pm(3-\sqrt{2})$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

3). $$\sqrt{\sqrt{63}-\sqrt{35}} = \sqrt{\frac{\sqrt{63}+\sqrt{(\sqrt{63})^2-35}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{63}-\sqrt{(\sqrt{63})^2-35}}{2}}$$

. . . man setze in der Formel 1: für $a=\sqrt{63}$, „ $b=35$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{63}+\sqrt{63-35}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{63}-\sqrt{63-35}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{63}+\sqrt{28}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{63}-\sqrt{28}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{9}+\sqrt{4})\sqrt{7}}{2}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{9}-\sqrt{4})\sqrt{7}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{2}\sqrt{7}} - \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{10}{4}\sqrt{7}} - \sqrt{\frac{2}{4}\sqrt{7}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{700}}{4}} - \sqrt{\frac{\sqrt{28}}{4}} = \frac{\sqrt[4]{700}}{2} - \frac{\sqrt[4]{28}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{700}-\sqrt[4]{28}\right)$$

4). $$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-(2\sqrt{x-1})^2}}{2}} + \sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-(2\sqrt{x-1})^2}}{2}}$$

. . man setze in der Formel 1: für $a=x$, für $\sqrt{b}=2\sqrt{x-1}$, also für $b=(2\sqrt{x-1})^2$

$$= \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-4x+4}}{2}} + \sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-4x+4}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{x+\sqrt{(x-2)^2}}{2}} + \sqrt{\frac{x-\sqrt{(x-2)^2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{x+(x-2)}{2}} + \sqrt{\frac{x-(x-2)}{2}}$$

$$= \sqrt{x-1}+\sqrt{1} = 1+\sqrt{x-1}$$

5). $$\sqrt{\sqrt{18}-4} = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{(3\sqrt{2})^2-16}}{2}} - \sqrt{\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{(3\sqrt{2})^2-16}}{2}}$$

. . man setze in der Formel 1: für $a=\sqrt{18}=\sqrt{9.2}=3\sqrt{2}$ und für $\sqrt{b}=4$, also für $b=16$

$$= \sqrt{\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(3+1)\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{(3-1)\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{2\sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{2}$$

6). $$\sqrt{9x+25y-30\sqrt{xy}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

man setze in der Formel 1: $a = 9x+25y$, also: $a^2 = 81x^2+450xy+625y^2$ und $\sqrt{b} = 30\sqrt{xy}$, also: $b = (30\sqrt{xy})^2 = 900xy$

$$\sqrt{\frac{9x+25y+\sqrt{81x^2+450xy+625y^2-900xy}}{2}} -$$

$$\sqrt{\frac{9x+25y-\sqrt{81x^2+450xy+625y^2-900xy}}{2}} =$$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

$$\sqrt{\frac{9x+25y+(9x-25y)}{2}}-\sqrt{\frac{9x+25y-(9x-25y)}{2}}=$$

$$\sqrt{\frac{18x}{2}}-\sqrt{\frac{50y}{2}} = 3\sqrt{x}-5\sqrt{y}$$

. . man beachte, dass: $81x^2+450xy+625y^2-900xy = 81x^2-450xy+625y^2 = (9x-25y)^2$ ist.

7). $\sqrt{31+\sqrt{6}} =$? analog dem gelösten Beispiel 1.

8). $\sqrt{\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{3}{4}}} =$?

9). $\sqrt{6+\sqrt{11}} =$?

10). $\sqrt{6-4\sqrt{2}} =$? " " " " 2.

11). $\sqrt{\sqrt{32}+\sqrt{24}} =$? " " " " 3.

12). $\sqrt{\sqrt{27}-2\sqrt{6}} =$?

13). $\sqrt{12\sqrt{3}+4\sqrt{24}} =$?

14). $\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-y^2}} =$? " " " " 4.

15). $\sqrt{m^2+2n\sqrt{m^2-n^2}} =$?

16). $\sqrt{\sqrt{3}-1} =$? " " " " 5.

17). $\sqrt{x^2+y+2\sqrt{y}} =$? " " " " 6.

18). $\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}} =$? man widerhole das Verfahren, indem man den Exponenten 4 zerlegt.

19). $\sqrt[4]{97-56\sqrt{3}} =$?

20). $\sqrt{6+\sqrt{8}-\sqrt{12}-\sqrt{24}} =$. . . ? man fasse mehrere Glieder als ein Glied zusammen und widerhole das Verfahren.

Aufgabe 51. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen Summen von Quadratwurzeln nach der im Zusatz 1, S. 356, aufgestellten Formel 2:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2(a\pm\sqrt{a^2-b})}$$

in eine Quadratwurzel verwandeln und dann das Resultat auf die einfachste Form bringen.

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2(3+\sqrt{3^2-5})}$

$= \sqrt{2(3+\sqrt{4})} = \sqrt{10}$

. man setze in der Formel 2 (Zusatz 1, Seite 356): für $a = 3$ und " $b = 5$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

2). $\sqrt{37+2\sqrt{70}}-\sqrt{37-2\sqrt{70}}=\sqrt{2(37-\sqrt{37^2-280})}$. . man setze in der Formel 2 (Zusatz 1, Seite 356): für $a=37$ und für $\sqrt{b}=2\sqrt{70}$, also für $b=(2\sqrt{70})^2=280$

$=\sqrt{2(37-\sqrt{1089})}=\sqrt{2(37-33)}$

$=\sqrt{2.4}=2\sqrt{2}$

3). $\sqrt{m+n+2\sqrt{mn}}+\sqrt{m+n-2\sqrt{mn}}$ man setze in der Formel 2 (Zusatz 1, Seite 356): für $a=m+n$ und für $\sqrt{b}=2\sqrt{mn}$, also für $b=(2\sqrt{mn})^2=4mn$

$=\sqrt{2\left(m+n+\sqrt{(m+n)^2-4mn}\right)}$

$=\sqrt{2(m+n+\sqrt{m^2+2mn+n^2-4mn})}$

$=\sqrt{2(m+n+\sqrt{m^2-2mn+n^2})}$

$=\sqrt{2(m+n+m-n)}=\sqrt{4m}=2\sqrt{m}$

4). $\sqrt{3\sqrt{10}+3}-\sqrt{3\sqrt{10}-3}=\sqrt{2(3\sqrt{10}-\sqrt{(3\sqrt{10})^2-9})}$. . man setze in der Formel 2 (Zusatz 1, Seite 356): für $a=3\sqrt{10}$ und für $\sqrt{b}=3$, also für $b=3^2=9$

$=\sqrt{2(3\sqrt{10}-\sqrt{90-9})}=\sqrt{2(3\sqrt{10}-9)}$

$=\sqrt{6(\sqrt{10}-3)}$

5). $\sqrt{3}-\sqrt{2}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}.\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}$ man beachte die Erkl. 102.

$=\sqrt{3-2\sqrt{6}+2}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

6). $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}=$? analog dem gelösten Beispiel 1.

7). $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}=$?

8). $\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\sqrt{5-2\sqrt{5}}=$. . . ? „ „ „ „ 2.

9). $\sqrt{11+2\sqrt{10}}-\sqrt{11-2\sqrt{10}}=$. ?

10). $\sqrt{a^2+a-1+2a\sqrt{a-1}}+\sqrt{a^2+a-1-2a\sqrt{a-1}}=$? . . analog dem gelösten Beispiel 3.

11). $\sqrt{8m^2+2m+8m\sqrt{m}}\pm\sqrt{8m^2+2m-8m\sqrt{m}}=$?

12). $\sqrt{2\sqrt{18}+6}-\sqrt{2\sqrt{18}-6}=$. . ? analog dem gelösten Beispiel 4.

13). $\sqrt{5}-\sqrt{2}=$? „ „ „ „ 5.

14). $2\sqrt{3}-3\sqrt{2}=$?

15). $1-\sqrt{5}=$?

E. Ueber die Radizierung komplexer Zahlen.

Erkl. 103. Hat man aus einer **komplexen Zahl** von der allgemeinen Form:

$$\left.\begin{array}{l} a \pm b\,i \\ \text{oder } a \pm b\sqrt{-1} \end{array}\right\} \text{(siehe Erkl. 81, Seite 327)}$$

die Quadratwurzel zu ziehen, also hat man:

$$\sqrt{a \pm bi} \text{ oder } \sqrt{a \pm b\sqrt{-1}}$$

zu bestimmen, so ist dies an und für sich unmöglich, wohl aber kann man mittelst des nachstehenden Lehrsatzes 33 diese Quadratwurzel in die Summe zweier anderen Quadratwurzeln zerlegen, wodurch sich in manchen Fällen einfachere Ausdrücke ableiten lassen.

Man siehe die gelösten Beispiele in der Aufgabe 52.

Lehrsatz 33. Die Zerlegung einer Quadratwurzel, deren Radikand eine komplexe Zahl darstellt, in die Summe zweier anderen Quadratwurzeln, geschieht mittelst der Formel:

Formel 3: $$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

wenn i den Wert: $\sqrt{-1}$ vorstellt.

Erkl. 104. Um aus den Gleichungen:

$$1). \quad . \quad . \quad x+y = a$$
$$2). \quad . \quad . \quad 2\sqrt{xy} = bi$$

x und y zu berechnen, suche man zunächst die Differenz $x-y$ herzustellen (siehe das Kapitel: Die quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten). Zu diesem Zwecke quadriert man die beiden Gleichungen, wie folgt:

$$3). \quad . \quad . \quad x^2+2xy+y^2 = a^2$$
$$4). \quad . \quad . \quad 4xy = b^2 . i^2$$

alsdann ergibt sich durch Subtraktion der Gleichungen 3). und 4).:

$$x^2-2xy+y^2 = a^2-b^2i^2$$

oder, da: $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ und $x^2-2xy+y^2 = (x-y)^2$ ist:

$$5). \quad . \quad . \quad x-y = \sqrt{a^2+b^2}$$

Man hat somit:

$$1). \quad . \quad . \quad x+y = a$$
$$5). \quad . \quad . \quad x-y = \sqrt{a^2+b^2}$$

und hieraus erhält man:

$$x = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$$\text{und } y = \frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

Beweis. Bezeichnet man, analog wie in dem Beweise des Lehrsatzes 32, die zu suchenden Wurzeln durch: $\sqrt{x}$ und $\sqrt{y}$, also ist:

$$1). \quad \sqrt{a \pm bi} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

und quadriert man zur Bestimmung der Werte: x und y diese Gleichung, so erhält man:

$$a \pm bi = x \pm 2 . \sqrt{xy} + y$$

oder:

$$2). \quad a \pm bi = (x+y) \pm 2 . \sqrt{xy}$$

Bestimmt man nun die Werte für x und y, so dass:

$$3). \quad . \quad . \quad x+y = a \quad \text{und}$$
$$4). \quad . \quad . \quad 2\sqrt{xy} = bi \text{ ist,}$$

so ergibt sich aus diesen Gleichungen nach der Erkl. 104 für:

$$5). \quad . \quad . \quad x = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \quad \text{und für:}$$

$$6). \quad . \quad . \quad y = \frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

Substituiert man diese Werte in obige Gleichung 1). so wird:

$$7). \quad \sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

Da aber in allen Fällen:

$\sqrt{a^2+b^2} > a$ sein muss,
folglich der 2[te] Summand:

$$\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

eine **imaginäre** Grösse vorstellt, so setzt man:

$$\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}} = \sqrt{\frac{-1\,(\sqrt{a^2+b^2}-a)}{2}} =$$

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \text{ oder } =$$

$$i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

wonach vorstehende Gleichung 7) übergeht, in:

$$\sqrt{a\pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

d. i. die in dem Lehrs. 33 aufgestellte Formel 3.

Zusatz 1. Aus der in dem Lehrsatz 33 aufgestellten Formel 3 ergibt sich durch Umkehrung die weitere Formel:

Formel 4: $\sqrt{a+bi} \pm \sqrt{a-bi} = \sqrt{2\,(a\pm\sqrt{a^2+b^2})}$. . . Diese Formel kann man analog wie die Formel 2 in dem Zusatz 1, Seite 356. Aus dieser Formel kann man den Satz ableiten:

Die Summe zweier konjugierten komplexen Zahlen ist reell, nämlich:

$$\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi} = \sqrt{2\,(a+\sqrt{a^2+b^2})}$$

Die Differenz derselben ist imaginär, nämlich:

$$\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi} = \sqrt{2\,(a-\sqrt{a^2+b^2})}$$

da: $\sqrt{a^2+b^2}$ stets grösser als a ist, folglich der Radikand rechts eine negative Grösse vorstellt.

Man siehe die gelösten Beispiele in der Aufgabe 53.

auch, wie in der Erkl. 102 angegeben ist, herleiten, es ist nämlich:

$$\sqrt{a+bi}\pm\sqrt{a-bi} = \sqrt{(\sqrt{a+bi}\pm\sqrt{a-bi})^2} =$$

$$\sqrt{a+bi\pm 2\,.\sqrt{(a+bi)(a-bi)}+a-bi} =$$

$$\sqrt{2a\pm 2\sqrt{a^2-b^2i^2}} = \sqrt{2a\pm 2\sqrt{a^2+b^2}} =$$

$$\sqrt{2\,(a\pm\sqrt{a^2+b^2})}$$

Aufgabe 52. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen Quadratwurzeln nach der in dem Lehrsatz 33 aufgestellten Formel 3:

$$\sqrt{a\pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

in die Summe zweier Quadratwurzeln verwandeln und dann das Resultat auf die einfachste Form bringen:

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $\sqrt{7+\sqrt{-15}} = \sqrt{7+i\sqrt{15}}$ man setze in der Formel 3 (Lehrs. 33): für $a = 7$, „ $b = \sqrt{15}$, also für $b^2 = 15$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{7^2+15}+7}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{7^2+15}-7}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{64}+7}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{64}-7}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{15}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 2}{4}} + i\sqrt{\frac{2}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{30} + \frac{i}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{30}+\sqrt{-2}\right)$$

. . . . schliesslich setze man für $i = \sqrt{-1}$

2). $\sqrt{2\sqrt{-10}+3} = \sqrt{3+2i\sqrt{10}}$ man setze in der Formel 3 (Lehrs. 33): für $a = 3$, „ $b = 2\sqrt{10}$, also für $b^2 = (2\sqrt{10})^2 = 40$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{3^2+40}+3}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{3^2+40}-3}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{49}+3}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{49}-3}{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}} + i\sqrt{\frac{4}{2}}$$

$$= \sqrt{5}+i\sqrt{2} = \sqrt{5}+\sqrt{-2}$$

3). $\sqrt{2\sqrt{-3}} = \sqrt{0+2\sqrt{-3}} = \sqrt{0+i \cdot 2\sqrt{3}}$ um die Formel 3 benutzen zu können, füge man dem Radikanden den Summanden Null bei, dann setze man in Formel 3 für $a = 0$, „ $b = 2\sqrt{3}$, also für $b^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{0^2+12}+0}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{0^2+12}-0}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{12}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{12}}{2}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{\frac{12}{4}}} + i\sqrt{\sqrt{\frac{12}{4}}} = \sqrt[4]{3}+i\sqrt[4]{3}$$

4). $\sqrt[4]{-1} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{-1}} = \sqrt{0+\sqrt{-1}} = \sqrt{0+i}$ analog wie vorhin, dann setze man in Formel 3: für $a = 0$, „ $b = 1$, also für $b^2 = 1$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{0^2+1^2}+0}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{0^2+1^2}-0}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{1}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{1}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{4}} + i\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{i}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{-2}\right)$$

5). $\sqrt{1+\sqrt{-3}} =$? analog dem gelösten Beispiel 1.

6). $\sqrt{9-2\sqrt{-3}} =$? „ „ „ „ 2.

7). $\sqrt{-3-\sqrt{-16}} =$?

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:
8). $\sqrt{4\sqrt{-6}-2}=$	 ?	
9). $\sqrt{2\sqrt{-4}+\sqrt{-12}}=$	 ?	
10). $\sqrt{-\sqrt{-1}}=$	 ?	analog dem gelösten Beispiel 3.
11). $\sqrt[4]{-4}=$	 ?	„ „ „ „ 4.

Aufgabe 53. Man soll die in nachstehenden Uebungsbeispielen gegebenen Summen von Quadratwurzeln nach der im Zusatz 1, Seite 362, aufgestellten Formel 4:

$$\sqrt{a+bi}\pm\sqrt{a-bi}=\sqrt{2(a\pm\sqrt{a^2+b^2})}$$

in eine Quadratwurzel verwandeln und dann das Resultat auf die einfachste Form bringen.

Uebungsbeispiele:	Resultate:	Andeutungen:

1). $\sqrt{3+\sqrt{-16}}+3\sqrt{-\sqrt{-16}}=\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i}$. . . man setze in der Formel 4 (Zusatz 1, Seite 362): für $a=3$ und „ $b=4$

$$=\sqrt{2(3+\sqrt{3^2+4^2})}$$

$$=\sqrt{2(3+\sqrt{25})}=\sqrt{16}=\pm 4$$

2). $\sqrt{5+\sqrt{-24}}-\sqrt{5-\sqrt{-24}}=\sqrt{5+2i\sqrt{6}}-\sqrt{5-2i\sqrt{6}}$. . man setze in der Formel 4 (Zusatz 1, Seite 362): für $a=5$ „ $b=2\sqrt{6}$, also für $b^2=(2\sqrt{6})^2=24$

$$=\sqrt{2(5-\sqrt{25+24})}=\sqrt{2(5-\sqrt{49})}$$

$$=\sqrt{2(5-7)}=\sqrt{2\cdot -2}=\sqrt{4\cdot -1}$$

$$=2\sqrt{-1}$$

3). $\sqrt{7+\sqrt{-15}}+\sqrt{7-\sqrt{-15}}=$	. . ?	analog dem gelösten Beispiel 1.
4). $\sqrt{11+\sqrt{-75}}-\sqrt{11-\sqrt{-75}}=$	?	„ „ „ „ 2.
5). $\sqrt{\sqrt{-48}+11}\pm\sqrt{\sqrt{-48}-11}=$	?	
6). $\sqrt{x-y+2\sqrt{-xy}}\pm\sqrt{x-y-2\sqrt{-xy}}=$	? !. . . .	man setze: $(x-y)=a$ u. s. f.

II. Anhang.

1). Ueber besondere Fälle der Radizierung.

Lehrsatz 34. Ist a eine von Null und Eins verschiedene **endliche ganze** Zahl und bedeutet das Zeichen: ∞ eine **unendlich grosse** Zahl, so bestehen folgende Relationen:

1). $\sqrt[0]{+a} = \infty$

2). $\sqrt[+\infty]{+a} = 1$

3). $\sqrt[-\infty]{+a} = 1$

4). $\sqrt[0]{1} = \frac{0}{0}$ nämlich **unbestimmt** oder $= \infty$

5). $\sqrt[+\infty]{1} = 1$

6). $\sqrt[-\infty]{1} = 1$

7). $\sqrt[0]{0} = 0$

8). $\sqrt[+a]{0} = 0$

9). $\sqrt[-a]{0} = \infty$

10). $\sqrt[+\infty]{0} = 0^0$ nämlich **unbestimmt.**

11). $\sqrt[-\infty]{0} = \frac{1}{0^0}$ nämlich **unbestimmt.**

12). $\sqrt[0]{-a} = \pm\,\infty$

13). $\sqrt[+\infty]{-a} = 1$

14). $\sqrt[-\infty]{-a} = 1$

15). $\sqrt[+\infty]{+\infty} = \frac{0}{0}$ nämlich **unbestimmt.**

16). $\sqrt[+a]{+\infty} = \infty$

Beweis.

1). $\sqrt[0]{+a} = a^{\frac{1}{0}} = a^{\infty} = \infty$

(siehe Erkl. 69, Seite 160 und Relation 1). des Lehrsatzes 27, Seite 162).

2). $\sqrt[+\infty]{+a} = a^{\frac{1}{\infty}} = a^0 = 1$

(siehe Erkl. 69, Seite 160).

3). $\sqrt[-\infty]{+a} = \frac{1}{\sqrt[\infty]{a}} = \frac{1}{1} = 1$

(man beachte die Relation 2).

4). $\sqrt[0]{1} = 1^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} = \frac{0}{0}$ nämlich **unbestimmt**

(siehe die 5. Relation des Lehrs. 27, Seite 162)

oder: $\sqrt[0]{1} = 1^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} = 1$, denn 1 noch so oft mit sich selbst multipliziert, gibt stets wieder 1.

5). $\sqrt[+\infty]{1} = 1^{\frac{1}{+\infty}} = 1^0 = 1$

6). $\sqrt[-\infty]{1} = 1^{\frac{1}{-\infty}} = 1^0 = 1$

7). $\sqrt[0]{0} = 0^{\frac{1}{0}} = 0^{\infty} = 0$

(siehe die 9. Relation des Lehrs. 27, Seite 162).

8). $\sqrt[+a]{0} = 0^{\frac{1}{a}} = 0$

9). $\sqrt[-a]{0} = \frac{1}{\sqrt[a]{0}} = \frac{1}{0} = \infty$

(8). und 9). ergibt sich aus der Definition des Radizierens.)

10). $\sqrt[+\infty]{0} = 0^{\frac{1}{+\infty}} = 0^0$ nämlich **unbestimmt**

(siehe die 7. Relation des Lehrs. 27, Seite 162).

11). $\sqrt[-\infty]{0} = \frac{1}{\sqrt[\infty]{0}} = \frac{1}{0^0}$ nämlich **unbestimmt.**

17). $\sqrt[0]{+\infty} = \frac{0}{0}$ nämlich **unbestimmt**

oder $= \infty$

18). $\sqrt[-a]{+\infty} = 0$

19). $\sqrt[-\infty]{+\infty} = \frac{0}{0}$ nämlich **unbestimmt.**

20). $\sqrt[+\infty]{-\infty} = \frac{0}{0}$ nämlich **unbestimmt.**

21). $\sqrt[+a]{-\infty} = \infty$

22). $\sqrt[0]{-\infty} = \pm\infty$

23). $\sqrt[-a]{-\infty} = 0$

24). $\sqrt[-\infty]{-\infty} = \frac{0}{0}$ nämlich **unbestimmt.**

12). $\sqrt[0]{-a} = (-a)^{\frac{1}{0}} = (-a)^{\infty} = \pm\infty$

(siehe die 3. Relation des Lehrs. 27, Seite 162).

13). $\sqrt[+\infty]{-a} = (-a)^{\frac{1}{+\infty}} = (-a)^0 = 1$

14). $\sqrt[-\infty]{-a} = (-a)^{\frac{1}{-\infty}} = (-a)^0 = 1$

15). $\sqrt[+\infty]{+\infty} = (+\infty)^{\frac{1}{+\infty}} = (+\infty)^0 = \frac{0}{0}$

nämlich **unbestimmt**

(siehe die 12. Relation des Lehrs. 27, Seite 162).

16). $\sqrt[+a]{+\infty} = \sqrt[+a]{\frac{1}{0}} = \frac{\sqrt[a]{1}}{\sqrt[a]{0}} = \frac{1}{0} = \infty$

17). $\sqrt[0]{+\infty} = \sqrt[0]{\frac{1}{0}} = \frac{\sqrt[0]{1}}{\sqrt[0]{0}} = \frac{\frac{0}{0}}{0} = \frac{0}{0}$

nämlich **unbestimmt**, oder da $\sqrt[0]{1}$ auch $= 1$ ist (siehe vorstehende Relation 4), so erhält man auch:

$$\sqrt[0]{+\infty} = \frac{1}{0} = \infty$$

18). $\sqrt[-a]{+\infty} = \frac{1}{\sqrt[a]{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$

19). $\sqrt[-\infty]{+\infty} = \frac{1}{\sqrt[\infty]{+\infty}} = \frac{1}{\frac{0}{0}} = \frac{0}{0}$ nämlich **unbestimmt.**

20). $\sqrt[+\infty]{-\infty} = (-\infty)^{\frac{1}{+\infty}} = (-\infty)^0 = \frac{0}{0}$

nämlich **unbestimmt**

(siehe die 17. Relation des Lehrs. 27, Seite 162).

21). $\sqrt[+a]{-\infty} = \sqrt[+a]{\frac{1}{0}} = \frac{\sqrt[a]{1}}{\sqrt[a]{0}} = \frac{1}{0} = \infty$

22). $\sqrt[0]{-\infty} = (-\infty)^{\frac{1}{0}} = (-\infty)^{+\infty} = \pm\infty$

(siehe die 18. Relation des Lehrs. 27, Seite 162).

23). $\sqrt[-a]{-\infty} = \frac{1}{\sqrt[a]{-\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$

24). $\sqrt[-\infty]{-\infty} = \frac{1}{\sqrt[+\infty]{-\infty}} = \frac{1}{\frac{0}{0}} = \frac{0}{0}$ nämlich **unbestimmt**

(siehe die vorstehende Relation 20).

2). Gemischte Uebungsbeispiele.

Aufgabe 54. Man soll die nachstehend gegebenen Uebungsbeispiele nach den bis hierher angeführten Sätzen und Regeln auf ihre **einfachste** Form bringen, das heisst so weit als möglich **reduzieren.**

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

1). $\sqrt{(a^2+b)^4 c^6 \sqrt{27\,(a^2+b)^2 c \sqrt[4]{81\,(a^2+b)^{24} c^{12}}}} = \,.\,.\,?$

2). $\sqrt{a m^2 - b m^2} + \sqrt[3]{a^2 b^3 c^3 - d^2 b^3 c^3} + \sqrt{4 m^3 n^3 - q m^2 n^2} = ?$

3). $\sqrt{(m^2+n^2)^2 - (m^2-n^2)^2} = \,.\,.\,.\,?$

4). $\sqrt[x]{\dfrac{m^{-2x+2}\, b^{-7x}}{p^{-3x-7}}} = \,.\,.\,.\,.\,.\,?$

5). $\sqrt[3a-2b]{(3a^2-2b^3)^{5a-b}\,(3a^2-2b^3)^{4a-5b}} = ?$

6). $\sqrt{\dfrac{2a+b}{a^2 b} + \dfrac{1}{b^2}} = \,.\,.\,.\,.\,.\,?$

7). $\dfrac{a-b}{2ab}\sqrt{\dfrac{8a^3b^3}{2a^2-4ab+2b^2}} = \,.\,.\,?$

8). $\dfrac{20+4m}{45-9m}\sqrt{\dfrac{50-20m+2m^2}{15+30m+3m^2}} = \,.\,.\,?$

9). $\sqrt[3]{\dfrac{a^4 b^2 c^3}{m^3 n}} + \sqrt[x]{\dfrac{a^{x-1}}{b}} - \sqrt[x]{\dfrac{a}{b^{x-1}}} + \sqrt[x]{\dfrac{1}{a^x b^x}} = ?$

10). $\sqrt[x-1]{\dfrac{a}{\sqrt[x]{a}}} = \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,?$

11). $\dfrac{1}{\left(\dfrac{2^0}{a^3}\right)^{-1} : \left((\sqrt[3]{a^2})^2 \cdot (\sqrt[-3]{a^{-1}})^5\right)} = \,.\,.\,?$

12). $\left(\dfrac{1-\sqrt[-2]{3}}{1+\sqrt[-2]{3}} + 1\right) \cdot \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = \,.\,.\,?$

13). $\left(m^{\frac{1}{2}} - m^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \left(m^{\frac{1}{3}} - m^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{m}{n}} = \,.\,.\,?$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

14). $\sqrt[0,5]{0,005} = \ldots\ldots\ldots\ldots ?$

15). $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \ldots\ldots ?$

16). $\sqrt{6+\sqrt{8}-\sqrt{12}-\sqrt{24}} = \ldots ?$ Man soll zuerst den Radikanden in ein Produkt zweier Binome verwandeln.

17). $\sqrt{x+2\sqrt{x}+3+\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}} = \ldots ?$ Die angedeutete Quadratwurzelausziehung soll ausgeführt werden.

18). $\sqrt{4a^2b^4-12a^3b^3-16a^4b^2x^{-2}+9a^4b^2+24a^5bx^{-1}+16a^6x^{-2}} = ?$

19). $\sqrt{a^2-c} = \ldots\ldots\ldots ?$

20). $\sqrt{4a^4-3b^3} = \ldots\ldots\ldots ?$

21). $\sqrt{16x^{2m}-y^{m}} = \ldots\ldots\ldots ?$

22). $\sqrt{9a^2b^4+5} = \ldots\ldots\ldots ?$

(19–22) sind in unendliche Reihen zu verwandeln.

23). $\sqrt[3]{a^{3m}-6a^{2m+1}x^{n}+12a^{m+2}x^{2n}-8a^3x^{3n}} = ?$... Die angedeutete Kubikwurzelausziehung soll ausgeführt werden.

24). $\sqrt{x^{2n-2}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^{2n+2}}} = \ldots ?$

25). $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}x+2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}+\dfrac{9}{2}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}+\dfrac{27}{8}y} = ?$

26). $\left(y-\dfrac{m-yx}{y-x}\right)\cdot\left(x+\dfrac{m-yx}{y-x}\right)+\left(\dfrac{m-yx}{y-x}\right)^2 = ?$

27). $\sqrt[3]{\dfrac{27-54x+36x^2-8x^3}{1+3x-5x^3+3x^5-x^6}} = \ldots ?$

28). $\sqrt[3]{a^3+x} = \ldots\ldots\ldots ?$

29). $\sqrt[3]{m^3-n^3} = \ldots\ldots\ldots ?$

30). $\sqrt[3]{x^3-a} = \ldots\ldots\ldots ?$

(28–30) sind in unendliche Reihen zu verwandeln.

31). $\sqrt{\dfrac{a^3-2a^2+a}{c^3+bc^2}} = \ldots\ldots ?$

32). $\left(a-\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\dfrac{1}{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right) = ?$

33). $\dfrac{4\sqrt{a}}{-3\sqrt{a}-5\sqrt{b}} = \ldots\ldots ?$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

34). $\left(5a^{\frac{2}{3}} - 3bc^{\frac{3}{2}} + 5a^2m^{\frac{1}{2}}\right) . ab^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} = ?$

35). $\frac{6x - 7\sqrt{x}}{\sqrt{(x^2 - y^2) - (x + y)}} = \;.\;.\;.\;.\; ?$

36). $\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} = ?$

37). $\left(\sqrt{a}\sqrt[4]{\frac{a^3}{n}} - n\sqrt{\frac{n^3}{a}}\right) \cdot \left(\frac{n^3}{a}\left(a\sqrt[4]{\frac{a}{n}} + \frac{n^2}{a}\sqrt{an}\right)\right) = ?$

38). $\left(x^2 - y^2\right) : \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right) = \;.\;.\;.\;.\; ?$

39). $\sqrt{\left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{2b\sqrt{ac}}\right) \cdot \left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} - \sqrt{2b . \sqrt{ac}}\right)} = ?$

40). $\sqrt[3]{\frac{2x\sqrt[4]{a}}{5a\sqrt{xy}}} : \sqrt[4]{\frac{3x\sqrt{b}}{7a\sqrt[3]{cx}}} = ?$

41). $(15a\sqrt{b} - 25\sqrt[6]{a^3b^3x^2y^2} - 24\sqrt[6]{a^3x^2y^4} + 40y\sqrt[3]{x^2}) : (3\sqrt{a} - 5\sqrt[3]{xy}) = ?$

42). $\frac{(1 - \sqrt{-2})^2 + (1 + \sqrt{-2})^2}{10} = \;.\;.\; ?$

43). $1 : (2 + (\sqrt{3} - \sqrt{5})\,i) = ?$

44). $\frac{1 - i^3}{(1 + i)^3} = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; ?$

45). $3\sqrt{-a^3b^{2r}c} - 5\sqrt{-a^3b^{2p}c} - \sqrt{-9a^5b^{2p+1}} = ?$

46). $2am\sqrt{-3} . 5n\sqrt{-5} = \;.\;.\;.\;.\; ?$

47). $(\sqrt[3]{-x} - 3\sqrt{-y}) . (\sqrt[3]{-x} + 3\sqrt{-y}) = ?$

48). $(2a\sqrt[6]{b} - 2\sqrt[4]{-c})^3 = \;.\;.\;.\;.\;.\; ?$

49). $(14 - \sqrt{15} - (7\sqrt{3} + 2\sqrt{5})\,i) : (7 - i\sqrt{5}) = ?$

50). $\frac{\sqrt{1 - x} + \frac{1}{\sqrt{1 + x}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}} = \;.\;.\;.\;.\; ?$

51). $\sqrt[m]{\frac{1}{a^4b^6c^m} - \frac{a^{m-4}b^{m-6} - d^me^m}{a^mb^mc^m}} = ?$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

52). $\sqrt{am} + \frac{am}{a - \sqrt{am}} = \ldots\ldots ?$

53). $\sqrt{x^2 - 4xy + 4y^2 - \frac{2x}{y} + \frac{8y}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{4}{xy} + \frac{1}{y^2}} = ?$

54). $\left(-\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \ldots\ldots\ldots\ldots ?$

55). $2\sqrt{-(x-y)^4} - 3\sqrt[3]{-(a-b)^3} = \ .\ ?$

56). $\sqrt[x]{a^{x+1}b^x - a^x b^{x+1}} - \sqrt[x+y]{a^{2x+y}b^{x+2y} - a^{x+2y}b^{2x+y}} = ?$

57). $\sqrt[3]{\frac{(4a^2 - b^2)(2a-b)^2}{2a+b}} = \ldots ?$

58). $\sqrt{(x^2 + 2xy + y^2)^3} \cdot \sqrt{(x^2 - 2xy + y^2)^3} = ?$

59). $\sqrt{\frac{2(x^2+y^2)^2}{m^2} - \frac{2(x^2-y^2)^2}{m^2}} = ?$

60). $\left(\frac{2(\sqrt[4]{x})^5 \cdot \sqrt[4]{x^{-1}}}{\sqrt{x}} + \frac{y - \sqrt{xy}}{\sqrt[-2]{9y}}\right) = ?$

61). $\sqrt[3]{\frac{8x^3 - 12m^2x^2 + 6m^4x - m^6}{m^3 + 18m^2 + 108m + 216}} = ?$

62). $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{6}\sqrt{2}\right)^{-8}} = \ldots\ldots\ldots ?$

63). $\sqrt[4]{\frac{a^{15}b^3}{c^{10}} + \frac{ab^5}{c^2}} = \ldots\ldots ?$

64). $\sqrt[5]{\frac{a^{20}b^{-35}(m+n)^{-5}}{x^{-30}y^{-10}}} = \ldots\ldots ?$

65). $\sqrt{\frac{3a^{2m}b^n}{(c^2-d)^{-p}} \cdot \sqrt[3]{\frac{27a^{6m}b^{9n}}{24(c^2-d)^{3p}}}} = ?$

66). $\sqrt{\frac{a^3 - 2a^2 + a}{c^3 + bc^2}} = \ldots\ldots ?$

67). $\sqrt[3]{ab(m-3)^{m-3}} \cdot \sqrt{a^{m-3}b^2 \cdot (m-3)^{m-3}} = ?$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

68). $\sqrt[3]{b^3 + \frac{3a^2b^2}{2c^2x^2} + \frac{3a^4b}{4c^4x^4} + \frac{a^6}{8c^6x^6}} = ?$

69). $\left(a^{\frac{17}{12}} - a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{3}{4}}c^{\frac{m}{n}}\right) : a^{\frac{3}{4}} = \ldots ?$

70). $\left(28a^{\frac{2x}{3}} + 3a^{\frac{nx+3m}{3n}}b^{\frac{7}{6}} + 27a^{\frac{nx+6}{3}} + b^{\frac{2p+3}{6}} - 18a^{\frac{2m}{n}}b^{\frac{4}{3}} + 36a^{\frac{m+2}{n}}b^{\frac{p+2}{3}} - 10a^{\frac{4}{n}}b^{\frac{2p}{3}}\right) :$

$\left(7a^{\frac{x}{3}}b^{\frac{1}{2}} + 6a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{2}{n}}b^{\frac{p}{3}}\right) = \ldots ?$

71). $(\sqrt{-a} + i\sqrt{b})^6 = \ldots\ldots ?$

72). $(\sqrt{-x} + \sqrt{-9a^2y})^4 = \ldots ?$

73). $2\sqrt[3]{16} + 4\sqrt[3]{-54} - 7\sqrt[3]{-128} + \sqrt[3]{-250} + 2\sqrt[3]{-1} = ?$

74). $\left(\sqrt{x + \sqrt{x^2 - y^2}} + \sqrt{x - \sqrt{x^2 - y^2}}\right)^2 = ?$

75). $(m + \sqrt{n})^3 + (m - \sqrt{n})^3 = \ldots ?$

76). $(m + \sqrt{a})^5 + (m - \sqrt{a})^5 = \ldots ?$

77). $(a^2 + b^2) : (a\sqrt[3]{b} + b\sqrt[3]{a}) = \ldots ?$

78). $\frac{a^4 - b^4}{\sqrt[3]{ab}} : \left(a\sqrt[3]{a} - b\sqrt[3]{b}\right) = \ldots ?$

79). $\frac{a + x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a + x - \sqrt{a^2 + x^2}} = \ldots\ldots ?$

80). $\frac{\sqrt{(1+x)(1+y)} - \sqrt{(1-x)(1-y)}}{\sqrt{(1+x)(1+y)} + \sqrt{(1-x)(1-y)}} = ?$

81). $\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - \sqrt{1+y} + \sqrt{1-y}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+y} + \sqrt{1-y}} = ?$

82). $(2\sqrt{2} + \sqrt{6})\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \ldots ?$

83). $m\sqrt{m^{-1}\sqrt{m^{-1}\sqrt{m^{-1}}}} = \ldots ?$

84). $x\sqrt[3]{x^{-2}\sqrt[3]{x^{-2}\sqrt[3]{x^{-2}}}} = \ldots ?$

Uebungsbeispiele: **Resultate:** **Andeutungen:**

85). $\left(\frac{2+i\sqrt{3}}{2}\right)^4+\left(\frac{2-i\sqrt{3}}{2}\right)^4= \ . \ . \ ?$

86). $\frac{\sqrt{1+x}+i\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+i\sqrt{1-x}}-\frac{\sqrt{1-x}+i\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+i\sqrt{1+x}}= ?$

87). $\sqrt{3+2i\sqrt{6}}\pm\sqrt{3-2i\sqrt{6}}= \ . \ . \ ? \ . \ . \ .$ man beachte den Zusatz 1, Seite 362.

88). $\sqrt{m+i\sqrt{a^2-m^2}}\pm\sqrt{m-i\sqrt{a^2-m^2}}= ?$

89). $\sqrt{\frac{abx+c^2}{bc}+\sqrt{\frac{4ax}{b}}}+\sqrt{\frac{abx+c^2}{bc}-\sqrt{\frac{4ax}{b}}}= ?$

90). $\frac{1+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}}{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}}= \ . \ . \ . \ . \ ?$

91). $\frac{\sqrt{1-m}+\frac{1}{\sqrt{1+m}}}{1+\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}}= \ . \ . \ . \ . \ ?$

92). $\frac{c\sqrt{m}}{\sqrt{a+m}}+\frac{d\sqrt{m}}{\sqrt{a-m}}+\frac{a\sqrt{am^3+m^4}}{\sqrt{a^2-m^2}}-\sqrt{a^2-m^2}= ?$

93). $3\sqrt{40\sqrt{12}}+2\sqrt{5\sqrt{48}}-4\sqrt{15\sqrt{27}}= ?$

94). $5\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}}+7\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}= \ . \ . \ ?$

95). $3\sqrt[3]{54-36\sqrt{27}}-\sqrt[3]{16-16\sqrt{12}}= ?$

96). $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{m-n}\cdot\sqrt[3]{(a+b^2)^4}}{m^6 n^{5r}}}= \ . \ . \ . \ ?$

97). $\sqrt{\left(\frac{\sqrt[6]{x}\sqrt[3]{x}\sqrt{x}-\sqrt{y}\sqrt[5]{y^4}\sqrt[-10]{y^3}}{\sqrt[6]{x^5}\sqrt[-3]{x}-\sqrt[5]{y^2}\sqrt[10]{y}}\right)^2-4\sqrt{xy}}= ?$

98). $\frac{2x+y.[(1-\sqrt{-2})^2+(1+\sqrt{-2})^2]}{a^2-b^2}= ?$

99). $(12-2\sqrt{-3}+\sqrt{6}):(4-2\sqrt{-2}-\sqrt{-3})= ?$

100). $\frac{(\sqrt{3}-2\sqrt{2})^2+(\sqrt{30}+3\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(2\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{12})}{2-\sqrt{6}}= ?$

Dr. A. Kleyer's

Mathematisch-

technisch-naturwissenschaftliche Encyklopädie.

Lehrbuch

der

Potenzen und Wurzeln.

Dr. A. Kleyer's

Mathem.-techn.-naturwissenschaftliche Encyklopädie

enthält die sämtlichen **Definitionen, Lehrsätze, Formeln, Regeln etc.,** sowie die **denkbar mannigfaltigsten gelösten** und analogen **ungelösten Beispiele und praktischen Aufgaben,** welche in den sämtlichen Zweigen der

Rechenkunst, der niederen, höheren und angewandten Mathematik,

nämlich in den kaufmännischen und bürgerlichen Rechnungsarten, in der Algebra, Planimetrie, Stereometrie, synthetischen Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, Differential- und Integralrechnung etc., in der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, math. Geographie, Astronomie, in dem Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- und Hochbau, sowie in den Konstruktionslehren, als: darstellende Geometrie, Polar- und Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc.

vorkommen und ist, infolge der eigentümlichen und praktischen Anordnung dieser Disciplinen, infolge der zahlreichen, jedem einzelnen Lehrsatz und Abschnitt beigegebenen

mannigfaltigen vollständig gelösten und analogen ungelösten praktischen Aufgaben,

sowie infolge der vielen sauberen **in den Text gedruckten Holzschnitten** und beigefügten **lithographischen Tafeln** von zahlreichen fachmännischen Seiten aus allen Teilen Europas und Amerikas als

das praktischste Lehrbuch für Schüler aller Schulen (indem jedes Hauptkapitel als ein für sich bestehendes Ganze abgeschlossen ist und allein bezogen werden kann),

als

das beste Handbuch für Lehrer und Examinatoren (indem Definitionen etc. meist in Fragen und Antworten gegeben sind),

als

das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium für jeden einzelnen Teil der erwähnten Wissenschaften

und als

ein vortreffliches Nachschlagebuch für Fachleute, Militärs, Ingenieure, Architekten, Techniker jeder Art

anerkannt worden.

Stuttgart, im November 1883.

Die Verlagshandlung.

Gleichzeitig sind erschienen:

1). **Lehrbuch der Logarithmen,**
2). **Fünfstellige korrekte Logarithmen-Tafeln,**
3). **Lehrbuch der Körperberechnungen,** 1. Buch,

sämtlich besonders bearbeitet für den **Schulunterricht** und das **Selbststudium** von Dr. A. **Kleyer.**

SBB013401966513

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Kleyer, Adolph

Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln nebst einer Sammlung von 3296 gelösten und ungelösten Beispielen ; zum Gebrauch an niederen und höheren Schulen, sowie zum rationellen Selbststudium

Stuttgart 1884

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.73-m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11841049-1